Dr. Nicholas Alikakos
Professor of Mathematics

Κεφάλαιο 10 — Λύσεις

$x(0)=x_0,\ y(0)=0 \Rightarrow y(t)=0$ αντικαθιστώντας στην $1^{η} \Rightarrow x'=-\varepsilon x$

10.11 (Ινοποίηση — 2 χρόνες)

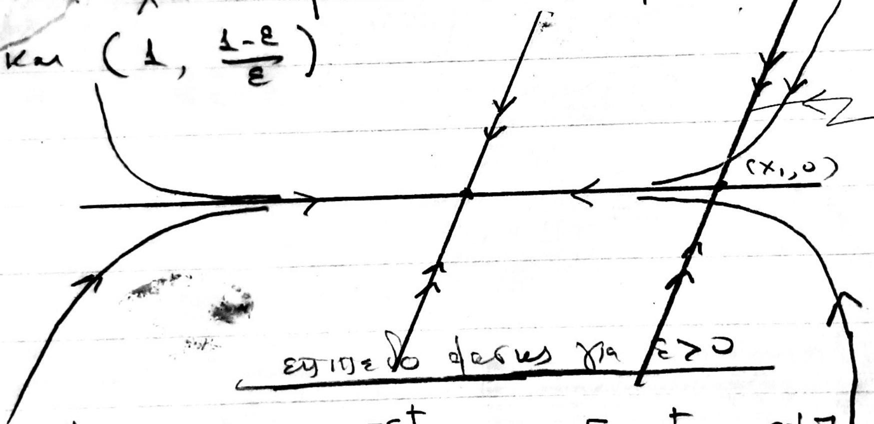
(α). Θέτω $\bar{f}(x,y)=\begin{pmatrix}-\varepsilon(x+y)\\ -y\end{pmatrix}$. Παρατηρούμε ότι το διανυσματικό πεδίο $\bar{f}(0,y)=\begin{pmatrix}-\varepsilon x\\ 0\end{pmatrix}$ είναι εφαπτόμενο στο M. Έπεται ότι το M είναι αναλλοίωτο (β) 10.4(2), και η δυναμική στο M καθορίζεται από το $\bar{f}(0,y)$.

(β). $(\Sigma_0)=\begin{cases}x'=0\\ y'=-y\end{cases}$

Επίπεδο φάσης για $\varepsilon=0$

(fibration) (ινοποίηση)

(γ),(δ). Το (Σ_ε) έχει ιδιοτιμές $-\varepsilon, -1$, με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $(1,0)$ και $\left(1, \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right)$



Επίπεδο φάσης για $\varepsilon>0$

ίνα

• M σημεία ισορροπίας για $\varepsilon=0$

M βραδεία πολλαπλότητα για $\varepsilon>0$, γιατί (Σ)

$y(t)=y_2e^{-t},\ x(t)=x_2e^{-\varepsilon t}+\frac{\varepsilon y_2}{1-\varepsilon}\left[e^{-t}-e^{-\varepsilon t}\right]$, αντιστοιχεί στο (x_2,y_2)

Κατά συνέπεια η απόσταση των λύσεων δίνεται από την

$\left(\left|x_1e^{-\varepsilon t}-\left\{x_2e^{-\varepsilon t}+\frac{\varepsilon y_2}{1-\varepsilon}(e^{-t}-e^{-\varepsilon t})\right\}\right|^2+\left[y_2e^{-t}\right]^2\right)^{1/2}$. Επιλέγουμε τα x_2, y_2 ώστε να εξαφανίζεται το πιο αργό μέρος της κίνησης:

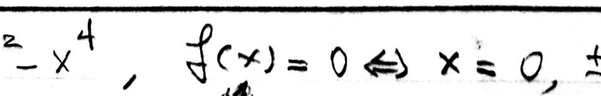
$$x_1-x_2+\frac{\varepsilon y_2}{1-\varepsilon}=0 \iff x_2=x_1+\frac{\varepsilon y_2}{1-\varepsilon}.$$

Παρατηρούμε ότι το νήμα είναι παράλληλο της ιδιοκατεύθυνσης της 1.

10.10 $H(x_1(t),x_2(t))=H(x_1(0),x_2(0)) \iff \frac{1}{2}(x'(t))^2+V(x(t))=\frac{1}{2}(x'(0))^2+V(x(0))$

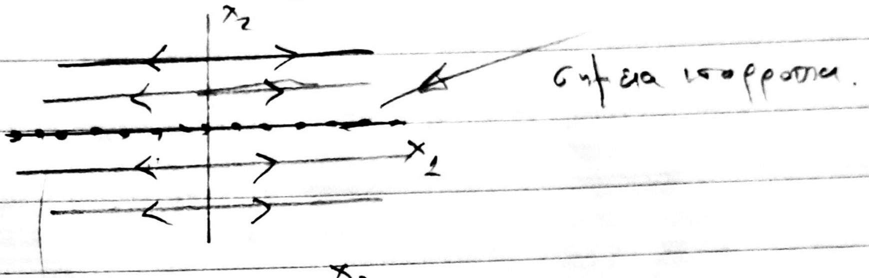
Παραγωγίζοντας, $x'(t)\left[x''(t)-f(x(t))\right]=0$.

10.21 $V(x)=2x^2-x^4,\ f(x)=0 \iff x=0, \pm 1$

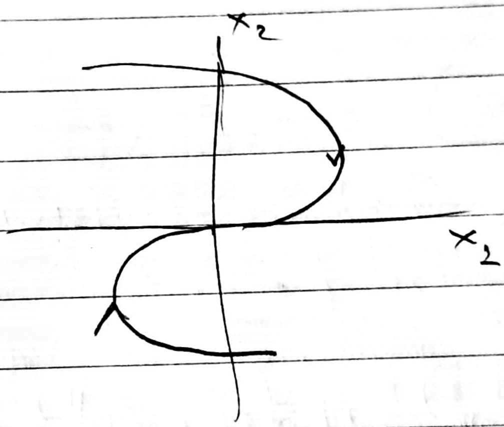


10.1 Επιπεδα φασης των $x' = Ax$ για

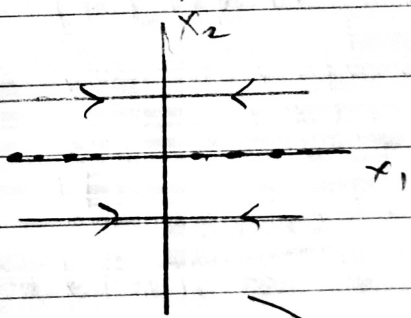
(a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$



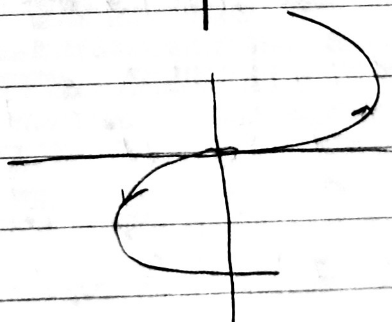
(b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$



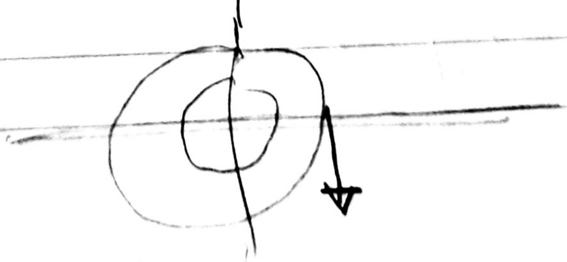
(γ) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$



(δ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$



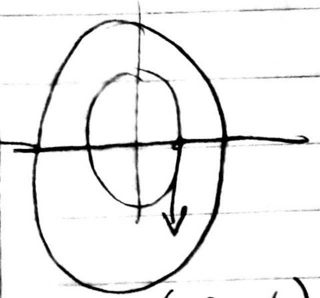
(ε) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$



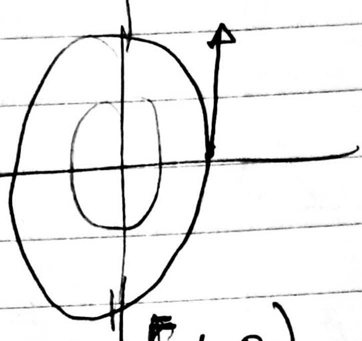
$x' = Ax$, όπου $A = \begin{bmatrix} 1+k & -2 \\ 2 & 3\mu \end{bmatrix}$

$|A-\lambda I| = \lambda^2 + (-1-k-3\mu)\lambda + 3\mu + 3k\mu + 4 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1+k+3\mu \pm \sqrt{\Delta}}{2}$

Κατά συνέπεια οι ιδιοτιμές είναι φανταστικές εάν $1+k+3\mu = 0$, και $\Delta<0$. Έχουμε $\Delta = (1+k+3\mu)^2 - 4(2\mu+3k\mu+4) = 36\mu^2 - 16$. $\Delta<0 \Leftrightarrow \mu \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Συμπέρασμα: Οι ιδιοτιμές φανταστικές $\Leftrightarrow k \in (-3,1), \mu \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$



$k \in (-3,-1)$



$k \in [-1, 0)$.

10.3

(α) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = -1, \ \lambda_2 = -2$ (Τριγωνική μορφή)

Έπεται ότι το $(0,0)$ είναι ολικά ασυμπτωτικά ευσταθές, άρα για κάθε $u \in \mathbb{R}^2$, $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$

(β) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2$. Η μόνη επιλογή είναι

$u = 0$

(γ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$. Το $(0,0)$ είναι

σαγματικό σημείο, με $\lambda_1 > 0$ και $\lambda_2 < 0$.

Ο ιδιόχωρος που αντιστοιχεί στη λ_2 είναι

$E = \{ \lambda u \mid u = \begin{pmatrix} \frac{1-\sqrt{17}}{4} \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \}$ (ευσταθής πολλαπλότητα).

Για $u \in E$ έχουμε ότι $\lim_{t\to+\infty} x(t) = 0$.

$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i$. Κατα συνεπεια εχουμε κεντρο και το ανοιχ. των u. Ετσι ωστε $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$ ειναι το $\{(0,0)\}$.

(10.4) $x' = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 8 & 0 \end{bmatrix} x \Leftrightarrow \begin{cases} x_1' = -2x_2 \\ x_2' = 8x_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} x_1' x_1 = -x_1 x_2 \\ \frac{1}{8} x_2' x_2 = x_1 x_2 \end{cases}$

$\therefore \quad \frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{16} = C$

(10.5) (α) $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow$ Ευσταθης κομβος $(\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2)$

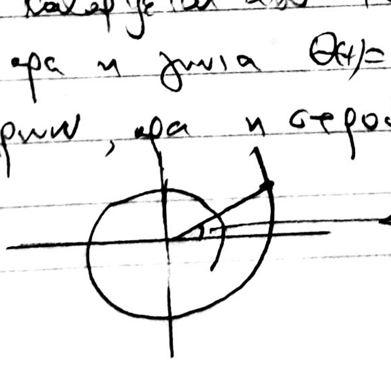
(β) $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$ ασταθης κομβος $(\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2)$

(10.8) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. Εαν $b = 0$ τοτε ο πινακας ειναι κατω τριγωνικος, και κατα συνεπεια a, d ειναι οι ιδιοτιμες. Αρα εξ' υποθεσεως $b \neq 0$ ειναι αναγκαια συνθηκη για μη πραγματικες ιδιοτιμες. Ο A εχει μη πραγματικες ιδιοτιμες, αρα τροχιες ελικοειδεις ή ελλειψεις. Δηλαδη $(\mathrm{tr}A)^2 - 4\det A < 0 \Leftrightarrow (a+d)^2 - 4(ad-bc) < 0 \Leftrightarrow$
$(d-a)^2 + 4bc < 0$. Ακολουθουμε την υποδειξη:

$$\frac{d}{dt} \arctan\left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right) = \frac{1}{1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \frac{x_2' x_1 - x_2 x_1'}{x_1^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2} \frac{(cx_1+dx_2)x_1 - x_2(ax_1+bx_2)}{x_1^2}$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}\left[c + (d-a)(\xi) - b(\xi)^2\right], \text{ οπου } \xi = \frac{x_2}{x_1}$$

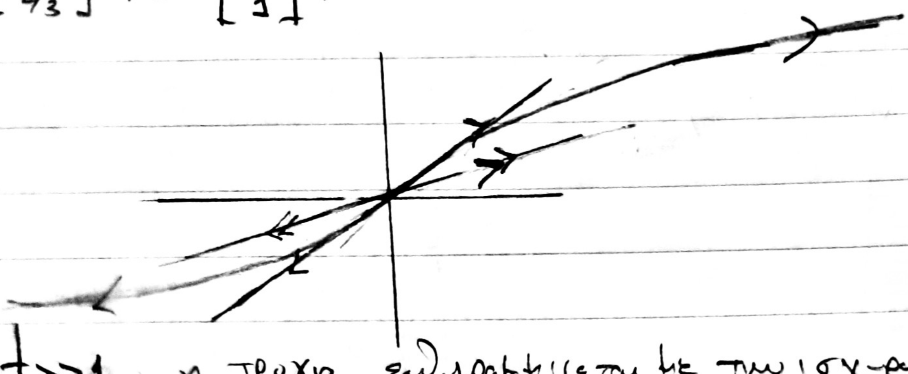
Παρατηρουμε οτι $\Delta = (d-a)^2 + 4bc < 0$, αρα το προσημο του τριωνυμου καθοριζεται απο το $-b$: Εαν $b > 0$ το προσημο ειναι αρνητικο, αρα η γωνια $\theta(t) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x_2(t)}{x_1(t)}\right)$ ειναι φθινουσα συναρτηση του χρονου, αρα η στροφη ειναι προς τα δεξια.



$\theta(t)$

(?.9) $A = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

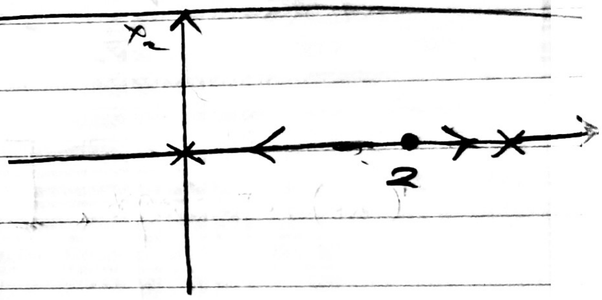
Υπολογίσαμε $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 3$ με αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα $\begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.



Για $t \gg 1$ η τροχιά εφάπτεται με την ισχυρότερη ιδιοκατεύθυνση: $\begin{bmatrix} 1 \\ 4/3 \end{bmatrix}$. Κατά συνέπεια $\lim_{t \to \infty} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} = \frac{2}{3}$.

(10.13) $x'' = \frac{G}{(3-x)^2} - \frac{4G}{x^2} \iff$

check $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \frac{G}{(3-x_1)^2} - \frac{4G}{x_1^2} \end{cases} =: f(x_1, x_2)$



Το μόνο σημείο ισορροπίας με $x_1 \in (0,3)$ είναι το $(2,0)$.

Παρατηρούμε ότι η γραμμικοποίηση δεν δίνει πληροφορία:

$$Df(2,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -G & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathrm{Re}\,\lambda = 0.$$

Έχουμε $f(x_1, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{G}{(3-x_1)^2} - \frac{4G}{x_1^2} \end{pmatrix}$. Κατά συνέπεια ο x_1-άξονας είναι αναλλοίωτος. Επίσης το διανυσματικό πεδίο στο x_1-άξονα για $x_1 \in (0,3)$ είναι όπως στο σχήμα, απ' όπου προκύπτει ότι το $(2,0)$ είναι ασταθές.