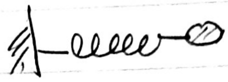
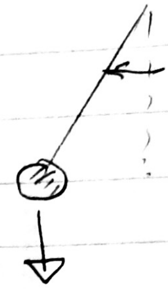
Διάλεξη 24/3/20

10.2 [ΑΚ]

(ΕΝ) $x'' - f(x) = 0$ $f \in C^1$

Μονοδιάστατη κίνηση   Π.χ.  

$$x_1 = x \quad , \quad x_2 = x'$$

$$(2) \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = f(x_1) \end{cases}$$

$$T = \frac{1}{2}(x')^2 = \frac{1}{2}x_2^2 \quad , \quad U = -\int_0^x f(\xi)\,d\xi$$

Κινητική   Δυναμική

$$H = T + U$$

Ολική (Χαμιλτονιανή)

$$(2) \Leftrightarrow \quad x_1' = \frac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_2} \quad , \quad x_2' = -\frac{\partial H(x_1,x_2)}{\partial x_1} \qquad (3)$$

Θ1 [Αρχή Διατήρησης Ενέργειας]

Έστω $(x_1(t), x_2(t))$ λύση της (2).

Ισχύει

$$H(x_1(t), x_2(t)) = H(x_1(0), x_2(0)).$$

Απ

$$\frac{d}{dt} H(x_1(t), x_2(t)) = \frac{\partial H}{\partial x_1} x_1' + \frac{\partial H}{\partial x_2} x_2'$$

$$= \frac{\partial H}{\partial x_1}\frac{\partial H}{\partial x_2} + \frac{\partial H}{\partial x_2}\left(-\frac{\partial H}{\partial x_1}\right)$$

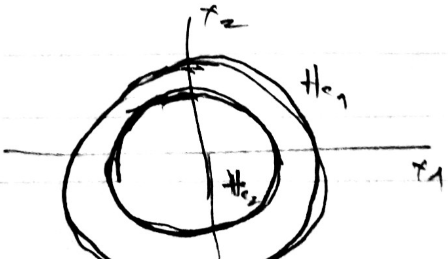
$$= 0$$

□

Γεωμετρία: Λύσεις $(x_1(t), x_2(t))$ είναι καμπύλες στο επ. φάσης $\subset \{(x_1,x_2) \mid H(x_1,x_2) = c\} = H_c$ ← συμμετρία $x_2 \to -x_2$

καμπύλες στάθμης.

Π.χ. $H(x_1,x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$, H_c



$c_1 > c_2$

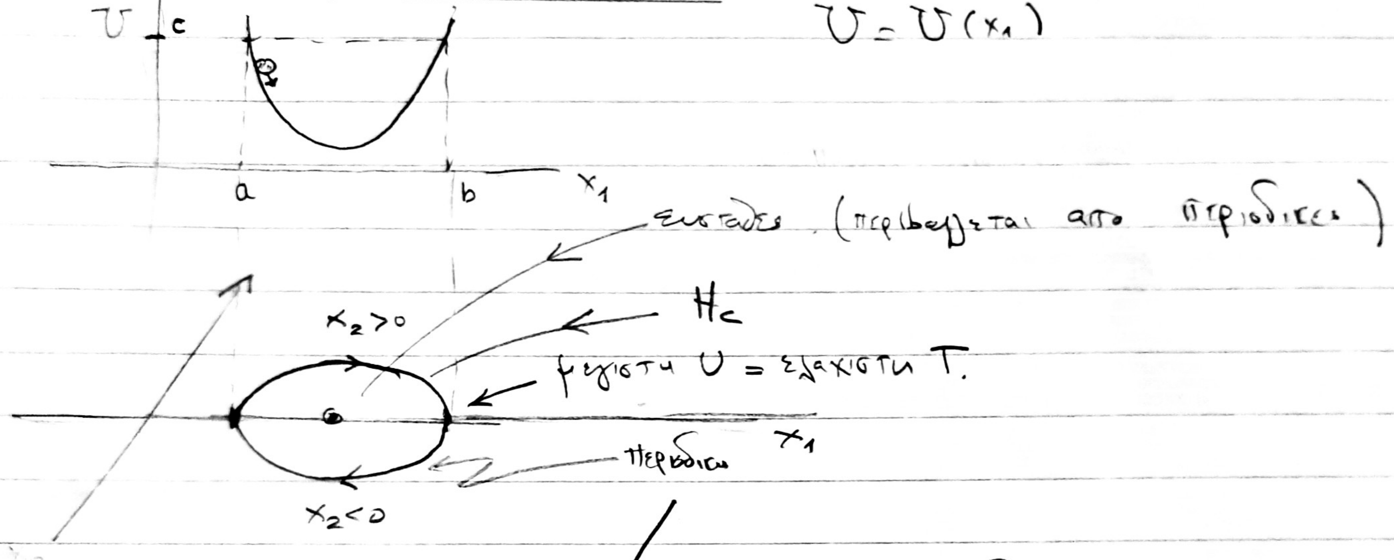
Σ.Ι.

$$\frac{\partial H(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{\partial x_1}=0 \quad , \quad \frac{\partial H(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{\partial x_2}=0$$

$$\Leftrightarrow \quad \bar{x}_2=0 \quad , \quad f(\bar{x}_1)=0$$

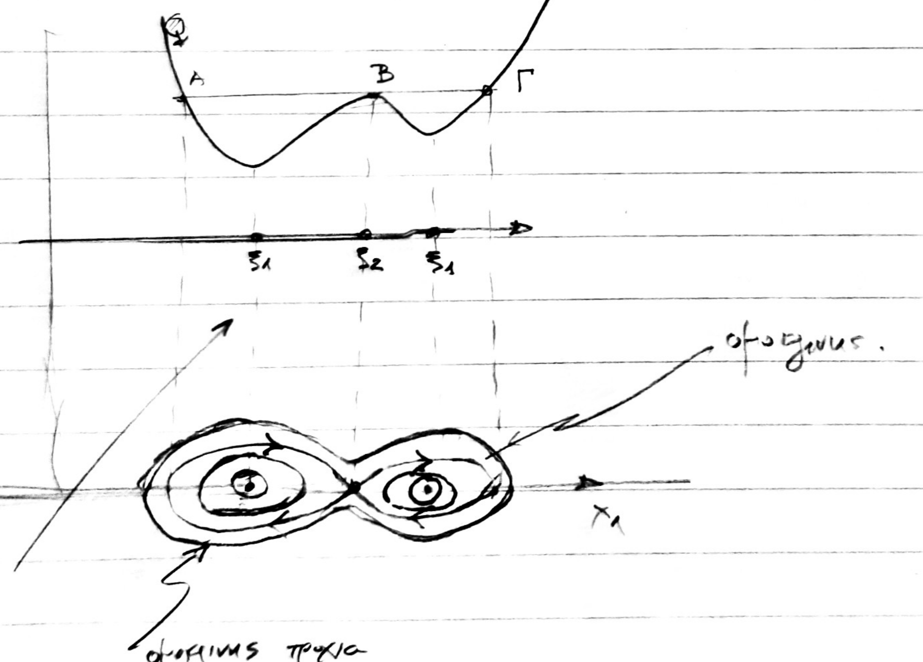
Το Μηχανικό Ανάλογο των Σφαιριδίων (χωρίς τριβή)

1) $U = U(x_1)$



$U(x_1) \leq C$, $T(x_2) \leq C$, περιοδική λύση

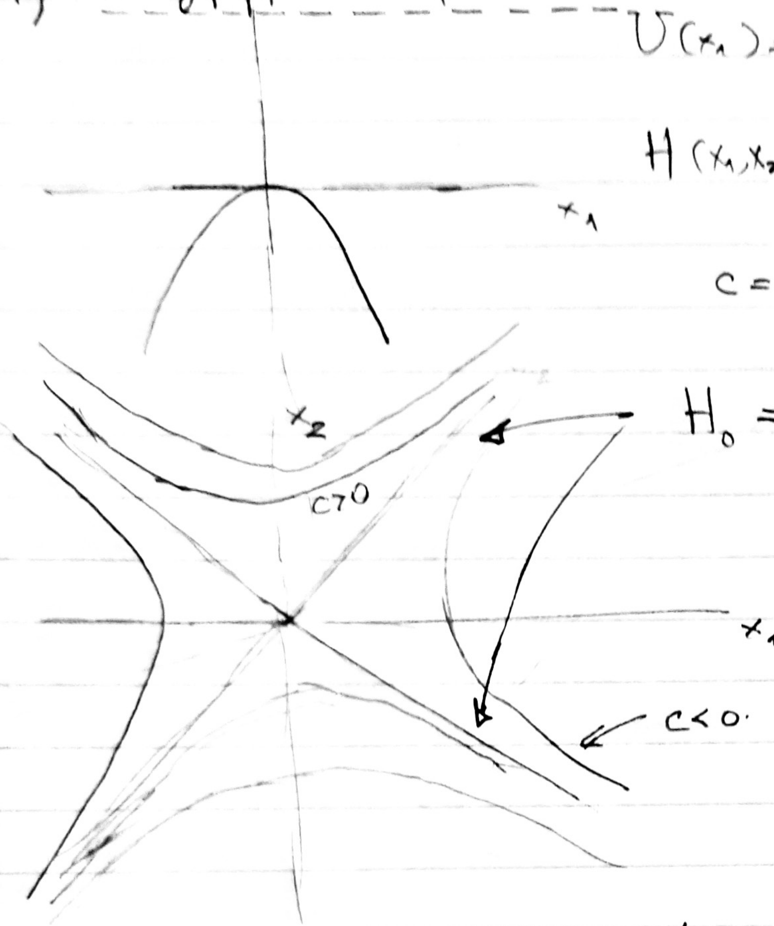
2)



Ορ: Έστω $c = U(\xi)$ και $U'(\xi)=0$, τότε η c λέγεται κρίσιμη τιμή , και η H_c κρίσιμη καμπύλη στάθμης

Η Περίπτωση των Τοπικών μεγίστων (ασταθείς)

1) Η γραμμική περίπτωση



$$U(x_1) = -\tfrac{1}{2}kx_1^2 \quad , \quad k>0$$

$$H(x_1,x_2) = -\tfrac{1}{2}kx_1^2 + \tfrac{1}{2}x_2^2$$

$$c = U(0) = 0 \quad , \quad U'(0) = 0$$

$$H_0 = \{(x_1,x_2) \mid -kx_1^2 + x_2^2 = 0\}$$

$$H_c = \{(x_1,x_2) \mid -kx_1^2 + x_2^2 = c\}$$

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= +kx_1 \end{aligned} \iff \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ +k & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$ Σάγμα.

$$\mathrm{tr}A = 0$$
$$\det A = -k < 0.$$

2) Η γενική περίπτωση τοπικών μεγίστου

Θεώρημα

Έστω U C^3, $U(0) = U'(0) = 0$, $U''(0) < 0$

Το επίπεδο φάσης είναι τοπικά "diffeomorphic" με την γραμμική περίπτωση. Δηλαδή υπάρχει αλλαγή μεταβλητών (αμφιδιομορφισμός) που απεικονίζει το ένα επίπεδο στο άλλο.

Η απόδειξη ακολουθεί δια μια σειρά Λημμάτων.

<u>Ορισμός</u> : Ο μετασχηματισμός $x = h(y)$, $h: (-\delta, \delta) \to (-\varepsilon, \varepsilon)$, $\delta, \varepsilon > 0$, με $h(0) = 0$, λέγεται C^1 αλλαγή μεταβλητών (διφιδιαφορισιν) από x σε y αν ισχυαν τα:

(α) Η h 1-1

(β) Η $h^{-1} \in C^1$

<u>Παρατηρηση</u> : Εαν η $h \in C^1$, $h'(0) \neq 0 \Rightarrow h^{-1} \in C^1$ (η μονοτωνικη τοπικα, $y \in (-\delta, \delta)$, αρα h^{-1} υπαρχει, και $(h^{-1}(y))' = \dfrac{1}{h'(h(y))}$.

<u>Λημμα 1</u> (Hadamard)

Εστω G C^2 συναρτηση ορισμενη στο $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $G(0) = 0$, $G'(0) \neq 0$. Τοτε $\exists$ $g(x)$, C^1 συναρτηση τ.ω.

$$G(x) = x g(x), \quad G'(0) = g(0)$$

<u>Απόδειξη</u>

$$G(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt}[G(tx)]dt = \int_0^1 x G'(tx)\,dt = x g(x)$$

οπου
$$g(x) = \int_0^1 G'(tx)dt,$$

$$g'(x) = \int_0^1 G''(tx)t\,dt, \quad \lim_{x \to 0} g'(x) = \lim_{x \to 0} \int_0^1 G''(tx)t\,dt = \int_0^1 G''(0)t\,dt = g'(0).$$

$\therefore$ $g \in C^1$ στο $x = 0$. Για $x \neq 0$ $g(x) = \dfrac{G(x)}{x} \Rightarrow g \in C^1$.

$$G'(x) = g(x) + x g'(x), \quad G'(0) = g(0).$$

$\square$

Λήμμα 2 (Morse)

Έστω $F(x)$, C^3 συνάρτηση στο $(-\varepsilon,\varepsilon)$ με $F(0)=F'(0)=0$, $F''(0)\neq 0$

Τότε $\exists$ αλλαγή μεταβλητών C^1, $x=h(y)$ με

$$h'(0)=\sqrt{\frac{2}{F''(0)}}\neq 0$$

Τ.ω. για $x\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ ισχύει

$$F(x)=F(h(y))=(\operatorname{sign}F''(0))\,y^2$$

Παρατήρηση 1

Έστω $F\in C^3$ σε περιοχή του $x=\xi$, $F'(\xi)=0$, $F''(\xi)\neq 0$.

Θέτουμε $z=x-\xi$ και

$$\tilde F(z)=F(z+\xi)-F(\xi)$$

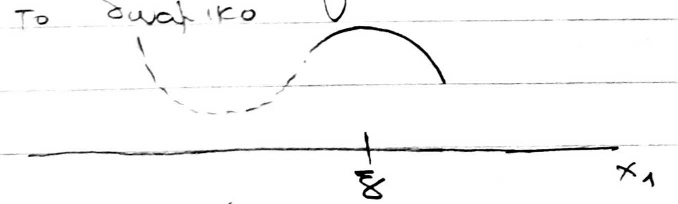
Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2

$\tilde F(z)=(\operatorname{sign}\tilde F''(0))\,y^2 \iff F(x)-F(\xi)=(\operatorname{sign}F''(\xi))\,y^2.$

$\square$

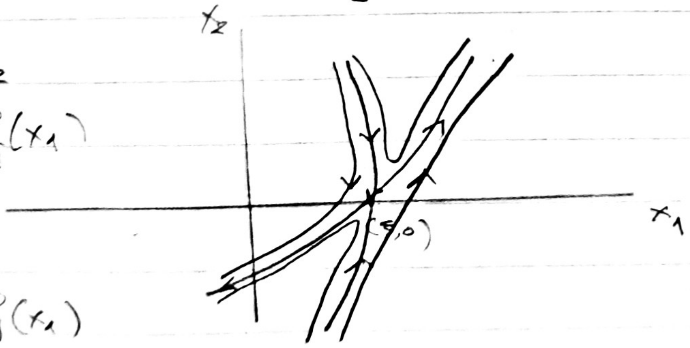
Παράδειγμα

Θεωρούμε το δυναμικό V



$V'(\xi)=0$, $V''(\xi)<0$.

$$(1)\begin{cases} x_1'=x_2\\ x_2'=f(x_1)\end{cases}$$



$V'(x_1)=-f(x_1)$

Παρατήρηση 2: Το γραμμικοποιημένο σύστημα στο $(\xi, 0)$:

(Γραμμικοποίηση εν γένει:

$$\begin{cases} x_1' = f_1(x_1, x_2) \\ x_2' = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \qquad \begin{matrix} f_1(\xi_1, \xi_2) = 0 \\ f_2(\xi_1, \xi_2) = 0 \end{matrix}$$

$y_1 = x_1 - \xi_1, \quad y_2 = x_2 - \xi_2 \quad , \quad \bar{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\bar\xi)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\bar\xi)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\bar\xi)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\bar\xi)}{\partial x_2} \end{pmatrix}}_{\text{Σταθερός Πίνακας !}} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(Γραμμικοποιημένο)}$$

)

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ f'(\xi) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$f'(\xi) \neq 0 \Rightarrow \det(\ ) \neq 0, \ \lambda_i \neq 0$

$\square$

Σχέση διατήρησης των (1):

$$\frac{1}{2} x_2^2 + U(x_1) = c \iff$$

$$(ΑΔ) \qquad \frac{1}{2} x_2^2 + [U(x_1) - U(\xi)] = c - U(\xi) = \text{σταθερά} =: E$$

Σημείο Ισορροπίας $(\xi, 0)$ αντιστοιχεί στην $E = 0$

Η Παρατήρηση 1 $\Rightarrow$

$F(x_1) = U(x_1) - U(\xi) = -y^2 \qquad (U''(\xi) < 0)$

Ως προς τις μεταβλητές y, x_2 η (ΑΔ):

$$(*) \qquad \frac{1}{2} x_2^2 - y^2 = E$$

Για $E \neq 0$ η $(*)$ παριστανει υπερβολες $x_2 = \pm\sqrt{2}\, y$

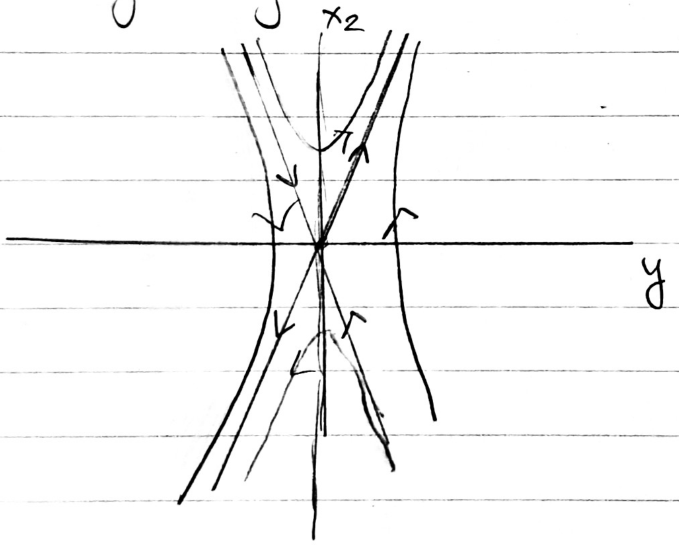
Το αντιστοιχο συστημα ειναι <u>γραμμικο</u>!

$$y' = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{1}{2}x_2^2 - y^2\right) = x_2 \iff$$

$$x_2' = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{2}x_2^2 - y^2\right) = 2y.$$

(3) $$\begin{pmatrix} y \\ x_2 \end{pmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ x_2 \end{bmatrix} \iff$$

$$y'' - 2y = 0.$$



<u>Σημ</u>: Τα γραμμικα συστηματα (2), (3) <u>ΔΕΝ</u> συμπιπτουν. Εχουν διαφορετικες ιδιοτιμες εν γενει. $\exists$ βεβαια γραμμικος μετασχηματισμος $\bar{x} = A\bar{y}$, A αντιστρεψιμος που απεικονιζει το ενα στο αλλο. $\blacksquare$

Θεωρημα των Hartman και Grobman

Θεωρουμε το συστημα

$$(1) \quad u' = f(u) \quad , \quad f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad , \text{ ομαλη}$$

$$f(u^*) = 0$$

u^* υπερβολικο σημειο ισορροπιας : $A = \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(u^*) \right]$

$\mathrm{Re}\, \lambda(A) \neq 0$.

Τοτε $\exists$ περιοχη N του u^* , και ομοιομορφισμος $h : N \to \mathbb{R}^n$, $h(u^*) = 0$, τ. ω. το (1) ειναι τοπολογικα συζευγμενο μεσω του μετασχηματισμου

$$V = h(u)$$

με το γραμμικοποιημενο συστημα

$$(2) \qquad V' = AV .$$

Σημ : Ακομη και για $f \in C^\infty$ η h δεν ειναι αναγκαστικα ομαλη, ουτε καν Lipschitz. (ειναι ομως παντα Hölder). □

Σημ : Ενα καλογραμμενο βιβλιο ειναι των Hubbard και West , TAM 18 Βλεπε Κεφαλαιο 8* . □