4.8 Θεωρήστε το υπόδειγμα:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i$$

το οποίο εκτιμήθηκε με την μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων βάσει ενός δείγματος N=20 παρατηρήσεων και έδωσε τα ακόλουθα αποτελέσματα:

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 0,97 \\ 0,70 \\ 1,78 \end{bmatrix}, \quad \widehat{Cov}\left(\hat{\beta}\right) = \sigma^2 \left(X'X\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0,22 & 0,020 & -0,05 \\ 0,020 & 0,05 & -0,03 \\ -0,05 & -0,03 & 0,04 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \hat{\sigma}^2 = 2,52$$

(i) Ελέγξατε την υπόθεση: $\beta_2 = \beta_3$

(ii) Ελέγξατε την υπόθεση: $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$

(iii) Προβλέψτε την τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής στο σημείο των ανεξάρτητων μεταβλητών $x_0' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$. Βρείτε την διακύμανση του σφάλματος στο σημείο αυτό και υπολογίστε το διάστημα της αληθινής τιμής της εξαρτημένης μεταβλητής y_0, στο σημείο "0".

Λύση

(i) $\beta_2 = \beta_3$

H$_0$: $\beta_2 - \beta_3 = 0$

H$_1$: $\beta_2 - \beta_3 \neq 0$

$$\widehat{Var}\left(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3\right) = \widehat{Var}\left(\hat{\beta}_2\right) + \widehat{Var}\left(\hat{\beta}_3\right) - 2\widehat{Cov}\left(\hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3\right) = 0,05 + 0,04 - 2\left(-0,03\right) = 0,15$$

$$S.E.\left(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3\right) = \sqrt{\widehat{Var}\left(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3\right)} = \sqrt{0,15} = 0,3873$$

$$t_1 = \left|\frac{\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3 - 0}{S.E.\left(\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_3\right)}\right| = \left|\frac{0,7 - 1,78 - 0}{0,3873}\right| = \left|\frac{-1,08}{0,3873}\right| = 2,7885$$

Όμως $t_{crit} = t_{N-k,a/2} = t_{17,0.025} = 2,1098$. Άρα $t_1 > t_{crit}$. Άρα απορρίπτω την H$_0$.

(ii) $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$

H$_0$: $\beta_1 = 1$ και $\beta_2 = 1$ και $\beta_3 = 1$

H$_1$: $\beta_1 \neq 1$ ή $\beta_2 \neq 1$ ή $\beta_3 \neq 1$

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; r = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R\hat{\beta} - r = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,97 \\ 0,70 \\ 1,78 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,97 \\ 0,70 \\ 1,78 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,03 \\ -0,30 \\ 0,78 \end{bmatrix}$$

$$F = \frac{\left(R\hat{\beta} - r\right)' \left[R\widehat{Cov}\left(\hat{\beta}\right)R'\right]^{-1} \left(R\hat{\beta} - r\right)}{J} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -0,03 & -0,30 & 0,78 \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,22 & 0,02 & -0,05 \\ 0,02 & 0,05 & -0,03 \\ -0,05 & -0,03 & 0,04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right]^{-1} \begin{bmatrix} -0,03 \\ -0,30 \\ 0,78 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -0,03 & -0,30 & 0,78 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6,832 & 4,347 & 11,801 \\ 4,347 & 39,130 & 34,782 \\ 11,801 & 34,782 & 65,838 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,03 \\ -0,30 \\ 0,78 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 7,695 & 15,260 & 40,565 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,03 \\ -0,30 \\ 0,78 \end{bmatrix} = \frac{26,831}{3} = 8,944$$

Όμως $F_{crit}=F_{J,N-k,a}=F_{3,17,0.05}=3{,}1968$. Άρα $F>F_{crit}$. Απορρίπτω την H_0.

(iii)

$$\hat{y}_0=X_0'\hat{\beta}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0,97\\ 0,70\\ 1,78\end{bmatrix}=0,97+3,56=4,53$$

Ισχύει ότι: $\left(X'X\right)^{-1}=\frac{1}{\hat{\sigma}^2}\widehat{Var}\left(\hat{\beta}\right)$.

$$\widehat{Var}\left(\hat{y}_0-y_0\right)=\hat{\sigma}^2\left[x_0'\left(X'X\right)^{-1}x_0+1\right]=2,52\left[\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\end{bmatrix}\frac{1}{2,52}\begin{bmatrix}0,22 & 0,02 & -0,05\\ 0,02 & 0,05 & -0,03\\ -0,05 & -0,03 & 0,04\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}+1\right]=$$

$$=2,52\left[\frac{1}{2,52}\begin{bmatrix}0,12 & -0,04 & 0,03\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}+1\right]=2,52\left(\frac{0,18}{2,52}+1\right)=2,70$$

Η κριτική τιμή είναι $t_{crit}=t_{N-k,a/2}=t_{17,0.025}=2{,}1098$. Άρα το διάστημα εμπιστοσύνης είναι:

$$\mathrm{P}\left[\hat{y}_0-t_{crit}\sqrt{\widehat{Var}\left(\hat{y}_0-y_0\right)}\le y_0\le\hat{y}_0+t_{crit}\sqrt{\widehat{Var}\left(\hat{y}_0-y_0\right)}\right]=0,95\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mathrm{P}\left[4,53-2,1098\sqrt{2,70}\le y_0\le 4,53+2,1098\sqrt{2,70}\right]=0,95\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mathrm{P}\left[4,53-3,4667\le y_0\le 4,53+3,4667\right]=0,95\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\mathrm{P}\left[1,0633\le y_0\le 7,9967\right]=0,95$$

4.9 Δίνονται οι παρακάτω εκτιμήσεις του οικονομετρικού υποδείγματος καθορισμού της συναλλαγματικής ισοτιμίας ανάμεσα σε δύο νομίσματα, έστω e_t (=€/\$):

$$e_t=\beta_0+\beta_1\left(M_t-M_t^*\right)+\beta_2\left(Y_t-Y_t^*\right)+\varepsilon_t,\quad t=1,2,...,T=30$$

$$=0,10+1,0\left(M_t-M_t^*\right)-0,5\left(Y_t-Y_t^*\right)+\hat{\varepsilon}_t$$

S.E.: (0,05) (0,05) (0,01) και $\overline{R}^2=0,45$

Ελέγξατε την ικανότητα του υποδείγματος αυτού να ερμηνεύσει σημαντικά τις μεταβολές της συναλλαγματικής ισοτιμίας ανάμεσα στα παραπάνω νομίσματα.

Λύση

(i) $\beta_1=0$

H_0: $\beta_1=0$

H_1: $\beta_1\ne 0$

$$t_1=\left|\frac{\hat{\beta}_1-0}{S.E.\left(\hat{\beta}_1\right)}\right|=\left|\frac{1-0}{0,05}\right|=20$$

Όμως $t_{crit}=t_{N-k,a/2}=t_{27,0.025}=2{,}0518$. Άρα $t_1>t_{crit}$. Άρα απορρίπτω την H_0. Ο $\hat{\beta}_1$ είναι στατιστικά σημαντικός.

(ii) $\beta_2 = 0$

H$_0$: $\beta_2 = 0$

H$_1$: $\beta_2 \neq 0$

$$t_2 = \left| \frac{\hat{\beta}_2 - 0}{S.E.\left(\hat{\beta}_2\right)} \right| = \left| \frac{0,5-0}{0,01} \right| = 50$$

Όμως $t_{crit} = t_{N-k,a/2} = t_{27,0.025} = 2,0518$. Άρα t_2>t_{crit}. Άρα απορρίπτω την H$_0$. O $\hat{\beta}_2$ είναι στατιστικά σημαντικός.

(iii) Από κοινού έλεγχος

H$_0$: $\beta_1 = 0$ και $\beta_2 = 0$

H$_1$: $\beta_1 \neq 0$ ή $\beta_2 \neq 0$

$$F = \frac{R^2/(k-1)}{\left(1-R^2\right)/(T-k)} = \frac{0,45/2}{(1-0,45)/27} = \frac{0,225}{0,55/27} = \frac{0,225}{0,02037} = 11,0456$$

Όμως $F_{crit} = F_{2,27,0.05} = 3,35$. Άρα F>F_{crit}. Απορρίπτω την H$_0$. Το υπόδειγμα ερμηνεύει σημαντικά τις μεταβολές της συναλλαγματικής ισοτιμίας ανάμεσα στα παραπάνω νομίσματα.