Θεώρημα

$\{X_n, n \geq 0\}$ αδιαχώριστη Μ.Α.Δ.Χ. με στάσιμο μέτρο $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$ με $\lambda_k = 1$. Τότε $\lambda \geq m^{(k)}$. Αν η $\{X_n, n \geq 0\}$ είναι και επαναληπτική, τότε $\lambda = m^{(k)}$.

Απόδειξη

Έστω $\lambda = [\lambda_i]_{i \in S}$ στάσιμο μέτρο.

Άρα
$$\lambda_j = \sum_{i_1 \in S} \lambda_{i_1} \cdot p_{i_1 j} = \underbrace{\lambda_k}_{=1} \cdot p_{kj} + \sum_{i_1 \neq k} \lambda_{i_1} \cdot p_{i_1 j}$$

$$= p_{kj} + \sum_{i_1 \neq k} \left(\sum_{i_2 \in S} \lambda_{i_2} p_{i_2 i_1} \right) p_{i_1 j}$$

$$= p_{kj} + \sum_{i_1 \neq k} \Big(\underbrace{\lambda_k}_{=1} p_{k i_1} + \sum_{i_2 \neq k} \lambda_{i_2} p_{i_2 i_1} \Big) p_{i_1 j}$$

$$= p_{kj} + \sum_{i_1 \neq k} p_{k i_1} p_{i_1 j} + \sum_{i_1 \neq k} \sum_{i_2 \neq k} \lambda_{i_2} p_{i_2 i_1} p_{i_1 j}$$

$$= \underbrace{p_{kj}}_{P(X_1 = j, T_k \geq 1 | X_0 = k)} + \underbrace{\sum_{i_1 \neq k} p_{k i_1} p_{i_1 j}}_{P(X_2 = j, T_k \geq 2 | X_0 = k)} + \underbrace{\sum_{i_1 \neq k} \sum_{i_2 \neq k} p_{k i_2} p_{i_2 i_1} p_{i_1 j}}_{P(X_3 = j, T_k \geq 3 | X_0 = k)} + \underbrace{\sum_{i_1, i_2, i_3 \neq k} \lambda_{i_3} p_{i_3 i_2} p_{i_2 i_1} \cdot p_{i_1 j}}_{\geq 0}$$

Επαγωγικά,

$$\lambda_j \geq \sum_{n=1}^{\infty} P(X_n = j, T_k \geq n | X_0 = k)$$

$$= E\left[\sum_{n=1}^{\infty} 1\{X_n = j, T_k \geq n\} | X_0 = k \right]$$

$$= E\left[\sum_{n=1}^{T_k} 1\{X_n = j\} | X_0 = k \right] = m_j^{(k)}$$

Άρα $\lambda_j \geq m_j^{(k)}$

Αν η $\{X_n, n\geq 1\}$ είναι και επαναληπτική, τότε

$m^{(k)}$ στάσιμο μέτρο.

Έστω $\lambda P = \lambda$ και $m^{(k)}P = m^{(k)}$. Οπότε

$(\lambda - m^{(k)})P = \lambda - m^{(k)} \Rightarrow \lambda - m^{(k)}$ στάσιμο.

Επίσης, $\underbrace{\lambda_k}_{= 1} - \underbrace{m_k^{(k)}}_{= 1} = 1 - 1 = 0$.

Άρα, $0 = \lambda_k - m_k^{(k)} = \sum_{j\in S} (\lambda_j - m_j^{(k)}) p_{jk}^{(n)}$, $\forall n$.

Όμως, $\forall j \in S$, $j \leftrightarrow k$ $\exists$ $n_1 : p_{jk}^{(n_1)} > 0$, άρα $\lambda_j - m_j^{(k)} = 0$.

Οπότε $\lambda_j = m_j^{(k)}$, $\forall j \in S \Rightarrow \lambda = m^{(k)}$.