

## Θεώρημα

(α) Κάθε επανεληπτική κλάση είναι κλειστή.

(β) Κάθε ανοικτή κλάση είναι περιοδική.

## Απόδειξη

(α) Έστω  $C$  επανεληπτική κλάση. Έστω  $A$  ανοικτή.

Έστω  $i \in C$ . Τότε  $\exists j \in A : i \rightarrow j$ , δηλ  $\exists m : p_{ij}^{(m)} > 0$ .

Εφόσον  $i \in C$  &  $C$  επανεληπτική  $\Rightarrow$

$$h_i = 1 \Rightarrow P(T_i^{(1)} < \infty | X_0 = i) = 1 \xrightarrow{\text{θ.ο.η.}}$$

$$\sum_{k \in S} P(T_i^{(1)} < \infty | X_0 = i, X_m = k) \cdot \underbrace{P(X_m = k | X_0 = i)}_{p_{ik}^{(m)}} = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} P(T_i^{(1)} < \infty | X_m = k) = 1$$

Εφόσον  $\sum_{k \in S} p_{ik}^{(m)} = 1$ , τότε

$$P(T_i^{(1)} < \infty | X_m = k) = 1 \quad \forall k \in S \text{ με } p_{ik}^{(m)} > 0$$

Άρα  $P(T_i^{(1)} < \infty | X_m = j) = 1$ . Άρα ομοίως  $j \rightarrow i$ .

Οπότε  $C$  κλειστή.

(β) Έστω  $C$  ανοικτή. Έστω  $C$  επανεληπτική, τότε από (α)

$C$  κλειστή. Άρα, άρα  $C$  περιοδική.