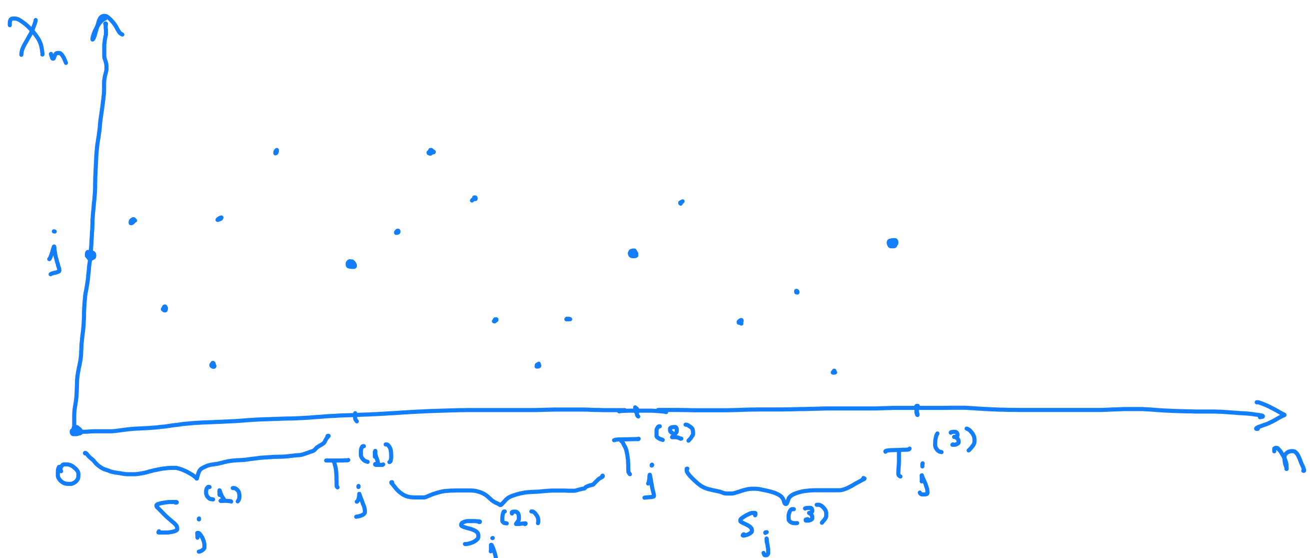
3.5. Επαναληπτικότητα / Περιοδικότητα καταστάσεων

Σύνδεση Μ.Α.Δ.Χ. και ανανεωτικής θεωρίας

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ Μ.Α.Δ.Χ. με χ.κ. S.
Έστω $j \in S$. Υποθέτουμε ότι τη στιγμή 0 το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση j.



$T_j^{(r)}$ = χρόνος r-οστής επίσκεψης στην j, $r = 1, 2, \ldots$

$$T_j^{(1)} = \inf\{n \geq 1 : X_n = j\}$$

$S_j^{(r)}$ = χρόνος μεταξύ $(r-1)$ επίσκεψης και (r)-οστής επίσκεψης στην j, $r = 1, 2, 3, \ldots$

$S_j^{(1)}, S_j^{(2)}, S_j^{(3)}, \ldots$ ανεξ. & ισόνομες τ.μ.

$N_j(n)$ = # επισκέψεων στην κατάσταση j στις χρ. στιγμές $1, 2, \ldots, n$, $n = 1, 2, \ldots$

Η $\{N_j(n), n \geq 0\}$ είναι ανανεωτική διαδικασία.

$N_j(\infty)$ = συνολικός # επισκέψεων στην j.

h_j = πιθανότητα επανόδου στην j
$= P(T_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j)$
$= P(S_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j)$

m_j = μέσος χρόνος επανόδου στην j

$= E[T_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j]$

Από την ανανεωτική θεωρία γνωρίζουμε ότι

- $h_j = 1 \Leftrightarrow P(S_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j) = 1 \Rightarrow P(N_j(\infty) = \infty) = 1$

  και τότε η $\{N_j(n), n \geq 0\}$ λέγεται επαναληπτική

- $h_j < 1 \Leftrightarrow P(S_j^{(1)} < \infty \mid X_0 = j) < 1 \Rightarrow P(N_j(\infty) = k) = h_j^k (1 - h_j)$, $k = 0, 1, 2, \dots$

  $\Rightarrow P(N_j(\infty) = \infty) = 0$

  και τότε η $\{N_j(n), n \geq 0\}$ λέγεται περιοδική ή μεταβατική

Ορισμοί (Επαναληπτική / Περιοδική κατάσταση)

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ Μ.Α.Δ.Χ με χ.κ. S. Έστω $j \in S$.

- Η j ονομάζεται επαναληπτική (έμμονη, επανερχόμενη) αν $h_j = 1$. Επιπλέον, αν $m_j < \infty$, η j ονομάζεται θετικά επαναληπτική. Ενώ, αν $m_j = \infty$ η j ονομάζεται μηδενικά επαναληπτική.
- Η j ονομάζεται περιοδική (μεταβατική) αν $h_j < 1$.