③ Μαρκοβιανές Αλυσίδες Διακριτού Χρόνου

3.1. Ορισμοί

<u>Μαρκοβιανή Ιδιότητα</u>: Αν η παρούσα κατάσταση του συστήματος είναι γνωστή, το μέλλον του συστήματος δεν εξαρτάται από το παρελθόν του.

<u>Ορισμός</u> (Μαρκοβιανή Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου (ΜΑΔΧ))
Μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n, n \geq 0\}$ με αριθμήσιμο χ.κ. S λέγεται Μαρκοβιανή Αλυσίδα Διακριτού Χρόνου (ΜΑΔΧ) αν

$$P(\underbrace{X_{n+1} = j}_{\text{μέλλον}} \mid \underbrace{X_n = i}_{\text{παρόν}}, \underbrace{X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \dots, X_0 = i_0}_{\text{παρελθόν}}) = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i),$$

$\forall n \in \mathbb{N}, \ i_0, i_1, i_2, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$

<u>Ορισμός</u> (Ομογενής ΜΑΔΧ)
Η ΜΑΔΧ $\{X_n, n \geq 0\}$ με χ.κ. S καλείται (χρονικά) <u>ομογενής</u> αν οι πιθανότητες $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$ είναι ανεξάρτητες του n $\forall i, j \in S$. Τότε

$$\boxed{p_{ij} \equiv P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)}$$

<u>Σημείωση</u>: Θα ασχοληθούμε μόνο με χρονικά ομογενείς ΜΑΔΧ

<u>Ορισμός</u> (πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης (1ης τάξης))
Έστω $\{X_n, n \geq 0\}$ μια ΜΑΔΧ με χ.κ. S. Ο πίνακας $P = [p_{ij}]_{i,j \in S}$ ονομάζεται <u>πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης 1ης τάξης</u>.

Ισχύουν: (i) $p_{ij} = P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) \geq 0$

(ii) $\sum_{j \in S} p_{ij} = \sum_{j \in S} P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = P(X_{n+1} \in S \mid X_n = i) = 1 \quad \forall i \in S$

Ορισμός (στοχαστικός πίνακες)

$$A=[a_{ij}]_{i,j\in M} \text{ στοχαστικός} \iff \begin{cases} a_{ij}\ge 0 & \forall\, i,j\in M \\ \sum\limits_{j\in M} a_{ij}=1 & \forall\, i\in M \end{cases}$$

Θεώρημα

$$\left.\begin{array}{l} \{X_n, n\ge 0\} \text{ ΜΑΔΧ} \\ \text{χ.κ. } S \\ P=[p_{ij}] \text{ πίνακας πιθαν. μετάβασης} \end{array}\right\} \Rightarrow P \text{ στοχαστικός}$$

Ορισμός (Αρχική κατανομή)

Έστω $\{X_n, n\ge 0\}$ ΜΑΔΧ με χ.κ. S. Θέτουμε

$$\boxed{\pi^{(0)}(i) = P(X_0=i), \quad i\in S.}$$

Το διάνυσμα $\pi^{(0)} = (\pi^{(0)}(i))_{i\in S}$ που δίνει τη συνάρτηση πιθανότητας της X_0 ονομάζεται αρχική κατανομή της ΜΑΔΧ

Θεώρημα: Η ΜΑΔΧ $\{X_n, n\ge 0\}$ χαρακτηρίζεται πλήρως από την αρχική κατανομή $\pi^{(0)}$ και τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $P=[p_{ij}]$.

Απόδειξη:

$$P(X_0=i_0, X_1=i_1, X_2=i_2, \dots, X_n=i_n) \underset{\text{νόμο}}{\overset{\text{πολ/κο}}{=\!=}}$$

$$P(X_0=i_0)\cdot P(X_1=i_1 \mid X_0=i_0)\cdot P(X_2=i_2 \mid \underbrace{X_1=i_1}, X_0=i_0)\cdot$$

$$P(X_3=i_3 \mid X_2=i_2, X_1=i_1, X_0=i_0)\cdot \dots \cdot$$

$$P(X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}, X_{n-2}=i_{n-2}, \dots, X_0=i_0) \underset{\text{ιδιότητα}}{\overset{\text{Μαρκοβιανή}}{=\!=}}$$

$$P(X_0=i_0)\cdot P(X_1=i_1 \mid X_0=i_0)\cdot P(X_2=i_2 \mid X_1=i_1)\cdot P(X_3=i_3 \mid X_2=i_2)\cdot \dots$$

$$P(X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}) =$$

$$\pi^{(0)}(i_0)\, p_{i_0,i_1}\, p_{i_1,i_2}\, p_{i_2,i_3} \cdots p_{i_{n-1},i_n}$$