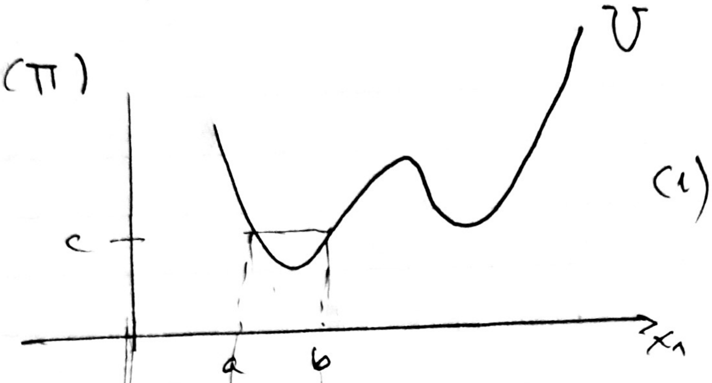
Διαλεξη 26/3/20

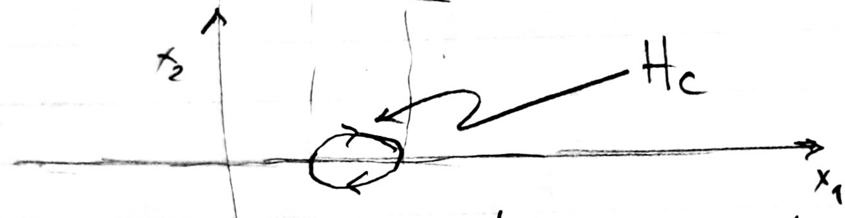
Περιοδικες – Ομοκλινεις – Ετεροκλινεις

1) Περιοδικες (Π)



$$(1)\begin{cases} x_1' = x_2 = \dfrac{\partial H}{\partial x_2}(x_1,x_2) \\ x_2' = f(x_1) = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1}(x_1,x_2) \end{cases}$$

$U(a) = U(b) = c$, $\quad c$ μη κρισιμη τιμη $\left(U'(a) \neq 0,\ U'(b) \neq 0\right)$



Παρατηρηση: $H_c = \{(x_1,x_2) \mid H(x_1,x_2) = c\} = \{\frac{1}{2}x_2^2 + U(x_1) = c\}$

$(x_1,x_2) \in H_c \Rightarrow (x_1,-x_2) \in H_c \Rightarrow$ συμμετρια.

Θεωρημα 1

Εστω $(x_1(t), x_2(t))$ λυση της (1), $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0) \in H_c$, $x_1^0 \in (a,b)$. Τοτε

(α) (Περιοδικοτητα) $\exists\, T > 0$ τ.ω. $x_i(t+T) = x_i(t)\ \forall t \in \mathbb{R}$

(β) $\forall\, t_0 \in \mathbb{R}$, $H_c = \{(x_1(t), x_2(t)) \mid t \in [t_0, t_0+T]\}$

(γ) (Περιοδος T)

$$T = 2\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2(c - U(x))}}$$

Απ

A. (1) $\frac{1}{2}(x'(t))^2 + U(x(t)) = \frac{1}{2}(x'(0))^2 + U(x(0)) = c$

(2) $\begin{cases} x'(t) = \sqrt{2(c-U(x(t)))} \\ x(0) = x_1^0 \end{cases}$ (επιλέξαμε $+\sqrt{\ }$ υποθέταμε ότι $x_2^0 > 0$) $x'(0) = x_2^0$

(Διατήρηση $\Rightarrow$ Υποβιβασμός τάξης $2 \to 1$).

• $\exists\ t_1 < 0 < t_2$ τ.ω. $x(t_1) = a < x_1^0 < b = x(t_2)$

Με σας άτοπο απαγωγή : Έστω $x(t) < b$, $\underline{t \geq 0}$

(3) $$\int_{x_1^0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2(c-U(x))}} = \int_0^t dt = t \longrightarrow \infty \quad \text{όπως } t \to \infty.$$

(4) $$\int_{x_1^0}^{x(t)} \frac{dx}{\sqrt{2(c-U(x))}} \leq \int_{x_1^0}^{b} \frac{dx}{\sqrt{2(c-U(x))}}$$

Ισχυρισμός : $\displaystyle\int_{x_1^0}^{b} \frac{dx}{\sqrt{c-U(x)}} < \infty$ (μη κρίσιμη c)

$$\left(\frac{c-U(x)}{b-x} = \frac{U(b)-U(x)}{b-x} \to U'(b) \right.$$

$$\left. \therefore \sqrt{c-U(x)} \sim \sqrt{b-x}\ , \quad \int_{x_1^0}^{b} \frac{dx}{\sqrt{b-x}} = \frac{(b-x)^{1/2}}{1/2}\Bigg|_{x_1^0}^{b} < \infty \right)$$

Άτοπο ! (3) $\not\Leftrightarrow$ (4)

Άρα $\exists$ t_2 τ.ω.

$$x(t_2)=b$$

Όμοια $\exists$ t_1 τ.ω.

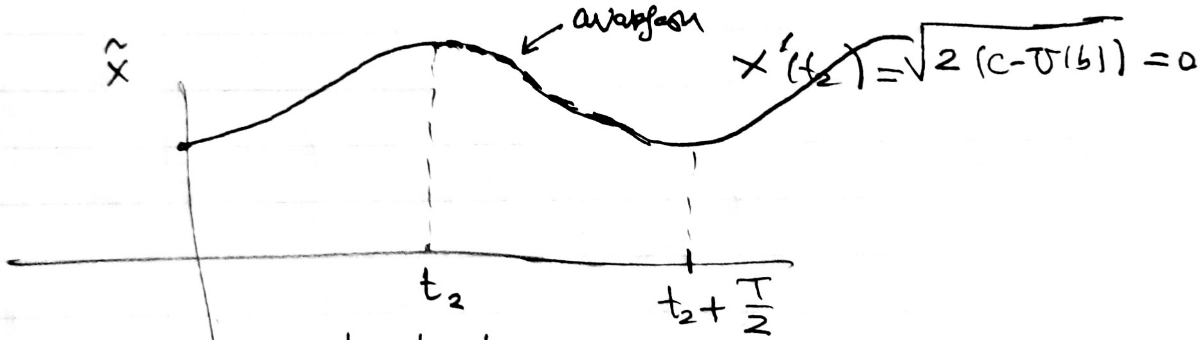
$$x(t_1)=a$$

Συνέχεια και μονοτονία $\left(x'(t)>0\right)$ το $x(t)$ λαμβάνει όλες τις τιμές στο $[a,b]$.

B. Η Περιοδική Επέκταση

$$x'(t_2)=\sqrt{2(c-V(x(t_2)))}=\sqrt{2(c-V(b))}=0$$

Ανάκλαση



$$\tilde{x}(t):=\begin{cases} x(t), & t_1\le t\le t_2 \\ x(2t_2-t), & t_2\le t\le t_2+\frac{T}{2} \end{cases}, \quad \frac{T}{2}:=t_2-t_1.$$

$\tilde{x}(t)$ συνεχής στο $t=t_2$
$\tilde{x}(t)$ παραγωγίσιμη στο $t=t_2$

$$\tilde{x}''(t)=x''(2t_2-t)=f(x(2t_2-t))=f(\tilde{x}(t))$$

Σημ: 2η παράγωγος!

$$\tilde{x}\left(t_2+\frac{T}{2}\right)=x\left(2t_2-\left(t_2+\frac{T}{2}\right)\right)=x\left(t_2-(t_2-t_1)\right)=x(t_1)=a$$

Συνεχίζουμε παρόμοια στο $t=t_2+\frac{T}{2}$.

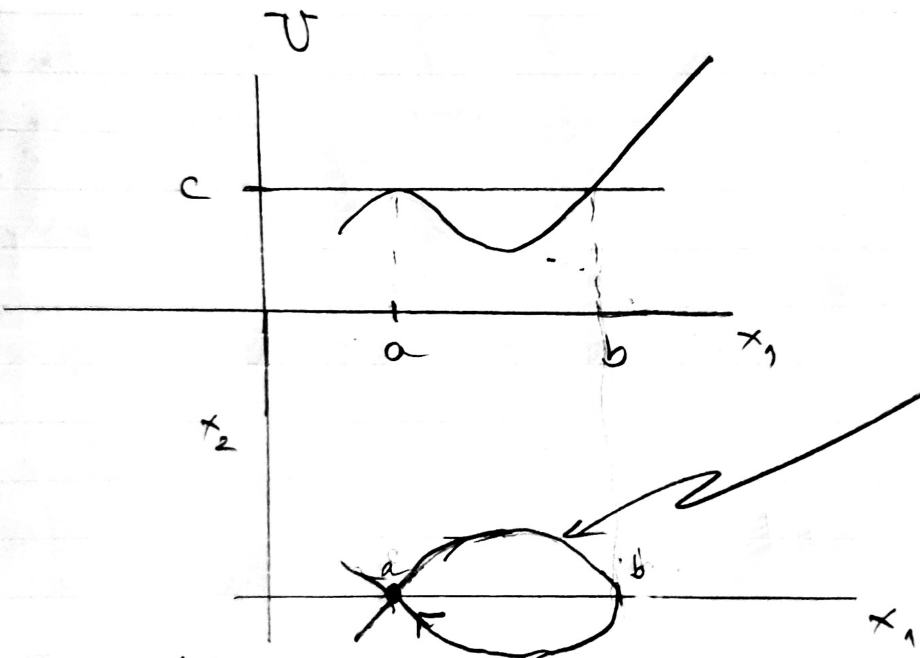
Γ. Η περιοδος

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2(c-U(x))}} = \int_{t_1}^{t_2} dt = t_2 - t_1 = \frac{T}{2}.$$

Περισσοτερες λεπτομερειες [AK] σσ 511-514.

□

2) Ομοκλινεις (U)



Σ.Ι.

↓

$H_c \cup \{(a,0)\}$

$U(a) = U(b) = c$ $\quad$ c κρισιμη τιμη $\begin{pmatrix} U'(a)=0 \\ U''(a)<0 \end{pmatrix}$

Θεωρημα 2

Εστω $(x_1(t), x_2(t))$ λυση του (1), $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0) \in H_c$, $x_1^0 \in (a,b)$. Τοτε

(α) $\displaystyle\lim_{t\to-\infty} (x_1(t), x_2(t)) = \lim_{t\to+\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (a,0)$

(β) $H_c = \{ (x_1(t), x_2(t)) \mid t \in \mathbb{R} \} \cup \{(a,0)\}$

Απ

Η ουσιαστική διαφορά είναι ότι αποκλίνει το ολοκλήρωμα

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2(c-V(x))}} = \infty$$

Εδώ παίζει ρόλο ότι η c είναι κρίσιμη τιμή. $(V \in C^3)$.

Πράγματι $\quad V(x) = V(a) + V'(a)(x-a) + \frac{1}{2}V''(a)(x-a)^2 + o(|x-a|^2)$

$$\lim_{x\to a} \frac{V(x)-c}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a}\frac{V(x)-V(a)}{(x-a)^2} = \frac{V''(a)}{2}$$

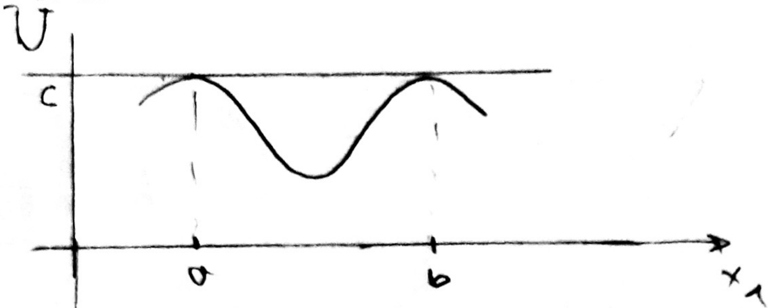
Συνεπώς

$$\sqrt{c-V(x)} \sim |x-a| = (x-a) \qquad (x>a)$$

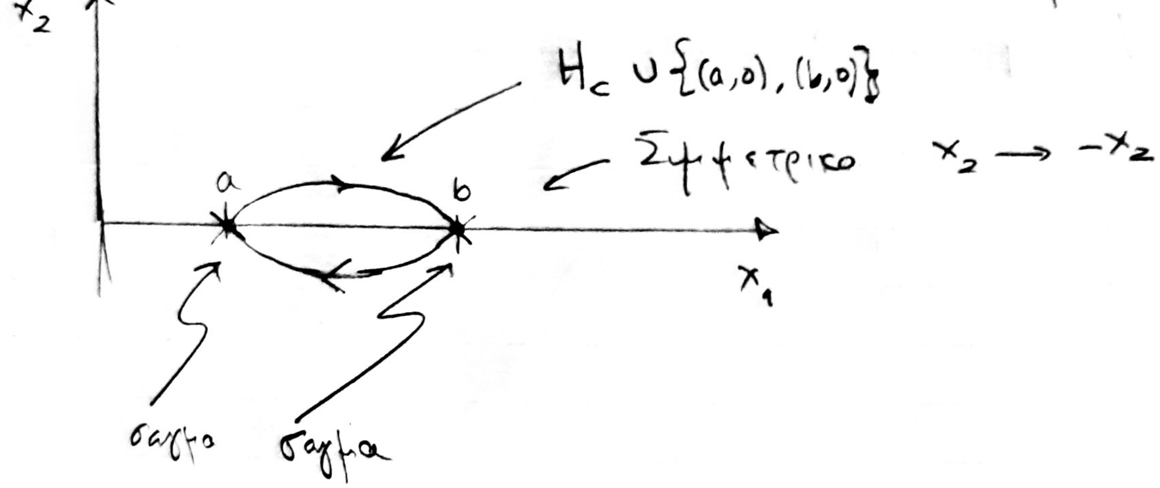
$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{2}\,(x-a)} = \infty.$$

Κατά τ'άλλα η απόδειξη είναι παρόμοια. $\square$

3) Ετεροκλινής



c κρίσιμη τιμή



Θεώρημα 3

Έστω $(x_1(t), x_2(t))$ λύση της (1), $(x_1(0), x_2(0)) = (x_1^0, x_2^0) \in H_c$, $x_1^0 \in (a,b)$. Τότε ισχύουν

(α) $\lim_{t \to -\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (a,0)$, $\lim_{t \to +\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (b,0)$

για $x_2^0 > 0$

(β) $\lim_{t \to -\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (b,0)$, $\lim_{t \to +\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (a,0)$

(γ) $H_c = \{ (x_1(t), \pm x_2(t)) \mid t \in \mathbb{R} \} \cup \{(a,0)\} \cup \{(b,0)\}$.

Απ

Παρόμοια με την ομοκλινή.

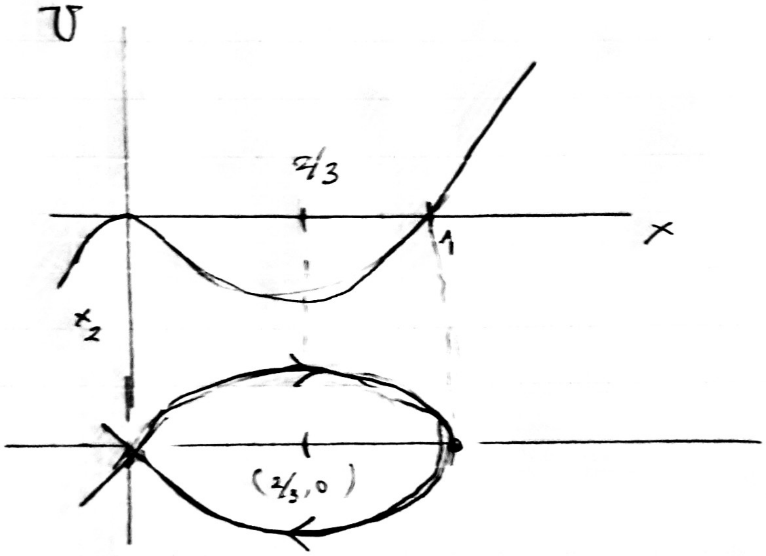
$\square$

Παραδείγματα

1) $x'' - x + \frac{3}{2}x^2 = 0$

$f(x) = x - \frac{3}{2}x^2$, $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$,

$V(0) = V(1) = 0$



$x(t) = 1 - \tanh^2\left(\frac{t}{2}\right)$

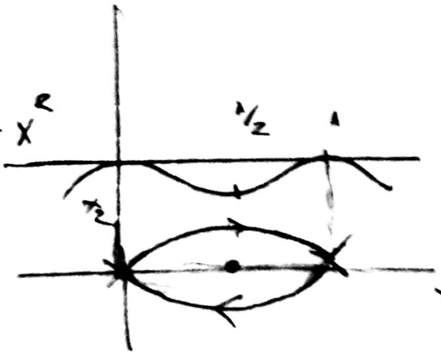
$\tanh\left(\frac{t}{2}\right) = \frac{e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}$

$\lim_{t \to \pm\infty} \tan\left(\frac{t}{2}\right) = \pm 1$

#

2) $x'' + x(1-x)\left(x - \frac{1}{2}\right) = 0$

$f(x) = x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$, $V(x) = -\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2$



$x(t) = \frac{\pm 1}{1 + e^{-t/\sqrt{2}}}$

□

Ασκήσεις (Κεφάλαιο 10 [ΔΙΚ])

2, 3, 8, 9, 11 (Γραμμική Θεωρία)

27, 15(α)

#