3.4. Χρόνοι $1^{ης}$ εισόδου

Ορισμός

Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S. Αν $C \subseteq S$ ορίζουμε τα ακόλουθα

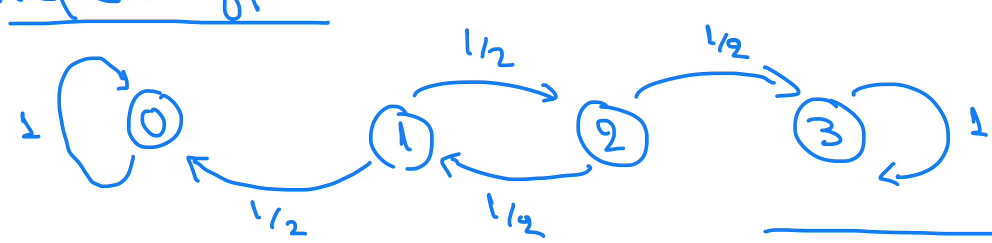
$T_C = \inf\{n \geq 0 : X_n \in C\}$: χρόνος $1^{ης}$ εισόδου στο C

$h_i(C) = P(T_C < \infty \mid X_0 = i)$: πιθανότητα εισόδου στο C ξεκινώντας από την i

$m_i(C) = E[T_C \mid X_0 = i]$: μέσος χρόνος εισόδου στο C ξεκινώντας από την i.

Όταν το C κλειστό, ο T_C λέγεται και χρόνος απορρόφησης.

Παράδειγμα



Αρχικά βρισκ. στην 1: $\pi_1^{(0)} = 1$

(α) πιθανότητα να απορροφηθεί στην 3 $= h_1(\{3\}) = ;$

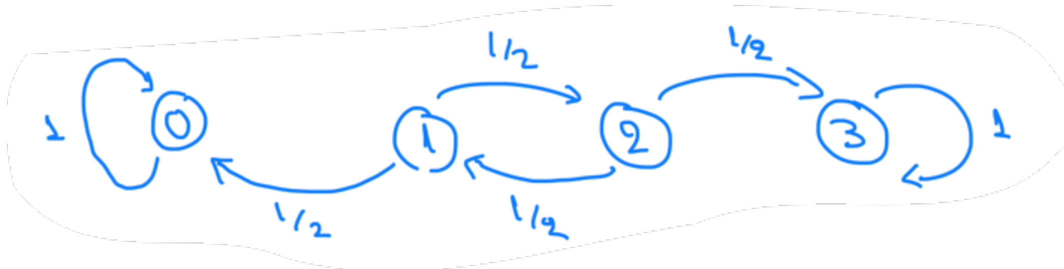
(β) μέσο χρόνος απορρόφησης στην $\{0\}$ ή την $\{3\}$ $= m_1(\{0,3\}) = ;$

Λύση

(α) Για να βρούμε το $h_1(\{3\})$, θα γράψουμε εξισώσεις για τα $h_i(\{3\})$, $i \in S$, κάνοντας ανάλυση $1^{ου}$ βήματος (δεσμεύοντας στην X_1).

$$\left.\begin{aligned} h_0(\{3\}) &= 0 \\ h_1(\{3\}) &= \tfrac{1}{2} h_2(\{3\}) + \tfrac{1}{2} \cancel{h_0(\{3\})}^{\,0} \\ h_2(\{3\}) &= \tfrac{1}{2} \underbrace{h_3(\{3\})}_{=1} + \tfrac{1}{2} h_1(\{3\}) \\ h_3(\{3\}) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} h_0(\{3\}) &= 0 \\ \boxed{h_1(\{3\}) = \tfrac{1}{3}} \\ h_2(\{3\}) &= \tfrac{2}{3} \\ h_3(\{3\}) &= 1 \end{aligned}$$

(β) Για να υπολογίσω το $m_1(\{0,3\})$ θα γράψω εξισώσεις για τα $m_i(\{0,3\})$, $i \in S$, κάνοντας ανάλυση $1^{ου}$ βήματος.



$$\left.\begin{aligned}
m_0(\{0,3\}) &= 0\\
m_1(\{0,3\}) &= 1 + \tfrac{1}{2} m_2(\{0,3\}) + \tfrac{1}{2} m_0(\{0,3\})\\
m_2(\{0,3\}) &= 1 + \tfrac{1}{2} m_3(\{0,3\}) + \tfrac{1}{2} m_1(\{0,3\})\\
m_3(\{0,3\}) &= 0
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$m_0(\{0,3\}) = m_3(\{0,3\}) = 0, \quad \boxed{m_1(\{0,3\}) = 2}, \quad m_2(\{0,3\}) = 2$$