Κωνσταντίνος Ντέτσικας , Α.Μ : 182001

Άσκηση 10.28 [AK]: Έστω το $p(x), x \in \mathbb{R}$ πολυώνυμο περιττού βαθμού , με θετικό συντελεστή στον όρο μεγαλύτερης δύναμης. Να αποδειχθεί ότι όλες οι λύσεις της

$$x'' + p(x) = 0$$

είναι φραγμένες στο $(-\infty, +\infty)$.

Λύση

Έστω $y = x'$. Τότε $y' = x'' = -p(x)$ και έτσι η δοσμένη διαφορική εξίσωση είναι ισοδύναμη με το σύστημα

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = -p(x) \end{cases} \tag{1}$$

Θέτουμε $E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \int_0^x p(s)ds$, που αντιπροσωπεύει κατά κάποιο τρόπο την μηχανική ενέργεια(κινητική συν τη δυναμική). Χρησιμοποιώντας την (1) έχουμε

$$\dot{E}(x, y) = \frac{\partial E}{\partial x}x' + \frac{\partial E}{\partial y}y' = p(x)y - p(x)y = 0$$

Αυτό σημαίνει πως οι λύσεις του συστήματος (1) βρίσκονται στις καμπύλες στάθμης της E, $E(x, y) = c$(σταθερά).

Από την υπόθεση είναι $p(x) = ax^{2n+1} + O(x^{2n})$ (όπου $a > 0$), οπότε

$$\int_0^x p(s)ds = \frac{a}{2n+2}x^{2n+2} + O(x^{2n+1}) \tag{2}$$

Έστω τώρα (x, y) λύση του συστήματος (1) με $x \to \pm\infty$ καθώς $t \to \pm\infty$. Τότε από την (2) έπεται ότι $\int_0^x p(s)ds \to +\infty$ άρα $E \to +\infty$. Αυτό όμως είναι άτοπο καθώς όπως είδαμε η ενέργεια διατηρείται κατά μήκος των λύσεων της (1) , δηλαδή $E = c$. Κατά συνέπεια δεν υπάρχουν μη φραγμένες λύσεις για την αρχική διαφορική εξίσωση.