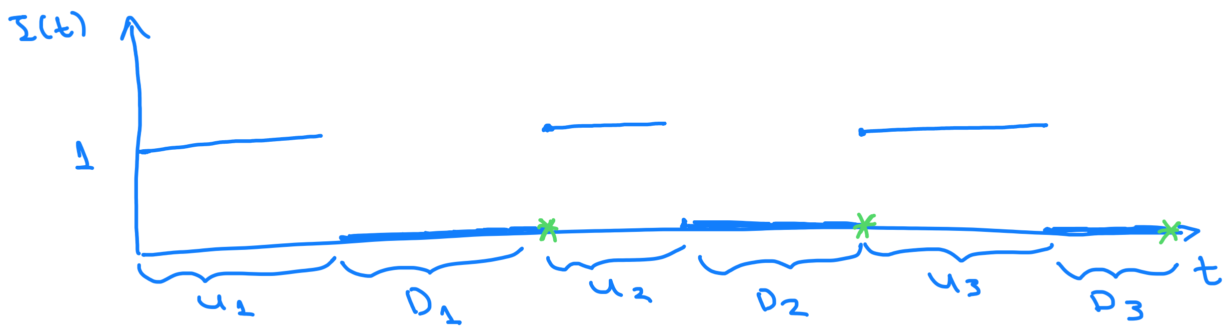
Άσκηση (Εναλλασσόμενη ανανεωτική διαδικασία)

Μηχανή που λειτουργεί, χαλάει, λειτουργεί κ.τ.λ.

$$I(t) = \begin{cases} 1, & \text{αν η μηχ. λειτουργεί την } t \\ 0, & \text{αν η μηχ. χαλασμ. την } t \end{cases}$$



$u_1, u_2, u_3, \dots$ ανεξάρτητες & ισόν. τ.μ.

$D_1, D_2, D_3, \dots$ » » »

Η διαδικασία ανανεώνεται κάθε φορά που η μηχανή αρχίζει να λειτουργεί.

$X_n = U_n + D_n$

Έχουμε ανανεωτική διαδικασία με ενδ. χρόνους ανανέωσης X_n.

Έστω οι X_n έχουν σ.κ G, δηλαδή

$G(u) = P(X_n \le u) = P(U_n + D_n \le u)$.

Αν η G είναι απεριοδική, $0 < E[U_n] < \infty$ και $0 < E[D_n] < \infty$

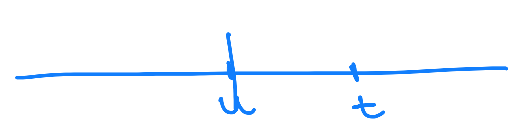
ν.δ.ο $\displaystyle \lim_{t\to\infty} P(I(t)=1) = \frac{E[U_1]}{E[U_1]+E[D_1]}$.

Λύση: Θέτουμε $H(t) = P(I(t)=1)$.

Δεσμεύοντας ως προς $X_1 = S_1$, έχουμε

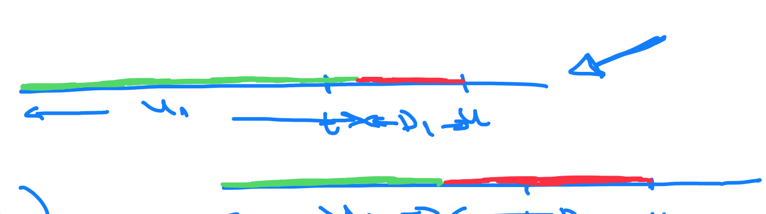
$$H(t) = \int_0^\infty P(I(t)=1 \mid X_1 = u)\, dG(u).$$

Αν $u \le t$



$P(I(t)=1 \mid X_1=u) = P(I(t-u)=1) = H(t-u)$.

Αν $u > t$



$P(I(t)=1 \mid X_1=u) =$

$P(U_1 > t \mid X_1 = u)$

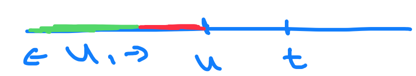
Οπότε $H(t) = \int_0^\infty P(I(t)=1 \mid X_1=u)\, dG(u) =$

$$\underbrace{\int_0^t H(t-u)\, dG(u)}_{(H*G)(t)} + \underbrace{\int_t^\infty P(U_1>t \mid X_1=u)\, dG(u)}_{D(t)} \Rightarrow$$

$$H(t) = D(t) + (H*G)(t)$$

$$D(t) = \int_t^\infty P(U_1>t \mid X_1=u)\, dG(u)$$

$$= \underbrace{\int_0^\infty P(U_1>t \mid X_1=u)\, dG(u)}_{P(U_1>t)} - \cancel{\int_0^t P(U_1>t \mid X_1=\underline{u})\, dG(u)} \quad 0$$



$$= P(U_1>t)$$

Άρα η $H(t)$ ικανοποιεί ανανεωτική εξίσωση με

$$D(t) = P(U_1>t)$$

Η $D(t)$ είναι μη-αρνητική, φραγμένη, μονότονη.

Οπότε η $D(t) = D(t) - 0$ γράφεται σαν διαφορά 2 μη-αρνητικών, φραγμένων & μονότονων συναρτήσεων.

Επίσης $\int_0^\infty |D(t)|\, dt = \int_0^\infty D(t)\, dt = \int_0^\infty \underbrace{P(U_1>t)}_{\text{σ.ε. της } U_1} dt = E[U_1] < \infty$

Οι προϋποθέσεις του Β.Α.Θ ικανοποιούνται.

Άρα $\lim_{t\to\infty} H(t) = \lim_{t\to\infty} P(I(t)=1) = \frac{\int_0^\infty D(t)\, dt}{E[U_1]+E[D_1]} = \frac{E[U_1]}{E[U_1]+E[D_1]}$

Σημείωση: Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο καθώς $P(I(t)=1)$ είναι το ποσοστό του χρόνου που η $I(t)$ είναι στην κατάσταση 1.

$$\frac{E[U_1]}{E[X_1]} = \frac{E[U_1]}{E[U_1]+E[D_1]}$$