Το Σχ 3(α) αποκλείεται λόγω διατομής ·
Το Σχ 3(β) —"— ——"—— μοναδικότητος (αντιστρέφουμε τον χρόνο).

(b) • $\sigma \in J$ ευρίσκεται σε κλειστή τροχιά γ αν και μόνο αν $F(\sigma)=\sigma$

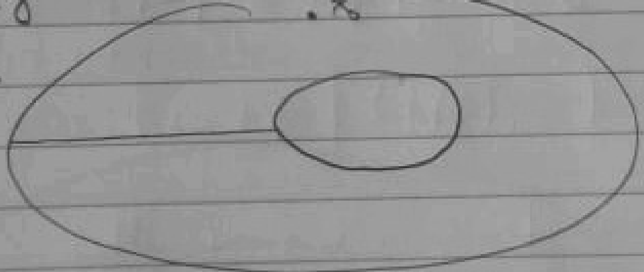
Έστω $\sigma \in \gamma$. Γνωρίζουμε από την Ασ2 ότι η γ μπορεί να τέμνει την διατομή J το πολύ σε ένα σημείο. Αναγκαστικά λοιπόν την τέμνει μόνο στο σ. Έπεται ότι $F(\sigma)=\sigma$

Αντίστροφα αν $F(\sigma)=\sigma \Leftrightarrow \phi(\tau(\sigma),\sigma) = \sigma = \phi(0,\sigma)$, και $\tau(\sigma)\neq 0 \Rightarrow t \to \phi(t,\sigma)$ περιοδική.

(c) Έστω $\omega(x_0)$ οριακό σύνολο, $\omega(x_0) \subset W$.

• $\omega(x_0)=\gamma$ $\cdot x_0$

γ περιοδική.



Γνωρίζουμε ότι αν $y \in \omega(x_0) \Rightarrow$ η τροχιά του y τέμνει διατομή το πολύ σε ένα σημείο (Πρόταση 7 σ. 128). Εξ' υποθέσεως $\exists\, t>0$ τ.ω. $\phi(t,y) \in J$ και επίσης $s<0$ τ.ω. $\phi(s,y)\in J$

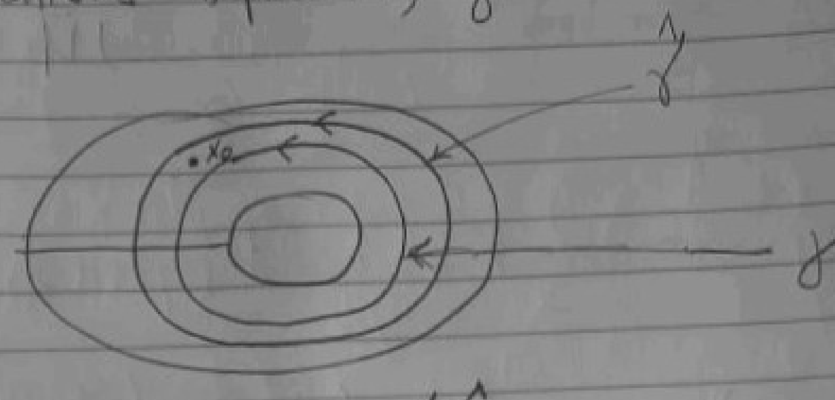
Έπεται ότι $\phi(s,y)=\phi(t,y)$, $s \neq t$

$\Rightarrow$ η τροχιά γ του y περιοδική. Έχουμε $\gamma \subset \omega(x_0)$.
(από αναλλοίωτο του $\omega(x_0)$)

Αν $x_0 \in \gamma$ τότε $\omega(x_0)=\gamma$.

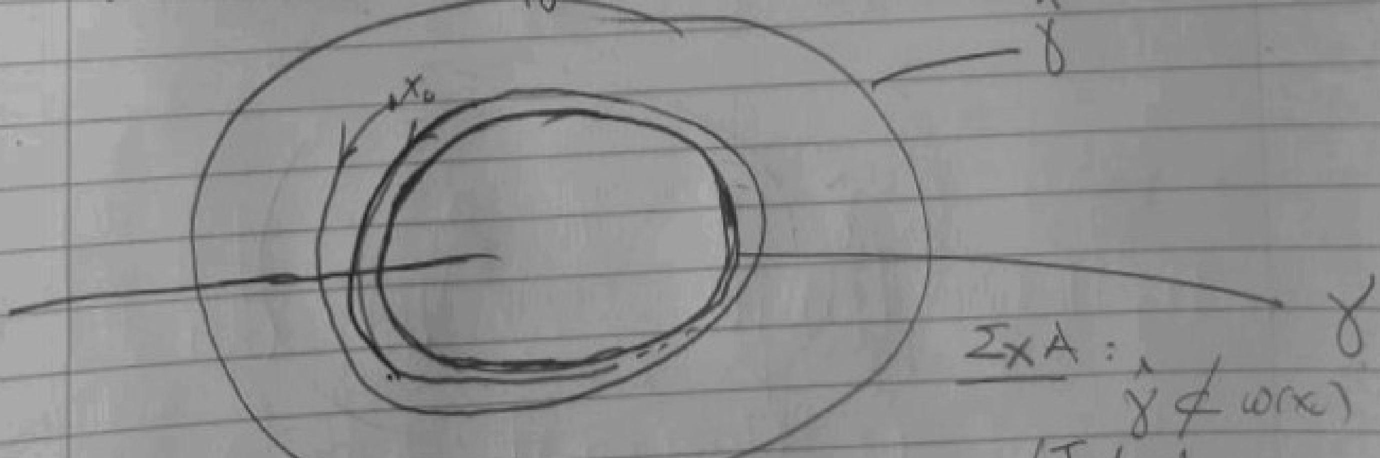
Έστω $x_0 \notin \gamma$, και έστω $\gamma \subsetneq \omega(x_0)$. Θα οδηγηθούμε σε άτοπο. Θα υποδείξουμε ότι το x_0 δεν ανήκει σε κάποια περιοδική τροχιά.

Επιλέγουμε $\xi \in \omega(x_0)/\gamma$. Από το προηγούμενο επιχείρημα για το y προκύπτει ότι η τροχιά του ξ είναι επίσης περιοδική, $\hat{\gamma}$



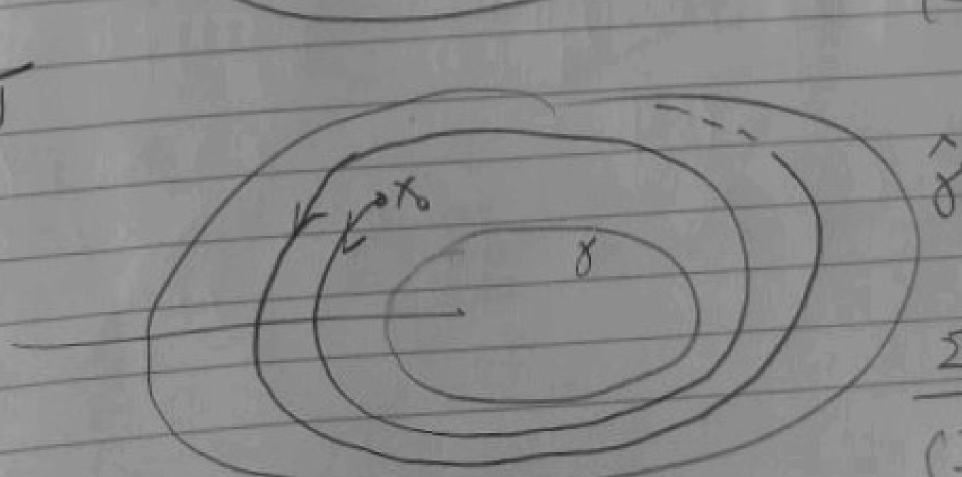
Εξ' υποθέσεως $x_0 \notin \hat{\gamma}$.

Θεωρούμε την τροχιά του x_0. Γνωρίζουμε ότι $\exists\, \tau(x_0)$ τ.ω. $\phi(\tau(x_0), x_0) \in J$. Εφόσον το x_0 δεν ανήκει σε περιοδική τροχιά έχουμε τις εξής δύο δυνατότητες λόγω του Λήμματος της μονοτονίας:



ΣχΑ: $\hat{\gamma} \not\subset \omega(x_0)$ (Jordan)

β) ΣχΓ σ. 149



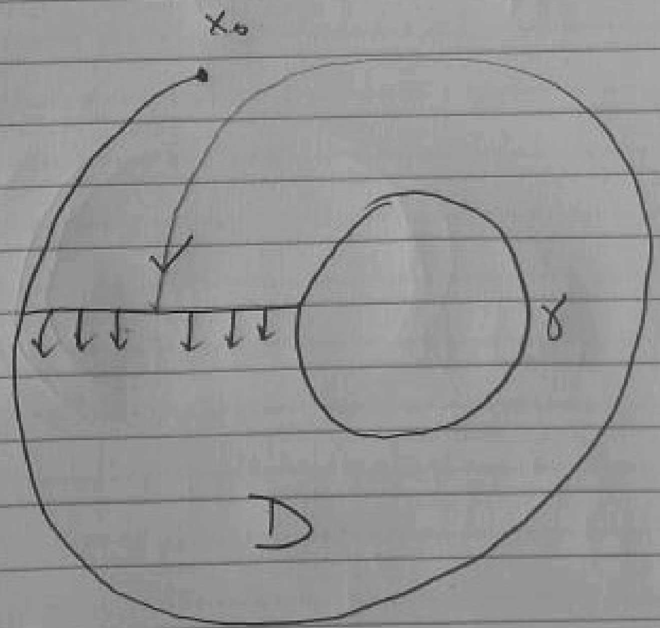
ΣχΒ: $\gamma \subset \omega(x_0)$ (Jordan) □

<u>Σημ.</u>

Η υπόθεση της <u>ολικής διατομής</u>, δηλ. ότι $\forall\, x \in W\ \exists\, t>0$ τ.ω. $\phi(t,x) \in J$, και $s<0$ τ.ω. $\phi(s,x) \in J$, απλοποιεί την απόδειξη του Poincaré-Bendixson στο ότι δεν χρειάζεται

(i) θεώρημα συνεχούς εξάρτησης

(ii) Λήμμα Fibration.



<u>Σχ</u> Γ : D αναλλοίωτο