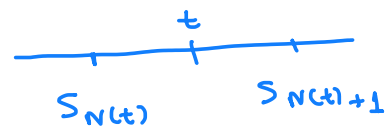


Άσκηση (Οριακός μέσος t -εξαρτώμενος χρόνος)

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ ανεπιόδική ανεξάρτητη διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους ανεξέλεγκτης $X_n, n \geq 1$ με σ.κ. G, μ, τ
 $0 < E[X_n] = \tau < \infty$ και $\text{Var}[X_n] = \sigma^2 < \infty$.

N.S.O $\lim_{t \rightarrow \infty} E[C(t)] = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{\tau}$



$$C(t) = S_{N(t)+1} - S_{N(t)} \\ = X_{N(t)+1}$$

Λύση:

$$H(t) = E[C(t)]$$

Δεσφύουμε ως προς S_1 και έχουμε

$$H(t) = \int_0^\infty E[C(t) | S_1 = u] dG(u).$$

Αν $u \leq t$



$$E[C(t) | S_1 = u] = E[C(t-u)]$$

Αν $u > t$



$$E[C(t) | S_1 = u] = u$$

Οπότε

$$H(t) = \int_0^\infty E[C(t) | S_1 = u] dG(u)$$

$$= \int_0^t E[C(t-u)] dG(u) + \int_t^\infty u dG(u)$$

$$= \underbrace{\int_0^t H(t-u) dG(u)}_{(H * G)(t)} + \underbrace{\int_t^\infty u dG(u)}_{D(t)} \Rightarrow$$

$$H(t) = D(t) + (H * G)(t)$$

Άρα n $H(t)$ ικανοποιεί μία ανεξάρτητη επίγωση με

$$D(t) = \int_t^\infty u dG(u).$$

Η $D(t)$ μη-αερντική και φθίνουσα

$$0 \leq D(t) = \int_t^\infty u dG(u) \leq \int_0^\infty u dG(u) = \tau < \infty$$

Η $D(t) = D(t) - 0$ παρέχεται σαν στοιχείο μη-αερντικών, μόνων & φρεσ γένων συνεπτησεων.

Επισης,

$$\int_0^\infty |D(t)| dt = \int_0^\infty D(t) dt = \int_0^\infty \int_t^\infty u dG(u) dt \quad \underline{\underline{0 < \tau < \infty}}$$

$$\int_0^\infty \int_0^u u dt dG(u) = \int_0^\infty u \int_0^u dt dG(u) =$$

$$\int_0^\infty u^2 dG(u) = E[X_n^2] = \sigma^2 + \tau^2 < \infty$$

Άρα, οι προϋποθέσεις του B.A.Θ ικανοποιούνται.

Εφαρμόζοντας το B.A.Θ παίρνουμε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} H(t) - \lim_{t \rightarrow \infty} E[C(t)] = \frac{\int_0^\infty D(t) dt}{\tau} = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{\tau}$$

Σημείωση Εις σημειώνου

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[C(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} E[X_{N(t)+1}] = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{\tau}$$

όμως

$$E[X_n] = \tau$$

Άρα

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[X_{N(t)+1}] = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{\tau} \geq \tau = E[X_n]$$

Οπότε, για μεγάλο t , ο ενδιάμεσος χρόνος ανενέωσης να καλύπτει ωt είναι κατά μέσο όρο μεγαλύτερος από τον ευσ. χρόνο ανενέωσης X_n . Έκπληξη για παράδειγμα! Γιατί?

