Σημείωση

Έστω $X_n \geq 0$ & ακέραιες τ.μ. με $a_i = P(X_n = i), i = 0,1,2,\dots,$

τότε η $M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-u)\, d\,G(u)$ γίνεται

για $t = n$ όπου $n \in \mathbb{N}$

$$M(n) = G(n) + \sum_{k=0}^{n} M(n-k)\cdot a_k \Rightarrow$$

$$M(n) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} M(n-k)\, a_k \quad (2)$$

Άσκηση

Να υπολογισθεί η ανανεωτική συνάρτηση για ανανεωτική διαδικασία με ενδιάμεσους χρόνους γεγονότων

$X_n, n \geq 1$ που έχουν σ.π.

$a_0 = P(X_n = 0) = 1 - a$

$a_1 = P(X_n = 1) = a$ με $0 < a < 1$.

Λύση

Από τη σχέση (2) παίρνουμε

$$M(0) = a_0 + M(0)\, a_0 \Rightarrow$$

$$M(0) = 1 - a + (1-a) M(0) \Rightarrow M(0) = \frac{1-a}{a}$$

Για $n = 1, 2, 3, \dots$ παίρνουμε

$$M(n) = a_0 + a_1 + M(n)\cdot a_0 + M(n-1)\, a_1 \Rightarrow$$

$$M(n) = 1 + (1-a) M(n) + a M(n-1) \Rightarrow$$

$$M(n) = \frac{1 + a M(n-1)}{a} = \dots = \frac{n+1-a}{a}$$

Άρα

$$M(n) = \frac{n+1-a}{a}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Για

$$M(t) = \frac{\lfloor t \rfloor + 1 - a}{a}, \quad t \geq 0$$

Σημείωση

Ομοίως, μπορούμε ν.δ.ο αν

$$P(X_n = 0) = 1-a$$

$$P(X_n = \delta) = a \quad , \delta > 0 \quad , 0 < a < 1$$

τότε

$$M(t) = \frac{\lfloor \frac{t}{\delta} \rfloor + 1 - a}{a} \quad , t \geq 0 .$$

Θεώρημα

$\{N(t), t\geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με $E[X_n] = \tau > 0$ $\Rightarrow$ $M(t) < \infty \quad , \forall\, t \geq 0$

Απόδειξη

Εφόσον $E[X_n] > 0$, ισχύει ότι $G(0) < 1$.

Άρα $\exists\ \delta > 0 : G(\delta) < 1$.

Ορίζουμε νέα ακολουθία ενδ. χρόνων $\{X_n^*, n \geq 1\}$ με

$$X_n^* = \begin{cases} 0 & , \text{αν } X_n < \delta \quad \text{μ.π } G(\delta) \\ \delta & , \text{αν } X_n \geq \delta \quad \text{μ.π } 1 - G(\delta) \end{cases}$$

Έστω $\{N^*(t), t \geq 0\}$ η ανανεωτική διαδικασία και $\{S_n^*, n \geq 1\}$ η ανανεωτική ακολουθία που προκύπτουν από την $\{X_n^*, n \geq 1\}$. Τότε

$$X_n^* \leq X_n \quad , n \geq 1 \Rightarrow$$

$$S_n^* \leq S_n \quad , n \geq 1 \Rightarrow$$

$$N^*(t) \geq N(t) \quad , t \geq 0 \Rightarrow$$

$$M^*(t) \geq M(t) \quad , t \geq 0$$

Από την προηγούμενη άσκηση έχουμε

$$M^*(t) = \frac{\lfloor \frac{t}{\delta} \rfloor + G(\delta)}{1 - G(\delta)} < \infty \quad , t \geq 0$$

Άρα ισχύει ότι $M(t) \leq M^*(t) < \infty \quad , t \geq 0 .$