2.3 Ανανεωτική συνάρτηση

Ορισμός (Ανανεωτική Συνάρτηση)

Έστω $\{N(t), t \geq 0\}$ μια ανανεωτική διαδικασία. Η

$$M(t) = E[N(t)], \quad t \geq 0$$

ονομάζεται **ανανεωτική συνάρτηση**. Ο LST της $M(t)$ συμβολίζεται με $\tilde{M}(s)$ και ισούται με

$$\tilde{M}(s) = \int_0^\infty e^{-st} \, dM(t).$$

Υπενθύμιση (Συμβολισμοί & βασικές σχέσεις)

$\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία

X_n = ενδιάμεσος χρόνος μεταξύ $(n-1)$-οστού & n-οστού γεγ.

G = σ.κ των X_n

S_k = χρόνος k-οστού γεγονότος

G_k = σ.κ του S_k

$$G_k(t) = G^{*(k)}(t) \Rightarrow \tilde{G}_k(s) = [\tilde{G}(s)]^k$$

$$p_k(t) = P(N(t) = k) = G_k(t) - G_{k+1}(t)$$

Θεώρημα ($G_k(t) \rightarrow M(t)$)

$\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία
με G σ.κ των $X_n, n \geq 1$
και G_k σ.κ των $S_k, k \geq 1$

$$\Rightarrow M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t), \quad t \geq 0$$

Απόδειξη

$$\begin{aligned} M(t) &= E[N(t)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(N(t) = k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \left[G_k(t) - G_{k+1}(t) \right] \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\, G_k(t) - \sum_{k=0}^{\infty} k\, G_{k+1}(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k\, G_k(t) - \sum_{k=0}^{\infty} (k+1-1)\, G_{k+1}(t)$$

$$= \cancel{\sum_{k=0}^{\infty} k\, G_k(t)} - \cancel{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\, G_{k+1}(t)} + \sum_{k=0}^{\infty} 1\, G_{k+1}(t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} G_{k+1}(t)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t)$$

$$M(t) = \sum_{k=1}^{\infty} G_k(t)$$

Θεώρημα (Ανανεωτική εξίσωση για $M(t)$)

$M(t) - G(t)$

$\{N(t), t \geq 0\}$ ανανεωτική διαδικασία με G σ.κ των $X_n, n \geq 1$ $\Big\} \Rightarrow M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-u)\, dG(u), \quad t \geq 0$,

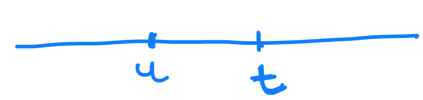
$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1 - \tilde{G}(s)}$$

Απόδειξη

Χρησιμοποιούμε ανανεωτικό επιχείρημα, δηλαδή δεσμεύουμε στον χρόνο του 1ου γεγονότος.

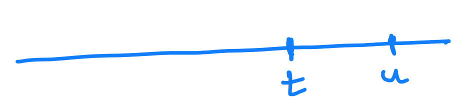
$$M(t) = E[N(t)] = \int_0^{\infty} E[N(t) \mid S_1 = u]\, d\,G(u)$$

Όμως, αν $u < t$



$$E[N(t) \mid S_1 = u] = 1 + E[N(t-u)]$$

και αν $u > t$



$$E[N(t) \mid S_1 = u] = 0.$$

$$= \int_0^t E[N(t)|S_1=u]\,dG(u) + \int_t^\infty E[N(t)|S_1=u]\,dG(u)$$

$$= \int_0^t [1+E[N(t-u)]]\,dG(u) + \int_t^\infty 0\,dG(u)$$

$$= \int_0^t dG(u) + \int_0^t E[N(t-u)]\,dG(u)$$

$$= G(t) + \int_0^t M(t-u)\,dG(u)$$

Άρα δείξαμε ότι

$$M(t) = G(t) + \int_0^t M(t-u)\,dG(u) \qquad (1)$$

Παίρνοντας LST έχουμε:

$$\tilde{M}(s) = \tilde{G}(s) + \tilde{M}(s)\cdot\tilde{G}(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{M}(s)[1-\tilde{G}(s)] = \tilde{G}(s) \Rightarrow$$

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \leftarrow$$

<u>Θεώρημα</u>

Η ανανεωτική συνάρτηση $M(t)$ χαρακτηρίζει πλήρως την ανανεωτική διαδικασία $\{N(t), t\geq 0\}$.

<u>Απόδειξη</u>

Γνωρίζουμε ότι η ανανεωτική διαδικασία χαρακτηρίζεται πλήρως από τη σ.κ G των X_n. Όμως

$$\tilde{M}(s) = \frac{\tilde{G}(s)}{1-\tilde{G}(s)} \Rightarrow \tilde{G}(s) = \frac{\tilde{M}(s)}{1+\tilde{M}(s)}$$, οπότε

η $\{N(t), t\geq 0\}$ χαρακτηρίζεται από την $M(t)$, $t\geq 0$.