Ετεροσκεδαστικότητα

Κάτω από τις κλασσικές υποθέσεις είχαμε θεωρήσει ότι ο διαταρακτικός όρος ε_i είναι ομοσκεδαστικός, δηλ.

$$\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) \equiv \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \begin{bmatrix} \mathrm{E}(\varepsilon_1^2) & \mathrm{E}(\varepsilon_1\varepsilon_2) & \cdots & \mathrm{E}(\varepsilon_1\varepsilon_N) \\ \mathrm{E}(\varepsilon_2\varepsilon_1) & \mathrm{E}(\varepsilon_2^2) & & \mathrm{E}(\varepsilon_2\varepsilon_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{E}(\varepsilon_N\varepsilon_1) & \mathrm{E}(\varepsilon_N\varepsilon_2) & \cdots & \mathrm{E}(\varepsilon_N^2) \end{bmatrix} = \sigma^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \sigma^2 \mathbf{I},$$

στην πράξη όμως η διακύμανση του διαταρακτικού όρου διαφέρει από παρατήρηση (πχ. οικονομική μονάδα) σε παρατήρηση, δηλ παρουσιάζεται το φαινόμενο της **ετεροσκεδαστικότητας**, όπου έχουμε:

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \begin{bmatrix} \mathrm{E}(\varepsilon_1^2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \mathrm{E}(\varepsilon_2^2) & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \mathrm{E}(\varepsilon_N^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N^2 \end{bmatrix}$$

Α. Συνέπειες της ετεροσκεδαστικότητας στο LS εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}$

<u>Αμεροληψία (ισχύει)</u>: Γράψτε $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ως

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}$$

οπότε

$$\mathrm{E}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \boldsymbol{\beta}, \qquad \text{καθώς } \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathbf{0}.$$

<u>Συνέπεια (ισχύει)</u>: Γράψε τον εκτιμητή $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ ως

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_N = \boldsymbol{\beta} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\beta} + \left(\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i'\right)^{-1}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\varepsilon_i$$

και πάρε όρια κατά πιθανότητα (*plim*):

$$\underset{N\to\infty}{p\lim}\hat{\boldsymbol{\beta}}_N = \boldsymbol{\beta} + \left(\underset{N\to\infty}{p\lim}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i'\right)^{-1}\left(\underset{N\to\infty}{p\lim}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\varepsilon_i\right) = \boldsymbol{\beta},$$

καθώς $\underset{N\to\infty}{p\lim}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\varepsilon_i = \mathrm{E}(\mathbf{x}_i\varepsilon_i) = \mathbf{0}$ και $\underset{N\to\infty}{p\lim}\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathbf{x}_i\mathbf{x}_i' \equiv \mathbf{Q}_{xx}$.

<u>Διακύμανση – αποτελεσματικότητα (δεν ισχύει)</u>: Η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης δίδεται ως

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) &= \mathrm{E}\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})'\right] = \mathrm{E}\left[(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right] \\ &= (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1},\end{aligned}$$

καθώς $\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \boldsymbol{\Omega} \neq \sigma^2\mathbf{I}$ λόγω ετεροσκεδαστικότητας. Η μήτρα αυτή διαφέρει της

$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})=\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$, που ισχύει κάτω από ομοσκεδαστικότητα.

Επομένως, ο εκτιμητής $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ *δεν είναι BLUE (δεν ισχύει το θεώρημα Gauss-Markov). Η δε χρήση της μήτρας* $\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}})=\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ *στον έλεγχο υποθέσεων για την εκτίμηση των τυπικών σφαλμάτων οδηγεί σε σφάλματα.* <u>*Η σωστή μήτρα που θα πρέπει να χρησιμοποιείται για το σκοπό αυτό είναι η ακόλουθη:*</u>

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$$

<u>Παράδειγμα της $\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$ για το απλό υπόδειγμα $y_i=\beta x_i+\varepsilon_i$:</u>

$$\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)^{-1}[x_1,x_2,\ldots x_N]\begin{bmatrix}\sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_N^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_N\end{bmatrix}\left(\sum_{i=1}^{N}x_i^2\right)^{-1}$$

$$=\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^2}(x_1^2\sigma_1^2+x_2^2\sigma_2^2+\ldots+x_N^2\sigma_N^2).$$

Κάτω από ομοσκεδαστικότητα, αυτή γίνεται: $\mathrm{Var}(\hat{\beta})=\sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}=\sigma^2\frac{1}{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i^2\right)^2}$.

Β. Διαγνωστικοί έλεγχοι για την ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας

<u>Ο έλεγχος Goldfeld-Quandt:</u> (Για ομαδοποιημένα στοιχεία, όπου η διακύμανση αλλάζει μετά από μια παρατήρηση, έστω την παρατήρηση N_1). Ως παράδειγμα, θεωρήστε το υπόδειγμα**:**

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_i + \varepsilon_i \;, \; i=1, 2,..., N_1, \; N_1+1, \; N_1+2, \ldots, \; N$$

όπου ο διαταρακτικός όρος ε_i κατανέμεται ως εξής:

$$\varepsilon_i \sim N(0,\sigma_1^2) \text{ for } i=1,2,...,N_1 \qquad \text{και} \qquad \varepsilon_i \sim N(0,\sigma_2^2) \text{ for } i=N_1, N_{1+1},...,N\,,$$

N_1 αποτελεί το **σημείο αλλαγής** (changing point). Αν $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$, η παραπάνω μορφή ετεροσκεδαστικότητας μπορεί να ελεγχθεί θέτοντας την παρακάτω μηδενική υπόθεση:

H_o: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ (ομοσκεδαστικότητα)

H_α: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ (ετεροσκεδαστικότητα)

Για τον έλεγχο αυτό, οι Goldfeld-Quandt πρότειναν το ακόλουθο στατιστικό κριτήριο:[1]

$$GQ \equiv \frac{\hat{\sigma}_2^2}{\hat{\sigma}_1^2} = \frac{\dfrac{RSS_2}{N_2-K}}{\dfrac{RSS_1}{N_1-K}}$$

[1] Στο σημείο αυτό, σημειώστε ότι αν η εναλλακτική υπόθεση είχε τεθεί ως $\mathbf{H}_\alpha$**:** $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$, τότε το κριτήριο GQ θα πρέπει να υπολογισθεί ως $GQ \equiv \frac{\hat{\sigma}_1^2}{\hat{\sigma}_2^2}$.

όπου RSS_1 και RSS_2 αποτελούν τα αθροίσματα των τετραγώνων των καταλοίπων του γραμμικού υποδείγματος που εκτιμάται αντίστοιχα με βάση τις πρώτες N_1 παρατηρήσεις του δείγματος $i=1,2, \ldots, N_1$ και τις υπόλοιπες $N_2 = N-N_1$, που ορίζονται ως $N_1+1, N_1+2, \ldots, N$. K αποτελεί τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών του υποδείγματος μαζί με τη σταθερά.

Κάτω από την υπόθεση $\varepsilon_i \sim NIID(0,\sigma_i^2)$, το στατιστικό GQ κατανέμεται ως

$$GQ \sim F_{(N_2-K,\, N_1-K)},$$

που σημαίνει ότι, αν η τιμή του GQ είναι μεγαλύτερη της κριτικής τιμής της $F_{(N_2-K,\, N_1-K)}$, τότε η μηδενική υπόθεση θα απορρίπτεται και θα γίνεται αμέσως δεκτή η εναλλακτική υπόθεση ότι $\sigma_1^2<\sigma_2^2$.

Οι έλεγχοι Breusch-Pagan/ Godfrey (ασυμπτωτικοί-ισχύουν για μεγάλα δείγματα): Θεωρούν ότι η ετεροσκεδαστικότητα ακολουθεί το εξής παραμετρικό υπόδειγμα: [2]

$$\sigma_i^2 = h(\alpha_1+\alpha_2 z_{i2}+\ldots+\alpha_P z_{iP}),$$

όπου οι μεταβλητές z_{ip} μπορεί να περιλαμβάνουν κάποιες από τις ανεξάρτητες μεταβλητές του γραμμικού πολλαπλού υποδείγματος x_{ik}. Για τον έλεγχο αυτής της μορφής ετεροσκεδαστικότητας, η μηδενική υπόθεση και η εναλλακτική της θέτονται ως εξής:

$$H_0: \alpha_2=\alpha_3=\ldots=\alpha_P=0 \qquad (\text{ομοσκεδαστικότητα } \sigma_i^2=h(\alpha_1)=\sigma^2, \forall i)$$

$$H_\alpha: \alpha_2 \neq 0 \text{ ή } \alpha_3 \neq 0 \ldots \text{ή } \alpha_P \neq 0 \ (\text{ετεροσκεδαστικότητα})$$

---

[2] Επειδή η διακύμανση θα πρέπει πάντα να είναι θετική, μια συνάρτηση h(.) που συνήθως θεωρείται για αυτή είναι η εκθετική: $\sigma_i^2=e^{(\alpha_1+\alpha_2 z_{i2}+\ldots+\alpha_P z_{iP})}$. Η συνάρτηση αυτή συνεπάγεται ότι ο λογάριθμος της σ_i^2 αποτελεί γραμμική συνάρτηση των μεταβλητών z_{ip}.

Για τη διεξαγωγή του ελέγχου αυτού, οι **Breusch-Pagan** πρότειναν τα ακόλουθα στάδια:

<u>Στάδιο 1</u>: Εκτίμηση του πολλαπλού γραμμικού υποδείγματος με τη LS μέθοδο και υπολογισμό των καταλοίπων του ως

$$\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \ldots - \hat{\beta}_K x_{iK} \text{ και της διακύμανσής } \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\hat{\varepsilon}_i.$$

<u>Στάδιο 2</u>: Εκτίμηση της ακόλουθης **βοηθητικής παλινδρόμησης**:

$$\frac{\hat{\varepsilon}_i^2}{\hat{\sigma}^2} = a_1 + a_2 z_{i2} + a_3 z_{i3} + \ldots + a_p z_{iP} + v_i,$$

και υπολογισμός του αθροίσματος ESS (explained sum of squares) αυτής. Με βάση αυτό υπολογίζουμε το ακόλουθο στατιστικό κριτήριο:

$$LM_{BP} \equiv \frac{1}{2} ESS,$$

που, κάτω από τη μηδενική υπόθεση, ακολουθεί τη χ^2-κατανομή με (P-1) βαθμούς ελευθερίας, δηλ.

$$LM_{BP} \equiv \frac{1}{2} ESS \sim \chi^2_{(P-1)},$$

όπου οι βαθμοί ελευθερίας (P-1) ισούται με τον αριθμό των ανεξάρτητων μεταβλητών της βοηθητικής παλινδρόμησης χωρίς τη σταθερά. Αν η τιμή του LM_{BP} είναι μεγαλύτερη της κριτικής τιμής της $\chi^2_{(P-1)}$-κατανομής, τότε η μηδενική υπόθεση θα απορρίπτεται και θα γίνεται δεκτή η εναλλακτική της.

Ο Godfrey πρότεινε ένα απλούστερο τρόπο για τη διεξαγωγή του παραπάνω Breusch-Pagan ελέγχου, όπου στο δεύτερο στάδιο εκτιμάτε η ακόλουθη βοηθητική παλινδρόμηση:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = a_1 + a_2 z_{i2} + a_3 z_{i3} + ... + a_p z_{iP} + v_i, \quad i=1,2, ….,N$$

και υπολογίζεται ο συντελεστής προσδιορισμού αυτής R^2 και το στατιστικό κριτήριο:

$$LM_G \equiv N \cdot R^2.$$

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση της ομοσκεδαστικότητας, αυτό κατανέμεται ως εξής:

$$LM_G \equiv N \cdot R^2 \sim \chi^2{}_{(P-1)}.$$

<u>Ο έλεγχος White</u>: Είναι αντίστοιχος των ελέγχων Breusch-Pagan και Godfrey, αλλά θεωρεί ως ερμηνευτικές μεταβλητές του υποδείγματος της διακύμανσης τα ακόλουθα σύνολα μεταβλητών:

(i) τα επίπεδα των ερμηνευτικών μεταβλητών του υποδείγματος x_{ik},
(ii) τα τετράγωνά τους x_{ik}^2 και
(iii) τα μεταξύ τους γινόμενα $x_{ik}x_{is}$,

Ως παράδειγμα, για το ακόλουθο γραμμικό υπόδειγμα δύο ανεξάρτητων μεταβλητών:

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \beta_3 x_{i3} + \varepsilon_i \ , \ i = 1, 2, …, N,$$

η βοηθητική παλινδρόμηση ορίζεται ως εξής:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_{i2} + \alpha_3 x_{i3} + \alpha_4 x_{i2}^2 + \alpha_5 x_{i3}^2 + \alpha_6 x_{i2} x_{i3} + v_t$$

Με βάση αυτή υπολογίζεται το στατιστικό κριτήριο:

$$LM_W \equiv N \cdot R^2,$$

που ακολουθεί τη χ^2-κατανομή με L βαθμούς ελευθερίας, δηλ. $LM_W \equiv N \cdot R^2 \sim \chi^2{}_{(L)}$. $L = \frac{K(K+1)}{2} - 1$ είναι ο αριθμός των ερμηνευτικών μεταβλητών (εκτός της σταθεράς) της παραπάνω βοηθητικής παλινδρόμησης. Στην πράξη επειδή το L μπορεί να είναι μεγάλο, συνήθως διαλέγεται μια από τις τρεις κατηγορίες μεταβλητών για την εκτίμηση της βοηθητικής παλινδρόμησης και, συνήθως αυτή είναι η (ii).

<u>Ο έλεγχος ARCH</u>: Είναι κατάλληλος για το έλεγχο ετεροσκεδαστικότητας σε γραμμικά υποδείγματα που στηρίζονται σε χρονολογικές σειρές, δηλ.

$$y_t = \beta_1 + \beta_2 x_{t2} + \varepsilon_t .$$

Αυτός θεωρεί ότι η διακύμανση του διαταρακτικού όρου ε_t δίνεται από το ακόλουθο δυναμικό υπόδειγμα:

$$\sigma_t^2 \equiv E(\varepsilon_t^2) = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 ,$$

που αναφέρεται ως ARCH (Autoregressive Conditional Heteroscedasticity) – υπόδειγμα αυτοπαλίνδρομης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας.

Κάτω από ομοσκεδαστικότητα (μηδενική υπόθεση), το υπόδειγμα αυτό προβλέπει ότι $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_p = 0$. Για τη διεξαγωγή του ελέγχου ετεροσκεδαστικότητας ARCH, η βοηθητική παλινδρόμηση γράφεται ως:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{\varepsilon}_{t-1}^2 + \alpha_2 \hat{\varepsilon}_{t-2}^2 + \ldots + \alpha_p \hat{\varepsilon}_{t-p}^2 + v_t ,$$

όπου $\hat{\varepsilon}_{t\text{-}i}$ (i=0,1,…,p) αποτελούν τα κατάλοιπα του γραμμικού υποδείγματος που εκτιμάται με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, και με βάση αυτή υπολογίζεται το στατιστικό κριτήριο:

$$LM_{ARCH} \equiv (T-p)R^2 .$$

Κάτω από τη μηδενική υπόθεση, αυτό ακολουθεί την χ^2-κατανομή με p βαθμούς ελευθερίας, δηλ.

$$LM_{ARCH} = (T-p)R^2 \sim \chi^2_{(p)} .$$

Γ. Εκτίμηση γραμμικού υποδείγματος κάτω από ετεροσκεδαστικότητα – ο GLS εκτιμητής

Αν διαγνωστεί ύπαρξη ετεροσκεδαστικότητας, τότε ένας εκτιμητής που έχει προταθεί στη βιβλιογραφία για την εκτίμηση των συντελεστών του γραμμικού υποδείγματος που αποτελεσματικός σε θεωρητική βάση είναι ο γενικευμένος εκτιμητής ελαχίστων τετραγώνων (Generalised Least Squares –GLS). Για να παρουσιάσουμε τον GLS εκτιμητή, θεωρήστε το πολλαπλό γραμμικό υπόδειγμα

$$y_i = \beta_1 + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_K x_{iK} + \varepsilon_i \ , \ i=1, 2, \ldots, N$$

και υποθέστε η συνάρτηση διακύμανσης του διαταρακτικού όρου ε_i δίδεται ως:

$$\sigma_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_i , \quad [\text{ή τυπική απόκλιση: } \sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} = (\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2} \ ]$$

Διαιρώντας το υπόδειγμα με την τυπική απόκλιση συνεπάγεται:

$$\frac{y_i}{(\alpha_0+\alpha_1 z_i)^{1/2}} =$$

$$= \beta_1 \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_i)^{1/2}} + \beta_2 \frac{x_{i2}}{(\alpha_0+\alpha_1 z_i)^{1/2}} + \beta_3 \frac{x_{i3}}{(\alpha_0+\alpha_1 z_i)^{1/2}} + ... + \beta_K \frac{x_{iK}}{(\alpha_0+\alpha_1 z_i)^{1/2}} + \frac{\varepsilon_i}{(\alpha_0+\alpha_1 z_i)^{1/2}}$$

ή

$$y_i^* = \beta_1 x_{i1}^* + \beta_2 x_{i2}^* + \beta_3 x_{i3}^* + ... + \beta_K x_{iK}^* + \varepsilon_i^* .$$

Το μετασχηματισμένο υπόδειγμα έχει διαταρακτικό όρο ε_i^* που έχει μέση τιμή μηδέν, δηλ.

$$E(\varepsilon_i^*) = E\left[\left(\frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2}}\right)\varepsilon_i\right] = \left(\frac{1}{(\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2}}\right) E(\varepsilon_i) = 0, \ \forall \ i$$

και διακύμανση σταθερή (ίση με τη μονάδα, $\forall i$), δηλ.

$$Var(\varepsilon_i^*) = \frac{Var(\varepsilon_i)}{\left[(\alpha_0 + \alpha_1 z_i)^{1/2}\right]^2} = \frac{\alpha_0 + \alpha_1 x_i}{\alpha_0 + \alpha_1 x_i} = 1, \quad \forall i$$

Επομένως, αυτό πλέον δεν υποφέρει από το πρόβλημα της ετεροσκεδαστικότητας και έτσι, μπορεί να εκτιμηθεί με τη μέθοδο LS. *Ο εκτιμητής αυτός αναφέρεται ως **Γενικευμένος Εκτιμητής Ελαχίστων Τετραγώνων (GLS)**, καθώς στηρίζεται στο μετασχηματισμένο υπόδειγμα.*

Παρουσίαση του GLS με τη βοήθεια γραμμικής άλγεβρας:

Πρώτα παρατηρήστε ότι η μήτρα διακύμανσης-συνδιακύμανσης του διαταρακτικού όρου του παραπάνω υποδείγματος γράφεται ως

$$\mathbf{\Omega} \equiv \mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}') = \begin{bmatrix} (\alpha_0+\alpha_1 z_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\alpha_0+\alpha_1 z_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\alpha_0+\alpha_1 z_N) \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια, γράψτε το παραπάνω μετασχηματισμένο υπόδειγμα για όλες τις παρατηρήσεις i ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \dfrac{y_1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_1)^{1/2}} \\ \dfrac{y_2}{(\alpha_0+\alpha_1 z_2)^{1/2}} \\ \vdots \\ \dfrac{y_N}{(\alpha_0+\alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_1)^{1/2}} & \dfrac{x_{12}}{(\alpha_0+\alpha_1 z_1)^{1/2}} & \cdots & \dfrac{x_{1K}}{(\alpha_0+\alpha_1 z_1)^{1/2}} \\ \dfrac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_2)^{1/2}} & \dfrac{x_{22}}{(\alpha_0+\alpha_1 z_2)^{1/2}} & \cdots & \dfrac{x_{2K}}{(\alpha_0+\alpha_1 z_2)^{1/2}} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_N)^{1/2}} & \dfrac{x_{N2}}{(\alpha_0+\alpha_1 z_N)^{1/2}} & \cdots & \dfrac{x_{NK}}{(\alpha_0+\alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon_1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_1)^{1/2}} \\ \dfrac{\varepsilon_2}{(\alpha_0+\alpha_1 z_2)^{1/2}} \\ \vdots \\ \dfrac{\varepsilon_N}{(\alpha_0+\alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

ή

$$\begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1K}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2K}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1}^* & x_{N2}^* & \cdots & x_{NK}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2^* \\ \vdots \\ \varepsilon_N^* \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^*,$$

όπου

$$\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} y_1^* \\ y_2^* \\ \vdots \\ y_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_1)^{1/2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_2)^{1/2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \mathbf{Py}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^* = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^* \\ \varepsilon_2^* \\ \vdots \\ \varepsilon_N^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_1)^{1/2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_2)^{1/2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_N \end{bmatrix} = \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}$$

και

$$\mathbf{X}^* = \begin{bmatrix} x_{11}^* & x_{12}^* & \cdots & x_{1K}^* \\ x_{21}^* & x_{22}^* & \cdots & x_{2K}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{N1}^* & x_{N2}^* & \cdots & x_{NK}^* \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_1)^{1/2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_2)^{1/2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_{12} & \cdots & x_{1K} \\ 1 & x_{22} & \cdots & x_{2K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{N2} & \cdots & x_{NK} \end{bmatrix} = \mathbf{PX}$$

Η παραπάνω παρουσίαση του υποδείγματος σημαίνει ότι το μετασχηματισμένο υπόδειγμα προκύπτει ως:

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{X}^*\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}^* \Leftrightarrow \mathbf{Py} = \mathbf{PX}\boldsymbol{\beta} + \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}, \qquad \text{όπου}$$

$\mathbf{y}^* = \mathbf{Py}$, $\boldsymbol{\varepsilon}^* = \mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}$ και $\mathbf{X}^* = \mathbf{PX}$, και η μήτρα μετασχηματισμού **P** ορίζεται ως

$$\mathbf{P}=\begin{bmatrix} \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_1)^{1/2}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_2)^{1/2}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{(\alpha_0+\alpha_1 z_N)^{1/2}} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} (\alpha_0+\alpha_1 z_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (\alpha_0+\alpha_1 z_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (\alpha_0+\alpha_1 z_N) \end{bmatrix}^{-1/2}=\mathbf{\Omega}^{-1/2}$$

Ο διαταρακτικός όρος του μετασχηματισμένου υποδείγματος πληροί τις ακόλουθες *κλασσικές ιδιότητες*:

$$\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^*)=\mathrm{E}(\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{P}\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon})=\mathbf{0}$$

και

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\boldsymbol{\varepsilon}^*) &= \mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^*\boldsymbol{\varepsilon}^{*\prime}) = \mathrm{E}(\mathbf{P}\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}'\mathbf{P}') \\ &= \mathbf{P}\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}')\mathbf{P}' = \mathbf{P}\mathbf{\Omega}\mathbf{P}' = \mathbf{\Omega}^{-1/2}\mathbf{\Omega}^{1/2}\mathbf{\Omega}^{1/2}\mathbf{\Omega}^{-1/2} = \mathbf{I}\end{aligned}$$

καθώς $\mathbf{P}=\mathbf{\Omega}^{-1/2}$.

Με βάση το μετασχηματισμένο υπόδειγμα, O GLS εκτιμητής δίδεται ως:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}} =(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{y}^* =(\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{y}) = (\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}(\mathbf{X}'\mathbf{\Omega}^{-1}\mathbf{y})$$

καθώς $\mathbf{P}'\mathbf{P}=\mathbf{\Omega}^{-1/2}\mathbf{\Omega}^{-1/2}=\mathbf{\Omega}^{-1}$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι αυτός είναι γραμμικός, αμερόληπτος και αποτελεσματικός -BLUE), καθώς και συνεπής σε μεγάλα δείγμα.

Με βάση τη σχέση $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}=\boldsymbol{\beta}+(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^*$, η διακύμανση του $\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}$ βρίσκεται ως

$$\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}})=\mathrm{E}\left[(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}-\boldsymbol{\beta})(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{\mathrm{GLS}}-\boldsymbol{\beta})'\right]=\mathrm{E}\left[(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*)^{-1}\mathbf{X}^{*\prime}\boldsymbol{\varepsilon}^*\boldsymbol{\varepsilon}^{*\prime}\mathbf{X}^*(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^*)^{-1}\right]$$

$$= (\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^{*})^{-1}\mathbf{X}^{*\prime}\mathrm{E}(\boldsymbol{\varepsilon}^{*}\boldsymbol{\varepsilon}^{*\prime})\mathbf{X}^{*}(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^{*})^{-1} = (\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^{*})^{-1}\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{I}\mathbf{X}^{*}(\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^{*})^{-1}$$

$$= (\mathbf{X}^{*\prime}\mathbf{X}^{*})^{-1} = (\mathbf{X}'\mathbf{P}'\mathbf{P}\mathbf{X})^{-1} = (\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{X})^{-1}.$$

<u>Ο εφικτός (feasible) GLS εκτιμητής -FGLS</u>: Στη πράξη τα στοιχεία της μήτρας διακύμανσης-συνδιακύμανσης $\boldsymbol{\Omega}$ (στο παράδειγμά μας, α_0 και α_1), δεν είναι γνωστά και θα πρέπει να εκτιμηθούν. Αυτό μπορεί να γίνει σε πρώτο στάδιο, χρησιμοποιώντας τα κατάλοιπα του υποδείγματος με βάση τον εκτιμητή LS. Για το παράδειγμά μας, η βοηθητική παλινδρόμηση αυτή δίνεται ως:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = \alpha_0 + \alpha_1 z_i + v_i,$$

όπου $\hat{\varepsilon}_i = y_i - \hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_2 x_{i2} - \ldots - \hat{\beta}_K x_{iK}$. Η μέθοδος αυτή παρέχει συνεπείς εκτιμήσεις των παραμέτρων α_0 και α_1. Αντικαθιστώντας αυτές στη μήτρα $\boldsymbol{\Omega}$ (ή χρησιμοποιώντας τες για το μετασχηματισμό του υποδείγματος (9)) παίρνουμε τις GLS εκτιμήσεις των συντελεστών του γραμμικού υποδείγματος. *Ο GLS εκτιμητής αυτός αναφέρεται στη βιβλιογραφία ως εφικτός (Feasible) GLS - FGLS. Αυτός παρέχει συνεπείς και ασυμπτωτικά αποτελεσματικές εκτιμήσεις αυτού, καθώς στηρίζεται σε συνεπείς εκτιμήσεις των παραμέτρων της συνάρτησης διακύμανσης.*

Στη πράξη έχει παρατηρηθεί ότι ο FGLS εκτιμητής απαιτεί πολύ μεγάλο αριθμό παρατηρήσεων (πχ πάνω από N=500) για να εκτιμήσει τους συντελεστές ενός γραμμικού υποδείγματος ικανοποιητικά. Για αυτό στις εμπειρικές μελέτες τείνει να χρησιμοποιείται ο κλασσικός LS εκτιμητής, όπου τα τυπικά σφάλματά του διορθώνονται εκτιμώντας τη διακυμανσή τους (διαγώνια στοιχεία μήτρας $\mathrm{Var}(\hat{\boldsymbol{\beta}}) = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\boldsymbol{\Omega}\mathbf{X}(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}$) με τη μέθοδο White