Θεώρημα

Κάθε κλειστή και πεπερασμένη κλάση είναι επαναληπτική.

Απόδειξη

Έστω C κλειστή και πεπερασμένη.

Αν $X_0 \in C$, τότε $\exists\ i \in C$:

$P(\cap\ \{X_n\}$ επισκέπτεται την i ∞ φορές$) > 0$

$$\Rightarrow P(\{X_n\} \text{ επισκέπτεται την } i) \cdot \underbrace{P(\cap \{X_n\} \text{ επισκ. την } i\ \infty \text{ φορές} \mid \text{ξεκιν. από την } i)}_{P(N_i(\infty)=\infty)} > 0$$

$\Rightarrow P(N_i(\infty)=\infty) > 0$

$\Rightarrow i$ επαναληπτική, διότι αν ήταν παροδική θα είχαμε $P(N_i(\infty)=\infty)=0$.

Θεώρημα

Αν i, j καταστάσεις αδιαχώριστης & επαναληπτικής Μ.Α.Δ.Χ

τότε $P(T_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = i) = 1$.

Απόδειξη

$i \leftrightarrow j \Rightarrow \exists\ m > 0 : p_{ji}^{(m)} > 0$.

j επαναληπτική $\Rightarrow P(T_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j) = 1 \Rightarrow$

$$\sum_{k \in S} P(T_j^{(1)} < \infty \mid \cancel{X_0=j}, X_m = k) \cdot \underbrace{P(X_m = k \mid X_0 = j)}_{p_{jk}^{(m)}} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in S} p_{jk}^{(m)} P(T_j^{(1)} < \infty \mid X_m = k) = 1$$

$\Rightarrow P(T_j^{(1)} < \infty \mid X_m = k) = 1 \quad \forall k$ με $p_{jk}^{(m)} > 0$

$\Rightarrow P(T_j^{(1)} < \infty \mid X_m = i) = 1 \Rightarrow P(T_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = i) = 1$.