Άσκηση

Έστω $B(t)$ ο υπολειπόμενος χρόνος ανανέωσης μιας απεριοδικής ανανεωτικής διαδικασίας $\{N(t), t \geq 0\}$ με σ.κ. ενδιάμεσου χρ. γεγονότων $G(t)$ και $0 < E[X_n] = \tau < \infty$. Ν.δ.ο για δεδομένο $x > 0$ η $H(t) = P(B(t) > x)$, $t \geq 0$, ικανοποιεί την ανανεωτική εξίσωση

$$H(t) = 1 - G(x+t) + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

και

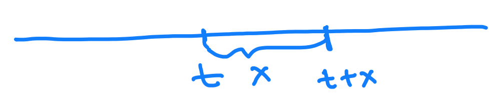
$$\lim_{t \to \infty} P(B(t) > x) = \frac{1}{\tau} \int_x^\infty (1 - G(u))\, du$$

Λύση

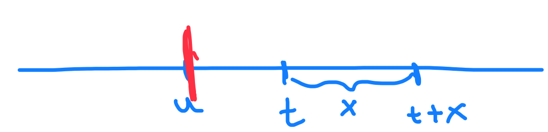
$$H(t) = P(B(t) > x)$$

Δεσμεύοντας ως προς S_1, έχουμε

$$H(t) = \int_0^\infty P(B(t) > x \mid S_1 = u)\, dG(u)$$

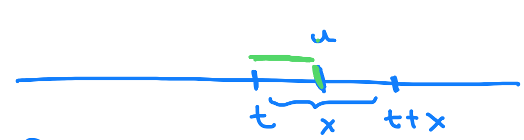


Αν $u \leq t$



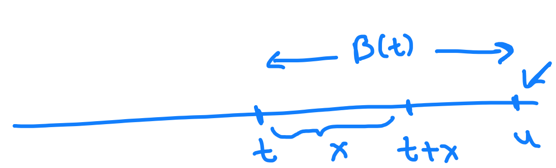
$$P(B(t) > x \mid S_1 = u) = P(B(t-u) > x) = H(t-u)$$

Αν $t < u \leq t+x$



$$P(B(t) > x \mid S_1 = u) = 0$$

Αν $u > t+x$



$$P(B(t) > x \mid S_1 = u) = 1$$

$$H(t) = \int_0^\infty P(B(t) > x \mid S_1 = u)\, dG(u) =$$

$$\int_0^t H(t-u)\, dG(u) + \cancel{\int_t^{t+x} 0\, dG(u)} + \int_{t+x}^\infty 1\, dG(u) =$$

$$H(t) = \underbrace{1 - G(t+x)}_{D(t)} + \int_0^t H(t-u)\, dG(u)$$

$$D(t) = \underbrace{1}_{D_1(t)} - \underbrace{G(t+x)}_{D_2(t)}$$

γράφεται σαν διαφορά 2 μη-αρνητικών, φραγμένες και μονότονων συναρτήσεων.

$$\int_0^\infty |D(t)|\,dt = \int_0^\infty D(t)\,dt = \int_0^\infty (1 - G(t+x))\,dt \overset{u=t+x}{=\!=}$$

$$\int_x^\infty (1 - G(u))\,du < \int_0^\infty (1 - G(u))\,du = \tau < \infty$$

οι προϋποθέσεις του Βασικού Ανανεωτικού Θεωρήματος ικανοποιούνται.

Από Β.Α.Θ.

$$\lim_{t\to\infty} H(t) = \lim_{t\to\infty} P(B(t) > x) = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty D(t)\,dt = \frac{1}{\tau}\int_x^\infty (1 - G(u))\,du.$$

<u>Σημείωση</u>

Είδαμε ότι $\lim_{t\to\infty} P(B(t) > x) = \frac{1}{\tau}\int_x^\infty (1-G(u))\,du$.

Για κάθε τ.μ. X με σ.κ. G και μ.τ. $E[X] = \tau > 0$ μπορώ να θεωρήσω την αντίστοιχη X_e με σ.κ.

$$G_e(x) = \frac{1}{\tau}\int_0^x (1 - G(u))\,du.$$

Παρατηρούμε ότι $G_e(\infty) = \frac{1}{\tau}\int_0^\infty (1-G(u))\,du = \frac{\tau}{\tau} = 1$

Η $G_e(x)$ λέγεται <u>κατανομή ισορροπίας</u> της G.

Επίσης $E[X_e] = \int_0^\infty (1 - G_e(x))\,dx$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\tau}\int_x^\infty (1 - G(u))\,du\,dx \overset{0 < x < u < \infty}{=\!=}$$

$$= \frac{1}{\tau}\int_0^\infty \int_0^u (1 - G(u))\,dx\,du$$

$$= \frac{1}{\tau} \int_0^\infty (1 - G(u)) \underbrace{\int_0^u dx}_{u} \, du$$

$$= \frac{1}{\tau} \int_0^\infty u (1 - G(u)) \, du = \frac{1}{\tau} \frac{E[X^2]}{2} = \frac{\sigma^2 + \tau^2}{2\tau}$$

Έχουμε ότι $\lim_{t \to \infty} P(B(t) > x) = P(X_e > x) = 1 - G_e(x)$