Μετασχηματισμοί Laplace-Stieltjes

Ορισμός (LST μιας τ.μ. X)

Εστω $X \geq 0$ με σ.κ $F_X(x)$. Ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της X (ή της σ.κ $F_X(x)$) ορίζεται ως

$$\tilde{F}_X(s) = E[e^{-sX}] = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF_X(x).$$

Ιδιότητες

1. Η τ.μ X και η σ.κ $F_X(x)$ χαρακτηρίζονται πλήρως από τον LST $\tilde{F}_X(s)$.
2. Αν X_1 και X_2 ανεξάρτητες τ.μ, τότε

$$\tilde{F}_{X_1+X_2}(s) = \tilde{F}_{X_1}(s) \cdot \tilde{F}_{X_2}(s).$$

Ορισμός (LST μιας συνάρτησης)

Εστω $F : [0,\infty) \to (-\infty,\infty)$. Ο μετασχηματισμός Laplace-Stieltjes της F ορίζεται ως

$$\tilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, dF(x).$$

Ιδιότητες

Εστω $F : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ και $G : [0,\infty) \to \mathbb{R}$, τότε

1. αν $F(x) = 1$, τότε $\tilde{F}(s) = 1$.
2. αν $F(x) = x$, τότε $\tilde{F}(s) = \frac{1}{s}$
3. αν $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, τότε $\tilde{F}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}$
4. αν $H(x) = a \cdot F(x) + b\, G(x)$, $a, b \geq 0$, τότε $\tilde{H}(s) = a \cdot \tilde{F}(s) + b\, \tilde{G}(s)$.
5. Αν $H(t) = \int_0^t F(t-u)\, dG(u)$, $t \geq 0$, τότε $\tilde{H}(s) = \tilde{F}(s) \cdot \tilde{G}(s)$.