 (βλ. τμήμα 10)

Γ. Εφαρμογή του Poincaré - Bendixson

Ορ

γ, κλειστή απλή καμπύλη, λέγεται Οριακός Κύκλος αν $\gamma \subset \omega(x_0)$ (ή $\gamma \subset \alpha(x_0)$) για κάποιο $x_0 \notin \gamma$. $\square$

Υπενθυμίζουμε το Θεώρημα 3 και τα βήματα της απόδειξης.

Δείξαμε, κάτω από την υπόθεση,

$$\omega(x_0) \cap \{x \mid f(x) = 0\} = \emptyset ,$$

ότι $\forall\ y \in \omega(x_0)$ η $\{\varphi(t, y) \mid t \in \mathbb{R}\} = \gamma$

είναι περιοδική ($\equiv$ απλή κλειστή καμπύλη)

και συνεπώς από την ιδιότητα του αναλλοίωτου του $\omega(x_0)$

(1) $$\gamma \subset \omega(x_0)$$

Τώρα αν $x_0 \in \gamma \implies \varphi(t, x_0) \in \gamma,\ \forall t$

απ' όπου βέβαια προκύπτει ότι $\omega(x_0) \subset \gamma$

και συνεπώς μέσω του (1)

(2) $$\gamma = \omega(x_0) ,$$ (βλ. σ. 140)

και θα τελείωνε η Απόδειξη, και δεν θα χρειαζόταν η Επωδός στην σελ. 132

Θεωρησαμε λοιπον υπορρητα οτι

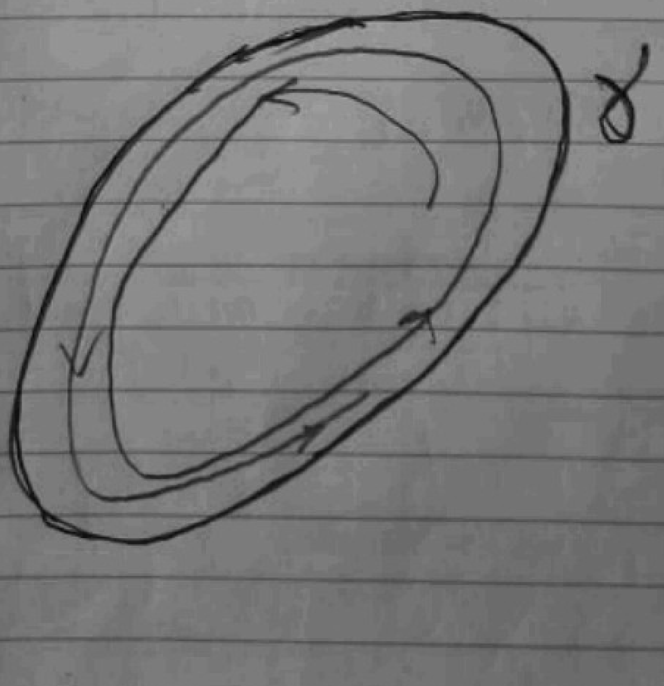
$$x_0 \notin \gamma,$$

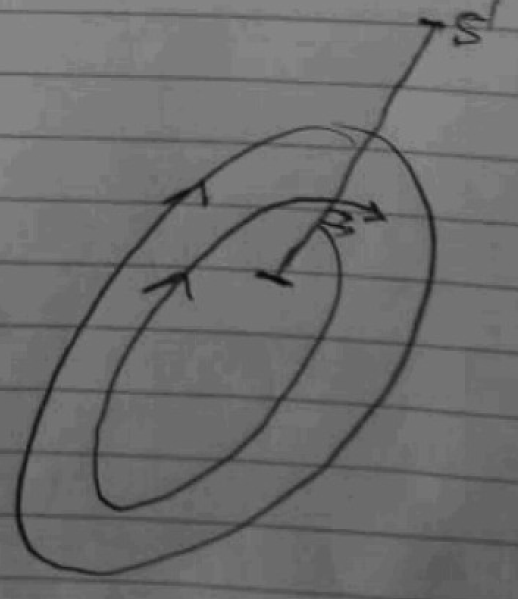
και δειξαμε οτι

(3) $$\lim_{t\to\infty} d(\varphi(t,x_0),\gamma)=0 .$$

Μαλιστα δειξαμε μονοτονικη συγκλιση σε τοπικες διατομες κεντραρισμενες σε αυθαιρετο $z\in\gamma$.

Δειξαμε λοιπον οτι σε αυτη την περιπτωση η γ ειναι <u>οριακος κυκλος</u> και οτι εχει μια πληρη ασυμπτωτικη ευσταθεια:





Πρόταση 1

Έστω γ οριακός κύκλος, $\gamma = \omega(x_0)$ $(x_0 \notin \gamma)$. Τότε $\exists$ ανοικτή περιοχή $V \ni x_0$, τ.ω.

$$\gamma = \omega(y) \quad \forall\, y \in V.$$

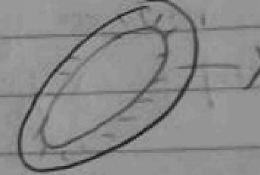
Δηλαδή το σύνολο

$$\{x_0 \mid \gamma = \omega(x_0),\ x_0 \notin \gamma\}$$

είναι ανοικτό.

Απόδειξη

Εδώ θεωρούμε το πλαίσιο της απόδειξης του Poincaré-Bendixson στο σημείο της (3):



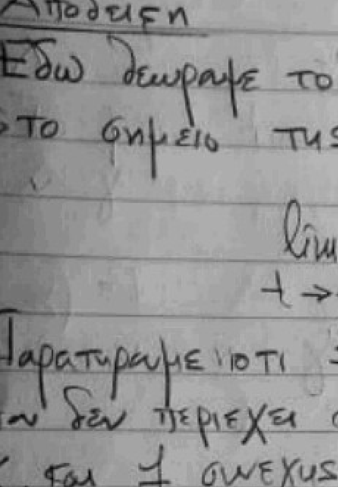
(3) $$\lim_{t \to +\infty} d(\varphi(t,x_0), \gamma) = 0$$

Παρατηρούμε ότι $\exists$ περιοχή της γ, $\{x \mid d(x,\gamma) < \sigma\} =: N$ που δεν περιέχει σημεία ισορροπίας (διότι $f \neq 0$ στην γ, και f συνεχής και γ συμπαγές σύνολο).

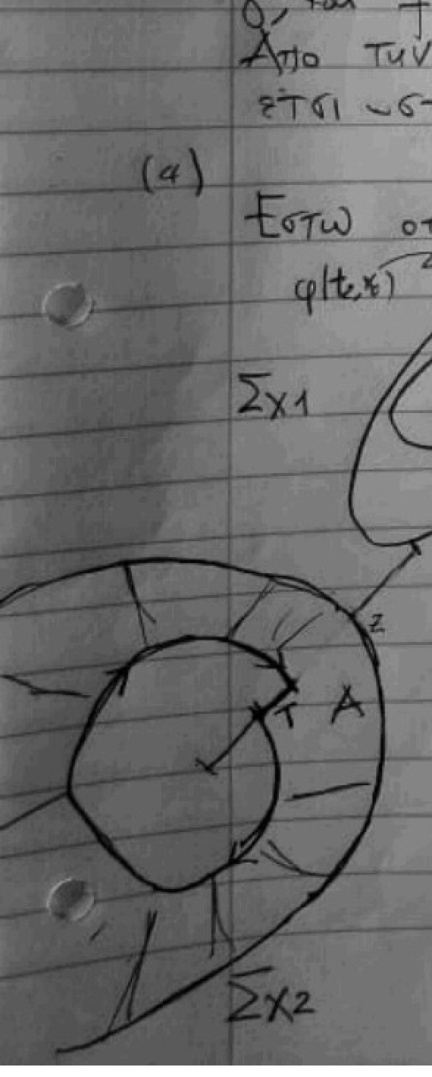
Από την (3) συμπεραίνουμε ότι $\exists\, t_1$ αρκετά μεγάλο έτσι ώστε

(4) $$\varphi(t,x_0) \in N, \quad t \geq t_1.$$

Έστω ότι



$\varphi(t_1,x_0) \in S$, τοπική διατομή στο z και $\varphi(t_2,x_0) \in S$, η επόμενη τομή με την S. Έστω $T = [\varphi(t_1,x_0), \varphi(t_2,x_0)]$, το διάστημα επί της S



Ορισμός Χωρίου A (βλ Σχ2)

Το ανοικτό σύνολο που φράσσεται από την γ, το T, και το τμήμα της τροχιάς του x_0

$$\{\varphi(t,x_0) \mid t_1 \leq t \leq t_2\}.$$

(138) (Βελτιωμενο)

Παρατηρησεις

(1) Το A ειναι θετικα αναλλοιωτο. Πραγματι μια τροχια $\{\varphi(t,x_0) \mid t_1 \le t \le t_2\}$, δεν μπορει να τμησει το τμημα της η την γ, και δεν μπορει να εξελθει με τα T διοτι

(2) Το $A \subset N$, αρα δεν περιεχει σημεια ισορροπιας.

(3) Εστω $\varepsilon>0$, φιξαρισμενο. Εχουμε οτι $\varphi(t_2+\varepsilon, x_0) \in A$. Κανοντας χρηση της συνεχειας της $x \to \varphi(t,x)$, $\exists\, \delta>0$ τ.ω. για $|y-x_0|<\delta \Rightarrow \varphi(t_2+\varepsilon, y) \in A$. (διοτι το A ανοικτο).

Απο (1) $\Rightarrow \varphi(t,y) \in A$, $t \ge t_2+\varepsilon$. Κατα συνεπεια $\omega(y) \neq \emptyset$ (διοτι $\bar{A}$ συμπαγες).

Απο (2) μεσω Poincaré - Bendixson

$$\omega(y) = \hat{\gamma}$$

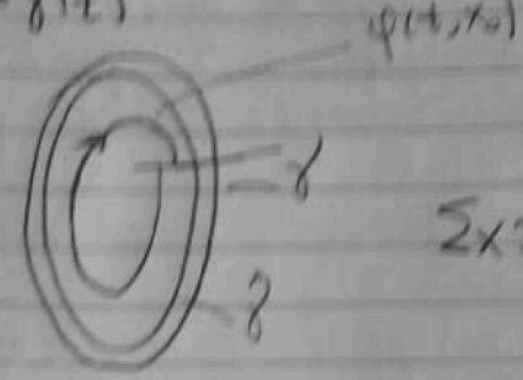
$\hat{\gamma}$ περιοδικη τροχια, $\hat{\gamma} \subset \bar{A}$.

Θα δειξουμε οτι $\hat{\gamma} = \gamma$, που αποδεικνυει την Προταση 1. Προφανως η $\hat{\gamma}$ δεν μπορει να τεμνει την γ, αρα $\hat{\gamma} \subset A$. Με εις ατοπον απαγωγη: Εστω οτι $\exists\, \hat{\gamma}$ περιοδικη, $\hat{\gamma} \subset A$. Επιλεγοντας το $\delta>0$ στον ορισμο της N αρκετα μικρο μπορουμε να εχουμε ηδη κατοχυρωσει, μεσω της συνεχους εξαρτησης ως προς αρχικες συνθηκες σε συμπαγη διαστηματα του t, οτι

(129) συμπλήρωμα

$|\gamma(t)-\hat{\gamma}(t)|<\varepsilon'$, $0\le t\le T$,

$\gamma(t+T)=\gamma(t)$



Σχ3

Διαγραμματικά η $\hat{\gamma}$ θα τέμνει κάθε διατομή S της γ σε ένα σημείο ακριβώς (περιοδικότητα + Λήμμα 5).

Όμως $\hat{\gamma}\subset\Lambda$. Προκύπτει (βλ Σχ3) ότι η $\hat{\gamma}$ θα "παγιδεύσει" την $\varphi(t,x_0)$ στο εσωτερικό της, κάτι που αντιφάσκει στην (3). Άτοπο.

Συνεπώς $\omega(y)=\gamma$.

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Σχόλιο

Το Theorem 1, p 251, Hirsch-Smale, λέει:

Thm: A nonempty compact set K that is positively or negatively invariant contains either a limit cycle or an equilibrium.

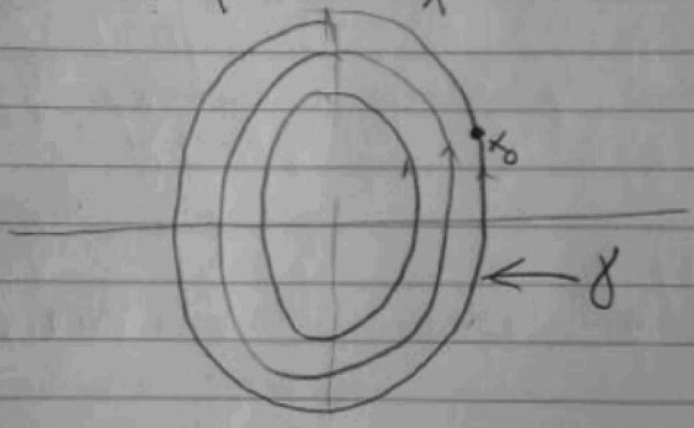
Το Θεώρημα είναι ανακριβές όπως θα δούμε. Θα έπρεπε να λέει "contains a periodic orbit (cycle) or an equilibrium.

Θυμηθαμε ότι μια κλειστή τροχιά γ είναι οριακός κύκλος αν $\exists\, x_0$ τ.ω. $x_0 \notin \gamma$ και επίσης $\gamma \subset \omega(x_0)$.

Θεωρούμε το γραμμικό σύστημα

$$x' = Ax, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

που είναι κέντρο και έχει το επίπεδο φάσεων



Σχ4

Προφανώς καμμία κλειστή τροχιά δεν είναι οριακός κύκλος διότι $\forall\, x_0 \in \gamma$ ισχύει

$$\omega(x_0) = \gamma$$

Πράγματι δοθέντος x_0 $\exists$ περιοδική τροχιά γ, $x_0 \in \gamma$. Είναι εύκολο τώρα να δείξαμε ότι $\omega(x_0) = \gamma$

<u>Απόδειξη</u>: (1) Λόγω περιοδικότητος $\exists\, T$

$$\{\varphi(t, x_0) \mid t \in [0, T]\} = \gamma \quad ; \forall\, x_0 \in \gamma.$$

(2) Έστω $\xi \in \gamma$. $\exists\, \tau$ τ.ω. $\varphi(\tau, x_0) = \xi$ (μέσω (1))

(3) Λόγω περιοδικότητος $\varphi(\tau + nT, x_0) = \xi$, $n = 1, 2, \ldots$

Επεται οτι

$$\xi \in \omega(x_0)$$

$$\Rightarrow \quad \gamma = \omega(x_0) \quad , \; x_0 \in \gamma.$$

□

Εχουμε λοιπον ενα απλο αντιπαραδειγμα στο Th1 των Hirsch-Smale θεωρωντας ως K τον δακτυλιο στο Σχ 4 μεταξυ δυο περιοδικων λυσεων.

Το ακριβες αποτελεσμα ειναι το

<u>Θεωρημα 2</u>

Ενα μη κενο, συμπαγες, θετικα (αρνητικα) αναλλοιωτο συνολο

i) περιεχει σημειο ισορροπιας

ii) περιεχει οριακο κυκλο

iii) συνισταται απο ενωση περιοδικων τροχιων.

<u>Αποδειξη</u>

Εστω οτι το K δεν περιεχει σημειο ισορροπιας. Τοτε $\forall\, x_0 \in K$ το $\omega(x_0) = \gamma$, γ περιοδικη τροχια. Αν $\exists\, x_0$ τ.ω. $x_0 \notin \omega(x_0) = \gamma$, τοτε το K περιεχει οριακο κυκλο.

Τελος αν $\nexists$ τετοιο x_0, δηλαδη $x_0 \in \omega(x_0) = \gamma$ τοτε συνισταται απο περιοδικες τροχιες.

□

142

βελτιωμένο

Θεώρημα 3

Έστω γ περιοδική τροχιά που εγκλείει το ανοικτό σύνολο U. Τότε το U αναγκαστικά περιέχει σημείο ισορροπίας.

Απόδειξη

Πορευόμαστε με εις άτοπον απαγωγή. Έστω ότι $\nexists$ σημείο ισορροπίας στο U.

(A) Πρώτα θα αποδείξουμε ότι αν $x_n \to x \in U$, και $x_n \in \gamma_n$, γ_n κλειστή (περιοδική) τροχιά, τότε $x \in$ κλειστή τροχιά.
Πάμε με άτοπο. Έστω όχι.
Από Poincaré - Bendixson
$\omega(x) = \hat{\gamma}$, $x \notin \hat{\gamma}$
$\Rightarrow \hat{\gamma}$ οριακός κύκλος.
Από την Πρόταση 1 έπεται ότι $\omega(x_n) = \hat{\gamma}$, $n \geq N$
Άρα $\gamma_n = \hat{\gamma}$, $n \geq N$.
Συνεπώς $x_n \in \hat{\gamma}$, $n \geq N$
$\Rightarrow x \in \hat{\gamma}$, άτοπο.

(B) Θεωρούμε την οικογένεια των κλειστών τροχιών $\{\gamma_\alpha\}$, $\gamma_\alpha \subset U$. Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $\{\gamma_\alpha\} \neq \emptyset$.
Με άτοπο. Επιλέγουμε $x_0 \in U$, έχουμε από Poincaré-Bendixson αναγκαστικά ότι

$$\omega(x_0) = \alpha(x_0) = \gamma,$$

και η γ είναι οριακός κύκλος,
Αυτό όμως συγκρούεται με το Λήμμα 5 της μονοτονίας διότι $\exists$ ακολουθίες $\{t_n\} \to +\infty$, $\{s_n\} \to -\infty$

με $\varphi(t_n, x_0)$, $\varphi(s_n, x_0)$ σε τοπική διατομή,

$\varphi(t_n, x_0) \longrightarrow z$, $\varphi(s_n, x_0) \longrightarrow z$

αδύνατον από το Λήμμα 5.

Καταλήξαμε στο ότι $\{\gamma_\alpha\} \neq \emptyset$. Θεωρούμε τα εμβαδά των U_α που εγκλείουν οι τροχιές γ_α,

$|U_\alpha| = E_\alpha$, και θεωρούμε το

$$\inf_\alpha E_\alpha =: E.$$

Επιλέγουμε $\{\gamma_{\alpha_n}\}$, $\{E_{\alpha_n}\}$, και $x_n \in \gamma_{\alpha_n}$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας $x_n \longrightarrow x$. Από το (A) προκύπτει ότι

$x \in \tilde{\gamma}$, $\tilde{\gamma}$ εγκλείει U, $|U| = E$

(Γ) Έχουμε δύο ενδεχόμενα.

(i) $\tilde{\gamma} = \{p\}$, μονοσύνολο.

$\Rightarrow$ p σημείο ισορροπίας, άτοπο εξ' υποθέσεως

(ii) $\tilde{\gamma}$ μη τετριμμένη περιοδική.

Εδώ εφαρμόζουμε το ίδιο επιχείρημα με αυτό για την απόδειξη του $\{\gamma_\alpha\} \neq \emptyset$, με $\tilde{\gamma}$ στην θέση της γ. Η απόδειξη είναι πλήρης.

$\square$

Σχολιο επι του Λημματος 5 (Μονοτονιας)

Στη διατυπωση του Λημματος πρεπει να διευκρινισουμε οτι τα y_0, y_1, y_2 ειναι διακριτα, δηλαδη 3 διαφορετικα σημεια. Στην αποδειξη (αυτη ειναι μια υπορρητη υποθεση.