Θεώρημα (Βασικό Θεώρημα Οριακής Συμπεριφοράς Αδιαχώριστων Μ.Α.Δ.Χ)

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχώριστη Μ.Α.Δ.Χ με χ.κ S και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $P = [p_{ij}]$.

Αν η $\{X_n, n \geq 0\}$ έχει στάσιμη κατανομή, τότε είναι θετικά επαναληπτική και επιπλέον

\# επισκέψεων στην j στα πρώτα n βήματα

(i) $$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} 1\{X_k = j\}}{n}} = \frac{1}{m_j} = \pi_j \quad \text{μ.π. } 1.$$

μακροπρόθεσμο ποσοστό του χρόνου που η αλυσίδα βρίσκεται στην j

(ii) $$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{E\left[\sum_{k=0}^{n-1} 1\{X_k = j\}\right]}{n}} = \frac{1}{m_j} = \pi_j$$

μακροπρόθεσμο μέσο ποσοστό του χρόνου που η αλυσίδα βρίσκεται στην j

(iii) $$m_j = \frac{1}{\pi_j}$$

(iv) $$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} P(X_k = j)}{n}} = \frac{1}{m_j} = \pi_j$$

↳ $c\text{-}\lim_{k\to\infty} P(X_k = j)$ (cesar όριο)

(v) Αν $\pi^{(0)} = \pi$, τότε $\pi^{(n)} = \pi$, δηλαδή $P(X_n = j) = \pi_j \ \forall n, j$

(vi) Αν επιπλέον η αλυσίδα είναι απεριοδική, έχουμε και $\lim_{n\to\infty} P(X_n = j) = \pi_j$, $j \in S$ για οποιαδήποτε αρχική κατανομή και $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j$, $i, j \in S$.