Θεώρημα $\pi^{(n)} = \pi^{(0)} \cdot P^n \quad , n = 0, 1, 2, \dots$

Απόδειξη:

$$\pi_i^{(n)} = P(X_n = i)$$

$$\overset{\Theta.O.\Pi.}{=} \sum_{j \in S} P(X_n = i \mid X_0 = j) \cdot P(X_0 = j)$$

$$= \sum_{j \in S} p_{ji}^{(n)} \cdot \pi_j^{(0)} \Rightarrow$$

$$\pi_i^{(n)} = \sum_{j \in S} \pi_j^{(0)} \cdot p_{ji}^{(n)} = (\text{διάνυσμα } \pi^{(0)}) \times (i \text{ οστή στήλη του } P^{(n)})$$

$$\Rightarrow \pi^{(n)} = \pi^{(0)} \cdot P^{(n)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\pi^{(n)} = \pi^{(0)} P^n}$$

Θεώρημα: $M^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} P^k$

Απόδειξη:

$$m_{ij}^{(n)} = E\left[\begin{matrix} \text{\# επισκέψεων στην } j \\ \text{στα πρώτα} \\ n \text{ βήματα} \end{matrix} \;\middle|\; X_0 = i \right]$$

$$= E\left[\sum_{k=0}^{n-1} \left(\begin{matrix} \text{\# επισκέψεων στην } j \\ \text{στο βήμα } k \end{matrix} \right) \;\middle|\; X_0 = i \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E\left[\underbrace{\begin{matrix} \text{\# επισκέψεων στην } j \\ \text{στο βήμα } k \end{matrix}}_{\begin{cases} 1, & \text{αν } X_k = j \\ 0, & \text{αν } X_k \neq j \end{cases}} \;\middle|\; X_0 = i \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} E\left[1_{\{X_k = j\}} \mid X_0 = i \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} P(X_k = j \mid X_0 = i)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} p_{ij}^{(k)}$$

$$\Rightarrow M^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} P^{(k)} = \sum_{k=0}^{n-1} P^k$$