Θεωρία Μέτρου

Πρόχειρες Σημειώσεις

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2005–06

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

σ–άλγεβρες

1.1 σ–άλγεβρες

Ορισμός 1.1.1 (σ-άλγεβρα). Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ λέγεται **σ–άλγεβρα στο** X αν είναι μη κενή, κλειστή ως προς συμπληρώματα και κλειστή ως προς άπειρες αριθμήσιμες ενώσεις. Το ζευγάρι $(X, \mathcal{A})$ λέγεται **μετρήσιμος χώρος**.

Πρόταση 1.1.2. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα στο X. Τότε, η $\mathcal{A}$ περιέχει το $\emptyset$ και το X, και είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις, πεπερασμένες και άπειρες αριθμήσιμες τομές, συνολοθεωρητικές διαφορές.

Παραδείγματα 1.1.3. Αν $X \neq \emptyset$ τότε οι $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{A}_2 = \{\emptyset, E, E^c, X\}$ όπου E μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X, $\mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(X)$ (το δυναμοσύνολο του X), είναι σ–άλγεβρες στο X.

Αν X είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο τότε η

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}$$

είναι σ–άλγεβρα στο X.

Πρόταση 1.1.4. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων ανά δύο στοιχείων της $\mathcal{A}$ ώστε: $B_n \subseteq A_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $A_1 \cup \cdots \cup A_N = B_1 \cup \cdots \cup B_N$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Ειδικότερα,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Το ίδιο ισχύει για πεπερασμένες ακολουθίες $\{A_n\}_{n=1}^{N}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$.

1.2 Παραγόμενες σ–άλγεβρες

Πρόταση 1.2.1. Αν $(\mathcal{A})_{i\in I}$ είναι μια μη κενή οικογένεια σ–αλγεβρών στο X τότε η $\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ είναι σ–άλγεβρα στο X.

Ορισμός 1.2.2 (παραγόμενη σ–άλγεβρα). Αν $\mathcal{F}$ είναι μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X τότε η

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A}\ \sigma\text{–άλγεβρα και } \mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}\}$$

είναι (καλά ορισμένη) σ–άλγεβρα στο X. Η $\sigma(\mathcal{F})$ είναι η **σ–άλγεβρα που παράγεται από την** $\mathcal{F}$.

Πρόταση 1.2.3. Αν $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ τότε η $\sigma(\mathcal{F})$ είναι η μικρότερη σ–άλγεβρα στο X η οποία περιέχει την $\mathcal{F}$: αν $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ τότε $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$.

Παραδείγματα 1.2.4. (α) Αν E είναι ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X και $\mathcal{F} = \{E\}$ τότε $\sigma(\mathcal{F}) = \{\emptyset, E, E^c, X\}$.

(β) Αν X είναι ένα υπεραριθμήσιμο σύνολο και $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο}\}$, τότε $\sigma(\mathcal{F}) = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}$.

1.3 Borel σ–άλγεβρες

Ορισμός 1.3.1 (Borel σ–άλγεβρα). Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω $\mathcal{T}$ η οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του X. Η σ–άλγεβρα

$$\mathcal{B}(X) := \sigma(\mathcal{T})$$

είναι η **Borel σ–άλγεβρα του** X. Τα στοιχεία της $\mathcal{B}(X)$ είναι τα **Borel σύνολα** του X.

Τα ανοικτά και τα κλειστά υποσύνολα του X είναι Borel σύνολα. Το ίδιο ισχύει για τις αριθμήσιμες τομές ανοικτών συνόλων (τα λεγόμενα G_δ σύνολα) και τις αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων (τα λεγόμενα F_σ σύνολα).

Πρόταση 1.3.2. Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και έστω $\mathcal{F}$ η οικογένεια των κλειστών υποσυνόλων του X. Τότε,

$$\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}(X).$$

Παράδειγμα 1.3.3 (Ευκλείδειος χώρος). Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ με την Ευκλείδεια μετρική. **Διάστημα** λέμε κάθε σύνολο της μορφής

$$\prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j] \quad \text{ή} \quad \prod_{j=1}^{n}(a_j,b_j) \quad \text{ή} \quad \prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j) \quad \text{ή} \quad \prod_{j=1}^{n}(a_j,b_j]$$

όπου $-\infty < a_j < b_j < +\infty$ (στην πρώτη περίπτωση, $a_j \leq b_j$). Τα παραπάνω διαστήματα ονομάζονται κλειστά, ανοικτά, κλειστά–ανοικτά και ανοικτά–κλειστά αντίστοιχα. Κάθε διάστημα είναι Borel σύνολο ως πεπερασμένη τομή ανοικτών ή/και κλειστών ημιχώρων.

Πρόταση 1.3.4. Έστω $\mathcal{E}_i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ οι οικογένειες των κλειστών, ανοικτών, κλειστών–ανοικτών και ανοικτών–κλειστών διαστημάτων αντίστοιχα. Για κάθε $i = 1, 2, 3, 4$ ισχύει

$$\sigma(\mathcal{E}_i) = \mathcal{B}(X).$$

1.4 Άλγεβρες και μονότονες κλάσεις

Ορισμός 1.4.1 (άλγεβρα). Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ λέγεται **άλγεβρα στο** X αν είναι μη κενή, κλειστή ως προς συμπληρώματα και κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις.

Πρόταση 1.4.2. Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα στο X. Τότε, η $\mathcal{A}$ περιέχει το $\emptyset$ και το X, και είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές και συνολοθεωρητικές διαφορές.

Παρατηρήσεις 1.4.3. (α) Κάθε σ–άλγεβρα είναι άλγεβρα.
(β) Το αντίστροφο δεν ισχύει. Αν $X = \mathbb{N}$ και αν

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{N} \,|\, A \text{ πεπερασμένο ή } A^c \text{ πεπερασμένο}\},$$

τότε η $\mathcal{A}$ είναι άλγεβρα αλλά δεν είναι σ–άλγεβρα στο $\mathbb{N}$.

Παράδειγμα 1.4.4 (Ευκλείδειος χώρος). Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$ με την Ευκλείδεια μετρική. **Γενικευμένο διάστημα** λέμε κάθε σύνολο της μορφής

$$P = \prod_{j=1}^{n} (a_j, b_j], \ \textit{όπου} \ -\infty \leq a_j < b_j \leq +\infty.$$

Πρόταση 1.4.5. Η οικογένεια

$$\mathcal{A} = \{P_1 \cup \cdots \cup P_k \,|\, k \in \mathbb{N},\ P_1, \ldots, P_k \text{ ξένα γενικευμένα διαστήματα}\}$$

είναι άλγεβρα.

Απόδειξη. Δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η τομή δύο γενικευμένων διαστημάτων είναι κενή ή γενικευμένο διάστημα.

(ii) Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές.

(iii) Το συμπλήρωμα γενικευμένου διαστήματος ανήκει στην $\mathcal{A}$.

(iv) Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα.

(v) Η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις.

Ορισμός 1.4.6 (μονότονη κλάση). Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $\mathcal{A}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X. Η $\mathcal{A}$ λέγεται **μονότονη κλάση στο** X αν είναι μη κενή, κλειστή ως προς αύξουσες αριθμήσιμες ενώσεις και κλειστή ως προς φθίνουσες αριθμήσιμες τομές.

Παρατηρήσεις 1.4.7. (α) Κάθε σ–άλγεβρα είναι μονότονη κλάση (το αντίστροφο δεν ισχύει).

(β) Αν μια άλγεβρα είναι και μονότονη κλάση, τότε είναι σ–άλγεβρα.

Πρόταση 1.4.8. Αν $(\mathcal{A})_{i\in I}$ είναι μια μη κενή οικογένεια μονότονων κλάσεων στο X τότε η $\bigcap_{i\in I}\mathcal{A}_i$ είναι μονότονη κλάση στο X.

Ορισμός 1.4.9 (παραγόμενη μονότονη κλάση). Αν $\mathcal{F}$ είναι μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X τότε η

$$m(\mathcal{F}) = \bigcap\{\mathcal{A}\,|\,\mathcal{A} \text{ μονότονη κλάση και } \mathcal{A}\supseteq\mathcal{F}\}$$

είναι (καλά ορισμένη) μονότονη κλάση στο X. Η $m(\mathcal{F})$ είναι η μονότονη κλάση που παράγεται από την $\mathcal{F}$.

Πρόταση 1.4.10. Αν $\emptyset\neq\mathcal{F}\subseteq\mathcal{P}(X)$ τότε η $m(\mathcal{F})$ είναι η μικρότερη μονότονη κλάση στο X η οποία περιέχει την $\mathcal{F}$: αν $\mathcal{A}$ είναι μονότονη κλάση και $\mathcal{F}\subseteq\mathcal{A}$ τότε $m(\mathcal{F})\subseteq\mathcal{A}$.

Πρόταση 1.4.11. Αν $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα στο X, τότε

$$m(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A}).$$

1.5 Περιορισμός σ–άλγεβρας

Πρόταση 1.5.1. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα στο X και έστω Y ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X. Ορίζουμε

$$\mathcal{A}\restriction Y = \{A\cap Y\,|\,A\in\mathcal{A}\}.$$

Τότε, η $\mathcal{A}\restriction Y$ είναι σ–άλγεβρα στο Y.

Ορισμός 1.5.2 (περιορισμός σ–άλγεβρας). Η $\mathcal{A} \restriction Y$ λέγεται **περιορισμός** της $\mathcal{A}$ στο Y. Γενικότερα, αν $\mathcal{F}$ είναι μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X και αν Y είναι ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X, τότε η οικογένεια $\mathcal{F} \restriction Y = \{A \cap Y \mid A \in \mathcal{F}\}$ λέγεται περιορισμός της $\mathcal{F}$ στο Y.

Πρόταση 1.5.3. Έστω $\mathcal{F}$ μια μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του X και έστω Y ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X. Τότε,

$$\sigma(\mathcal{F} \restriction Y) = \sigma(\mathcal{F}) \restriction Y.$$

Πρόταση 1.5.4. Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Ως συνήθως, αν Y είναι ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X, θεωρούμε το Y σαν υπόχωρο του X με τη μετρική $\rho|_{Y\times Y}$. Τότε,

$$\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X) \restriction Y.$$

1.6 Ασκήσεις

1. Έστω X ένα μη κενό σύνολο και έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία υποσυνόλων του X. Ορίζουμε

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=k}^{\infty} A_j\right) \quad \text{και} \quad \liminf A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{j=k}^{\infty} A_j\right).$$

Δείξτε τα εξής:

(α) $\limsup A_n = \{x \in X : x \in A_n \text{ για άπειρες τιμές του } n\}$.

(β) $\liminf A_n = \{x \in X : \text{ υπάρχει } n_0(x) \in \mathbb{N} \text{ ώστε } x \in A_n \text{ για κάθε } n \geq n_0\}$.

(γ) $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$. Δώστε παράδειγμα στο οποίο ο εγκλεισμός να είναι γνήσιος.

2. Έστω X ένα μη κενό σύνολο με άπειρα στοιχεία. Ορίζουμε

$$\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid \text{το } A \text{ έχει δύο στοιχεία}\}.$$

Περιγράψτε τις $\sigma(\mathcal{F})$ και $m(\mathcal{F})$.

3. (α) Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα στο X και έστω $f : X \to Y$. Δείξτε ότι η οικογένεια

$$\{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

είναι σ–άλγεβρα στο Y.

(β) Έστω $\mathcal{C}$ μια σ–άλγεβρα στο Y και έστω $\mathcal{E}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Y για την οποία ισχύει $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{C}$. Δείξτε ότι αν $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{E}$, τότε $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{C}$.

(γ) Έστω (X,ρ) και (Y,d) μετρικοί χώροι και έστω $f : X \to Y$ συνεχής. Δείξτε ότι: αν το B είναι Borel σύνολο στον Y, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι Borel σύνολο στον X.

4. (α) Δείξτε ότι η Borel σ–άλγεβρα του $\mathbb{R}^n$ παράγεται από την οικογένεια των ανοικτών ημιχώρων της μορφής $\{x = (x_1,\dots,x_n) \,|\, x_j > a_j\}$, όπου $j = 1,\dots,n$ και $a_j \in \mathbb{R}$.

(β) Έστω $\mathcal{F} = \{B(x,r) \,|\, x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ ($B(x,r)$ είναι η ανοικτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r). Δείξτε ότι η Borel σ–άλγεβρα του $\mathbb{R}^n$ παράγεται από την $\mathcal{F}$.

5. Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος. Δείξτε ότι κάθε κλειστό υποσύνολο του X είναι G_δ σύνολο και κάθε ανοικτό υποσύνολο του X είναι F_σ σύνολο.

6. (α) Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$ είναι G_δ σύνολο.

(β) Έστω $f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις ($k = 1,2,\dots$). Δείξτε ότι το

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{υπάρχει το } \lim_{k\to\infty} f_k(x)\}$$

είναι $F_{\sigma\delta}$ σύνολο, δηλαδή, αριθμήσιμη τομή F_σ συνόλων.

7. Έστω $\mathcal{F}$ μη κενή οικογένεια υποσυνόλων του μη κενού συνόλου X. Δείξτε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια $\mathcal{C}_A$ της $\mathcal{F}$ ώστε $A \in \sigma(\mathcal{C}_A)$.

Κεφάλαιο 2

Μέτρα

2.1 Μέτρα

Ορισμός 2.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Μια συνάρτηση $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ λέγεται **μέτρο** στον $(X, \mathcal{A})$ αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\mu(\emptyset) = 0$.

(β) Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία ξένων στοιχείων της $\mathcal{A}$ τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Η τριάδα $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται **χώρος μέτρου**.

Πρόταση 2.1.2. Κάθε μέτρο είναι πεπερασμένα προσθετικό: αν $A_1, \ldots, A_N$ είναι ξένα στοιχεία της $\mathcal{A}$ τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{N} A_n\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu(A_n).$$

Παραδείγματα 2.1.3. (α) Το μηδενικό μέτρο: $\mu(A) = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.
(β) Έστω X υπεραριθμήσιμο σύνολο και

$$\mathcal{A} = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Θέτουμε $\mu(A) = 0$ αν το A είναι αριθμήσιμο και $\mu(A) = 1$ αν το A^c είναι αριθμήσιμο. Το μ είναι μέτρο.

Θεώρημα 2.1.4 (βασικές ιδιότητες). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου.

(α) Μονοτονία: Αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \subseteq B$ τότε $\mu(A) \leq \mu(B)$.

(β) Αν $A, B \in \mathcal{A}$, $\mu(A) < \infty$ και $A \subseteq B$ τότε $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

(γ) Υποπροσθετικότητα: Αν $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ είναι ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) \le \sum_{n=1}^\infty \mu(A_n).$$

(δ) Συνέχεια: Αν $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ τότε

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(ε) Συνέχεια: Αν $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $\mu(A_1) < \infty$, τότε

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Ορισμός 2.1.5 (κατηγορίες μέτρων). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Το μ λέγεται:

(α) **πεπερασμένο**, αν $\mu(X) < \infty$.

(β) **μέτρο πιθανότητας**, αν $\mu(X) = 1$.

(γ) $\sigma-$**πεπερασμένο**, αν υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $X = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$.

(δ) **ημιπεπερασμένο**, αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$ μπορούμε να βρούμε $E \subset A$ στην $\mathcal{A}$ με $0 < \mu(E) < \infty$.

Παρατήρηση 2.1.6. Έστω μ ένα $\sigma-$πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Τότε,

(α) Υπάρχει ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ ξένων στοιχείων της $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(B_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $X = \bigcup_{n=1}^\infty B_n$.

(β) Υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ ώστε $\mu(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $X = \bigcup_{n=1}^\infty E_n$.

Πρόταση 2.1.7. Κάθε $\sigma-$πεπερασμένο μέτρο είναι ημιπεπερασμένο.

Ορισμός 2.1.8 (σύνολα μέτρου 0). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Λέμε ότι το $E \in \mathcal{A}$ είναι **μέτρου** 0 αν $\mu(E) = 0$.

Πρόταση 2.1.9. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου.

(α) Αν $\mu(E) = 0$, $F \in \mathcal{A}$ και $F \subseteq E$, τότε $\mu(F) = 0$.

(β) Αν $\{E_n\}_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ και $\mu(E_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε $\mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty E_n\right) = 0$.

2.2 Σημειακές κατανομές

Ορισμός 2.2.1. Έστω $I \neq \emptyset$ και $\alpha : I \to [0,\infty]$. Γράφουμε α_i αντί για $\alpha(i)$. Ορίζουμε

$$\sum_{i\in I} \alpha_i = \sup\left\{\sum_{i\in F} \alpha_i \,|\, F \subseteq I,\ F \neq \emptyset, F \text{ πεπερασμένο}\right\}.$$

Επίσης, συμφωνούμε ότι $\sum_{i\in\emptyset} \alpha_i = 0$.

Παρατήρηση 2.2.2. Αν $\sum_{i\in I} \alpha_i < \infty$ τότε το σύνολο $J = \{i \in I : \alpha_i > 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

Πρόταση 2.2.3. Έστω $X \neq \emptyset$ και $\alpha : X \to [0,\infty]$. Ορίζουμε $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ με

$$\mu(A) = \sum_{x\in A} \alpha_x$$

για κάθε $A \subseteq X$. Τότε, το μ είναι μέτρο (η **σημειακή κατανομή που επάγεται από την** α). Ο α_x είναι η **μάζα** στο σημείο x.

Παραδείγματα 2.2.4. (α) Αν $\alpha_x = 1$ για κάθε $x \in X$ τότε το $\mu(A)$ ισούται με τον πληθάριθμο του A (το μ λέγεται **μέτρο απαρίθμησης**).

(β) Έστω $X \neq \emptyset$. Σταθεροποιούμε $x_0 \in X$ και ορίζουμε $\alpha_x = 1$ αν $x = x_0$ και $\alpha_x = 0$ αν $x \neq x_0$. Τότε, η σημειακή κατανομή δ_{x_0} που επάγεται από την α είναι η εξής: αν $A \subseteq X$ και $x_0 \in A$ τότε $\delta_{x_0}(A) = 1$, ενώ αν $A \subseteq X$ και $x_0 \notin A$ τότε $\delta_{x_0}(A) = 0$. Το δ_{x_0} είναι το **μέτρο Dirac** στο x_0.

2.3 Πλήρη μέτρα

Ορισμός 2.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Λέμε ότι το μ είναι **πλήρες** αν ικανοποιεί το εξής: αν $\mu(E) = 0$ και $F \subseteq E$ τότε $F \in \mathcal{A}$ (οπότε, $\mu(F) = 0$). Αν το μ είναι πλήρες, ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ λέγεται **πλήρης χώρος μέτρου**.

Ορισμός 2.3.2. Αν $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ και $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ είναι δύο χώροι μέτρου στο ίδιο σύνολο X, ο $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ λέγεται **επέκταση** του $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ αν ισχύουν τα εξής:

(α) $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2$.

(β) Για κάθε $A \in \mathcal{A}_1$ ισχύει $\mu_2(A) = \mu_1(A)$.

Θεώρημα 2.3.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Υπάρχει μοναδικός χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ που ικανοποιεί τα εξής:

(α) Ο $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ είναι επέκταση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

(β) Ο $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ είναι πλήρης χώρος μέτρου.

(γ) Αν $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ είναι πλήρης επέκταση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$, τότε ο $(X, \mathcal{A}_2, \mu_2)$ είναι επέκταση του $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$.

Ορισμός 2.3.4. Η πλήρης επέκταση $(X, \mathcal{A}_1, \mu_1)$ του προηγούμενου Θεωρήματος λέγεται **πλήρωση** του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

Παράδειγμα 2.3.5 (μη πλήρες μέτρο). Έστω $X \neq \emptyset$ και έστω $x_0 \in X$. Έστω $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα που περιέχει το $\{x_0\}$ και περιέχεται γνήσια στο $\mathcal{P}(X)$. Ορίζουμε $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με $\mu(A) = 1$ αν $x_0 \in A$ και $\mu(A) = 0$ αν $x_0 \notin A$. Το μ δεν είναι πλήρες.

Παράδειγμα τέτοιας σ–άλγεβρας: θεωρήστε τυχόν σύνολο με περισσότερα από δύο στοιχεία και την $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$, όπου $\mathcal{F} = \{\, \{x_0\}\, \}$.

2.4 Περιορισμός

Πρόταση 2.4.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Αν $\emptyset \neq Y \subseteq X$, ορίζουμε $\mu_Y : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ με

$$\mu_Y(A) = \mu(A \cap Y) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Τότε, το μ_Y είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Επίσης, $\mu_Y(A) = \mu(A)$ αν $A \subseteq Y$ και $\mu_Y(A) = 0$ αν $A \cap Y = \emptyset$.

Ορισμός 2.4.2 (περιορισμός στο Y). Το μέτρο μ_Y λέγεται **περιορισμός του μ στο Y**.

Λήμμα 2.4.3. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω $\emptyset \neq Y \subseteq X$. Τότε,

$$\mathcal{A} \restriction Y = \{A \in \mathcal{A} \,|\, A \subseteq Y\}.$$

Πρόταση 2.4.4. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Αν $\emptyset \neq Y \subseteq X$, ορίζουμε $\mu \restriction Y : \mathcal{A} \restriction Y \to [0, \infty]$ με

$$(\mu \restriction Y)(A) = \mu(A) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A} \restriction Y.$$

Τότε, το $\mu \restriction Y$ είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A} \restriction Y)$.

Ορισμός 2.4.5 (περιορισμός στην $\mathcal{A} \restriction Y$). Το μέτρο $\mu \restriction Y$ λέγεται **περιορισμός του μ στην $\mathcal{A} \restriction Y$**.

2.5 Μοναδικότητα

Θεώρημα 2.5.1. Έστω $\mathcal{A}$ μια άλγεβρα υποσυνόλων του μη κενού συνόλου X και έστω μ, ν δύο μέτρα στην $\sigma(\mathcal{A})$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ στοιχείων της $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\mu(A_n) < \infty$, $\nu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε επίσης ότι

$$\mu(A) = \nu(A) \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

Τότε, τα μ και ν συμπίπτουν: $\mu(A) = \nu(A)$ για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{A})$.

2.6 Ασκήσεις

8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία συνόλων από την $\mathcal{A}$. Δείξτε ότι:

(α) $\mu\left(\liminf\limits_{n\to\infty} A_n\right) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

(β) Αν $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ τότε $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) \leq \mu\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right)$.

(γ) Αν $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$ τότε $\mu\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) = 0$.

9. Έστω $\{\mu_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία μέτρων στον $(X, \mathcal{A})$: δηλαδή, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\mu_n(A) \leq \mu_{n+1}(A)$. Ορίζουμε

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A) \quad (A \in \mathcal{A}).$$

Δείξτε ότι το μ είναι μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$.

10. Έστω μ ένα σ–πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$ και έστω $\{A_i\}_{i\in I}$ μια οικογένεια ξένων στοιχείων της $\mathcal{A}$. Δείξτε ότι για κάθε $E \in \mathcal{A}$ το σύνολο $\{i \in I : \mu(E \cap A_i) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο.

11. Έστω μ ένα ημιπεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Δείξτε ότι αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) = \infty$ τότε, για κάθε $M > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ ώστε $B \subset A$ και $M < \mu(B) < \infty$.

12. Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα στο X και έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \sigma(\mathcal{F}))$. Δείξτε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \triangle F) < \varepsilon$, όπου $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$ είναι η συμμετρική διαφορά των A και F.

13. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου. Αν για κάποια $A \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq X$ έχουμε $A \triangle B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$, δείξτε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(B) = \mu(A)$.

14. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Λέμε ότι το $E \subseteq X$ είναι *τοπικά μετρήσιμο* αν $E \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$. Ορίζουμε

$$\tilde{\mathcal{A}} = \{E \subseteq X \mid E \text{ τοπικά μετρήσιμο}\}.$$

(α) Δείξτε ότι $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$ και ότι η $\tilde{\mathcal{A}}$ είναι σ–άλγεβρα. Αν $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ τότε λέμε ότι ο $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι *κορεσμένος χώρος μέτρου*.

(β) Δείξτε ότι αν το μ είναι σ–πεπερασμένο τότε $\tilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$.

(γ) Ορίζουμε $\tilde{\mu}$ στην $\tilde{\mathcal{A}}$ θέτοντας $\tilde{\mu}(A) = \mu(A)$ αν $A \in \mathcal{A}$ και $\tilde{\mu}(A) = \infty$ αν $A \in \tilde{\mathcal{A}} \setminus \mathcal{A}$. Δείξτε ότι ο $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι κορεσμένος χώρος μέτρου.

15. Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Δείξτε ότι τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Το σύνολο $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι άπειρο.

(β) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $0 < \mu(A) < \varepsilon$.

(γ) Υπάρχει ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων από την $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Κεφάλαιο 3

Εξωτερικά μέτρα

3.1 Εξωτερικά μέτρα

Ορισμός 3.1.1 (εξωτερικό μέτρο). Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια απεικόνιση $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ λέγεται **εξωτερικό μέτρο στο** X αν ικανοποιεί τα εξής:

(α) $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(β) Αν $A \subseteq B \subseteq X$ τότε $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$.

(γ) Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία υποσυνόλων του X τότε

$$\mu^* \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Ορισμός 3.1.2 (σ–κάλυψη). Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια οικογένεια $\mathcal{C}$ υποσυνόλων του X λέγεται σ–**κάλυψη** για το X αν υπάρχουν $C_1, \ldots, C_n, \ldots$ στην $\mathcal{C}$ ώστε $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Θεώρημα 3.1.3 (κατασκευή εξωτερικών μέτρων). Έστω $\mathcal{C}$ μια σ–κάλυψη για το μη κενό σύνολο X, και έστω $\tau : \mathcal{C} \to [0, \infty]$ τυχούσα απεικόνιση με $\tau(\emptyset) = 0$. Για κάθε $A \subseteq X$ ορίζουμε

$$\mu^*(A) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \tau(C_j) \,|\, C_j \in \mathcal{C},\ A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j \right\}.$$

Τότε, η απεικόνιση μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X.

3.2 Ο ορισμός του Καραθεοδωρή

Ορισμός 3.2.1 (μ^*–μετρήσιμο σύνολο). Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X. Λέμε ότι ένα σύνολο $A \subseteq X$ είναι μ^*–**μετρήσιμο** αν

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(E)$$

για κάθε $E \subseteq X$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}_{\mu^*}$ την οικογένεια όλων των μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X.

Θεώρημα 3.2.2 (θεώρημα του Καραθεοδωρή). Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X. Τότε, η οικογένεια $\mathcal{A}_{\mu^*}$ των μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X είναι σ–άλγεβρα. Αν συμβολίσουμε με μ τον περιορισμό της απεικόνισης μ^* στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$, τότε η τριάδα $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \mu)$ είναι ένας πλήρης χώρος μέτρου.

Απόδειξη. Δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(ii) Αν $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ τότε $A^c \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(iii) Αν $A, B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ τότε $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(iv) Η $\mathcal{A}_{\mu^*}$ είναι άλγεβρα.

(v) Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) = \mu^*\left(E \cap \left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right)$$

για κάθε $E \subseteq X$.

(vi) Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$ τότε $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(vii) Η $\mathcal{A}_{\mu^*}$ είναι σ–άλγεβρα.

(viii) Το $\mu := \mu^*|_{\mathcal{A}_{\mu^*}}$ είναι μέτρο.

(ix) Το μ είναι πλήρες μέτρο.

Παρατήρηση 3.2.3. Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο μη κενό σύνολο X. Τότε,

(α) Αν $B \subseteq X$ και $\mu^*(B) = 0$ τότε το B είναι μ^*–μετρήσιμο.

(β) Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$ τότε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E \cap A_n) = \mu^*\left(E \cap \left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\right)$$

για κάθε $E \subseteq X$.

3.3 Ασκήσεις

16. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Ορίζουμε $\mu^*(\emptyset) = 0$ και $\mu^*(E) = 1$ για κάθε μη κενό $E \subseteq X$. Δείξτε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X και βρείτε όλα τα μ^*–μετρήσιμα υποσύνολα του X.

17. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{C}$ που αποτελείται από το κενό σύνολο και από όλα τα δισύνολα φυσικών αριθμών. Ορίζουμε $\tau(\emptyset) = 0$ και $\tau(\{m, n\}) = 2$ για κάθε $\{m, n\} \in \mathcal{C}$. Η $\mathcal{C}$ είναι σ–κάλυψη του $\mathbb{N}$, οπότε η τ επάγει ένα εξωτερικό μέτρο μ^* στο $\mathbb{N}$. Υπολογίστε το $\mu^*(E)$ για κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$ και βρείτε όλα τα μ^*–μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{N}$.

18. Για κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε $\varphi(E) = \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{card}(E \cap \{1, \ldots, n\})$ (όπου $\operatorname{card}(A)$ είναι ο πληθάριθμος του A). Εξετάστε αν η φ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{N}$.

19. Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο X. Αν $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X, δείξτε ότι για κάθε $E \subseteq X$ ισχύει

$$\lim_{n\to\infty} \mu^*(A_n \cap E) = \mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)\big).$$

20. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Για κάθε $E \subseteq X$ ορίζουμε

$$\mu^*(E) = \inf\{\mu(A) \mid A \in \mathcal{A},\ E \subseteq A\}.$$

(α) Δείξτε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο X.

(β) Έστω $\overline{\mu}$ το μέτρο που επάγεται από το μ^* στην $\mathcal{A}_{\mu^*}$. Αν το αρχικό μέτρο μ είναι σ–πεπερασμένο, δείξτε ότι ο $(X, \mathcal{A}_{\mu^*}, \overline{\mu})$ είναι η πλήρωση του $(X, \mathcal{A}, \mu)$.

21. Έστω μ^* ένα εξωτερικό μέτρο στο X και έστω μ το επαγόμενο μέτρο στη σ–άλγεβρα $\mathcal{A}_{\mu^*}$ των μ^*–μετρήσιμων συνόλων. Αν $E, G \subseteq X$ τότε λέμε ότι το G είναι ένα μ^*–**μετρήσιμο κάλυμα** του E αν:

> $E \subseteq G$, $G \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ με $A \subseteq G \setminus E$ ισχύει $\mu(A) = 0$.

(α) Δείξτε ότι αν G_1, G_2 είναι δύο μ^*–μετρήσιμα καλύματα του ιδίου $E \subseteq X$, τότε $\mu(G_1 \triangle G_2) = 0$, και συνεπώς, $\mu(G_1) = \mu(G_2)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $E \subseteq G$, $G \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και $\mu^*(E) = \mu(G) < +\infty$. Δείξτε ότι το G είναι μ^*–μετρήσιμο κάλυμα του E.

22. Λέμε ότι ένα $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει *σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο* αν για κάθε $\alpha > 0$ το σύνολο $\{x \in E : |x| > \alpha\}$ είναι υπεραριθμήσιμο. Ορίζουμε $\mu^*(E) = 0$

αν το E είναι αριθμήσιμο, $\mu^*(E) = 1$ αν το E είναι υπεραριθμήσιμο αλλά δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο, και $\mu^*(E) = \infty$ αν το E έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Δείξτε ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$ και ότι

$$\mathcal{A}_{\mu^*} = \{A \subseteq \mathbb{R} \,|\, A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Είναι σωστό ότι κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει μετρήσιμο κάλυμα;

Κεφάλαιο 4

Μέτρο Lebesgue στον Ευκλείδειο χώρο

4.1 Μέτρο Lebesgue

Ορισμός 4.1.1. Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}$ την οικογένεια των ανοικτών διαστημάτων $R = \prod_{j=1}^{k}(a_j, b_j)$, $-\infty < a_j \leq b_j < \infty$ στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^k$. Η $\mathcal{C}$ είναι σ–κάλυψη του $\mathbb{R}^k$. Για κάθε ανοικτό διάστημα R ορίζουμε

$$\tau(R) = \mathrm{vol}_k(R) = \prod_{j=1}^{k}(b_j - a_j).$$

Η $\mathcal{C}$ και η τ επάγουν ένα εξωτερικό μέτρο λ_k^* στον $\mathbb{R}^k$. Αν $\mathcal{L}_k$ είναι η σ–άλγεβρα των λ_k^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$ τότε το $\lambda_k = \lambda_k^*|_{\mathcal{L}_k}$ είναι πλήρες μέτρο στην $\mathcal{L}_k$.

Το λ_k^* είναι το **εξωτερικό μέτρο Lebesgue** στον $\mathbb{R}^k$. Το λ_k είναι το **μέτρο Lebesgue** στον $\mathbb{R}^k$. Η $\mathcal{L}_k$ είναι η σ–άλγεβρα των **Lebesgue μετρήσιμων** υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$.

Θεώρημα 4.1.2. Κάθε διάστημα S στον $\mathbb{R}^k$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, και

$$\lambda_k(S) = \mathrm{vol}_k(S).$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2 απαιτούνται τα εξής βοηθητικά λήμματα:

(i) Έστω $P = \prod_{j=1}^{k}(a_j, b_j]$. Για κάθε $j = 1, \ldots, k$ θεωρούμε μια διαμέριση $a_j = c_j^0 < c_j^1 < \cdots < c_j^{m_j} = b_j$ του $[a_j, b_j]$ και, για κάθε $1 \leq i_1 \leq m_1, \ldots, 1 \leq i_k \leq m_k$ ορίζουμε $P_{i_1,\ldots,i_k} = \prod_{j=1}^{k}(c_j^{i_j-1}, c_j^{i_j}]$. Τότε,

$$\mathrm{vol}_k(P) = \sum_{1 \leq i_1 \leq m_1, \ldots, 1 \leq i_k \leq m_k} \mathrm{vol}_k(P_{i_1,\ldots,i_k}).$$

(ii) Έστω $P, P_1, \dots, P_s$ ανοικτά–κλειστά διαστήματα στον $\mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε ότι τα $P_1, \dots, P_s$ είναι ξένα και ότι $P = P_1 \cup \cdots \cup P_s$. Τότε,

$$\mathrm{vol}_k(P) = \mathrm{vol}_k(P_1) + \cdots + \mathrm{vol}_k(P_s).$$

(iii) Έστω $P, P_1, \dots, P_s$ ανοικτά–κλειστά διαστήματα στον $\mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε ότι τα $P_1, \dots, P_s$ είναι ξένα και ότι $P_1 \cup \cdots \cup P_s \subseteq P$. Τότε,

$$\mathrm{vol}_k(P_1) + \cdots + \mathrm{vol}_k(P_s) \leq \mathrm{vol}_k(P).$$

(iv) Έστω $P, P_1, \dots, P_s$ ανοικτά–κλειστά διαστήματα στον $\mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε ότι $P \subseteq P_1 \cup \cdots \cup P_s$. Τότε,

$$\mathrm{vol}_k(P) \leq \mathrm{vol}_k(P_1) + \cdots + \mathrm{vol}_k(P_s).$$

(v) Έστω Q ένα κλειστό διάστημα και έστω $R_1, \dots, R_s$ ανοικτά διαστήματα στον $\mathbb{R}^k$. Αν $Q \subseteq R_1 \cup \cdots \cup R_s$, τότε

$$\mathrm{vol}_k(Q) \leq \mathrm{vol}_k(R_1) + \cdots + \mathrm{vol}_k(R_s).$$

(vi) Για κάθε διάστημα S στον $\mathbb{R}^k$ ισχύει

$$\lambda_k^*(S) = \mathrm{vol}_k(S).$$

(vii) Κάθε διάστημα είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Πρόταση 4.1.3. Το μέτρο Lebesgue λ_k είναι σ–πεπερασμένο αλλά όχι πεπερασμένο.

Πρόταση 4.1.4. Κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

4.1α′ Lebesgue μετρήσιμα σύνολα

Πρόταση 4.1.5. Έστω $E \in \mathcal{L}_k$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ανοικτό ώστε $E \subseteq A$ και $\lambda_k(A \setminus E) < \varepsilon$.

Θεώρημα 4.1.6. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει G_δ–σύνολο A ώστε $E \subseteq A$ και $\lambda_k^*(A \setminus E) = 0$.

Θεώρημα 4.1.7. Έστω $E \subseteq \mathbb{R}^k$. Το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν υπάρχει F_σ–σύνολο B ώστε $B \subseteq E$ και $\lambda_k^*(E \setminus B) = 0$.

Θεώρημα 4.1.8. Έστω μ ένα μέτρο στον $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ ώστε $\mu(P) = \mathrm{vol}_k(P)$ για κάθε ανοικτό–κλειστό διάστημα P στον $\mathbb{R}^k$. Τότε,

$$\mu(E) = \lambda_k(E)$$

για κάθε Borel σύνολο $E \subseteq \mathbb{R}^k$.

Θεώρημα 4.1.9. Ο $(\mathbb{R}^k, \mathcal{L}_k, \lambda_k)$ είναι η πλήρωση του $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k), \lambda_k)$.

Πρόταση 4.1.10. Έστω $E \in \mathcal{L}_k$ με $\lambda_k(E) < \infty$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος ξένα ανοικτά διαστήματα $R_1, \ldots, R_s$ ώστε

$$\lambda_k(E \triangle (R_1 \cup \cdots \cup R_s)) < \varepsilon.$$

4.1β′ Κανονικότητα του μέτρου Lebesgue

Ορισμός 4.1.11 (κανονικό μέτρο). Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, $\mathcal{A}$ μια σ–άλγεβρα που περιέχει την Borel σ–άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ του X, και έστω μ ένα μέτρο στον $(X, \mathcal{A})$. Το μ λέγεται **κανονικό** αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) $\mu(K) < \infty$ για κάθε συμπαγές $K \subseteq X$.

(ii) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό}, A \subseteq U\}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

(iii) $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subseteq U\}$ για κάθε U ανοικτό στον X.

Η ιδιότητα (ii) λέγεται *εξωτερική κανονικότητα* του μ και η ιδιότητα (iii) λέγεται *εσωτερική κανονικότητα* του μ.

Πρόταση 4.1.12 (κανονικότητα του μέτρου Lebesgue). Το μέτρο Lebesgue λ_k είναι κανονικό μέτρο στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^k$. Επιπλέον, ισχύει

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subseteq A\}$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο σύνολο A.

4.1γ′ Μέτρο Lebesgue και απλοί μετασχηματισμοί

Πρόταση 4.1.13. Έστω $A \in \mathcal{L}_k$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ ισχύει $x + A \in \mathcal{L}_k$ και

$$\lambda_k(x + A) = \lambda_k(A).$$

Πρόταση 4.1.14. Έστω $A \in \mathcal{L}_k$. Για κάθε $\rho > 0$ ισχύει $\rho A \in \mathcal{L}_k$ και

$$\lambda_k(\rho A) = \rho^k \lambda_k(A).$$

Πρόταση 4.1.15. Έστω $A \in \mathcal{L}_k$ και έστω $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ γραμμική απεικόνιση. Τότε, $T(A) \in \mathcal{L}_k$ και

$$\lambda_k(T(A)) = |\det T| \cdot \lambda_k(A).$$

4.2 Μη μετρήσιμα σύνολα

Πρόταση 4.2.1 (το λήμμα του Steinhaus). Έστω $A \in \mathcal{L}_k$ με $\lambda_k(A) > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε το σύνολο

$$A - A = \{x - y : x, y \in A\}$$

να περιέχει την ανοικτή μπάλα $B(0, \delta)$.

Πρόταση 4.2.2 (Vitali). Υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$ το οποίο δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Ορισμός του E: Ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας στο $\mathbb{R}$:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Το E ορίζεται, με χρήση του αξιώματος της επιλογής, να περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε κλάση ισοδυναμίας της $\sim$.

Πρόταση 4.2.3. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$. Υπάρχει $F \subseteq A$ το οποίο δεν είναι Lebesgue μετρήσιμο.

4.3 Μετρήσιμα σύνολα που δεν είναι Borel

4.3α′ Το τριαδικό σύνολο του Cantor

Κατασκευή. Θεωρούμε το διάστημα $I^0 = [0, 1]$ και το χωρίζουμε σε τρία ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Ονομάζουμε I^1 το σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$I^1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Το I^1 είναι προφανώς κλειστό σύνολο. Χωρίζουμε καθένα από τα διαστήματα $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ και $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ σε τρία ίσα διαστήματα και αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε I^2 το κλειστό σύνολο που απομένει, δηλαδή

$$I^2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \dots$ ένα κλειστό σύνολο I^n έτσι ώστε η ακολουθία (I^n) να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $I^n \supset I^{n+1}$ για κάθε $n \geq 0$.

(ii) Το I^n είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{3^n}$.

Το **σύνολο του Cantor** είναι το σύνολο

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^n.$$

Τα διαστήματα της μορφής $\left[\frac{k}{3^n}, \frac{k+1}{3^n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, 1, \ldots, 3^n - 1$, ονομάζονται **τριαδικά διαστήματα**.

Πρόταση 4.3.1 (σύνολο του Cantor). Το C είναι κλειστό, υπεραριθμήσιμο και έχει μέτρο Lebesgue $\lambda(C) = 0$.

4.3β′ Η συνάρτηση Cantor–Lebesgue

Κατασκευή. Θεωρούμε τα σύνολα I^n που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή του C. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0,1] \to [0,1]$ ως εξής. Αν $J_1^n, \ldots, J_{2^n-1}^n$ είναι τα διαδοχικά ανοικτά διαστήματα που σχηματίζουν το $[0,1] \setminus I^n$, ορίζουμε $f_n(0) = 0$, $f_n(1) = 1$, $f_n(x) = \frac{k}{2^n}$ για κάθε x στο J_k^n, και επεκτείνουμε γραμμικά σε καθένα από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το I^n ώστε να προκύψει συνεχής συνάρτηση.

Πρόταση 4.3.2 (συνάρτηση Cantor-Lebesgue). Η ακολουθία $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$. Η f είναι αύξουσα και επί. Η εικόνα του C μέσω της f έχει μέτρο $\lambda(f(C)) = 1$.

Πρόταση 4.3.3. Υπάρχουν Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ τα οποία δεν είναι Borel.

Κατασκευή. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0,1] \to [0,2]$ με $g(x) = f(x) + x$, όπου f η συνάρτηση Cantor–Lebesgue. Η g είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και επί (το ίδιο και η g^{-1}).

Το σύνολο $g(C)$ είναι μετρήσιμο και $\lambda(g(C)) = 1$. Έστω M ένα μη μετρήσιμο υποσύνολο του $g(C)$. Τότε, το $K = g^{-1}(M)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο διότι είναι υποσύνολο του C το οποίο έχει μηδενικό μέτρο. Όμως, το K δεν είναι σύνολο Borel: αν ήταν, το $M = (g^{-1})^{-1}(K)$ θα ήταν σύνολο Borel ως αντίστροφη εικόνα συνόλου Borel μέσω συνεχούς συνάρτησης. Συνεπώς, το M θα ήταν Lebesgue μετρήσιμο.

4.4 Ασκήσεις

23. Έστω A και B δύο Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι το $A \times B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ και ότι

$$\lambda_2(A \times B) = \lambda_1(A) \cdot \lambda_2(B).$$

Υπόδειξη. Εξετάστε πρώτα την περίπτωση που τα A και B είναι φραγμένα.

24. Έστω A το υποσύνολο του $[0,1]$ που αποτελείται από όλους τους αριθμούς που το δεκαδικό τους ανάπτυγμα δεν περιέχει το ψηφίο 4. Δείξτε ότι το A είναι Lebesgue μετρήσιμο και βρείτε το $\lambda(A)$.

25. Έστω E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \big(\lambda(E), \lambda(F)\big)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο K ώστε $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

26. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ με $\lambda^*(A) > 0$. Δείξτε ότι για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει ανοικτό διάστημα J ώστε

$$\lambda^*(A \cap J) \geq \alpha \cdot \lambda^*(J).$$

27. Έστω E και F δύο Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) > 0$ και $\lambda(F) > 0$. Δείξτε ότι το σύνολο

$$E + F = \{x + y : x \in E, \, y \in F\}$$

περιέχει διάστημα.

28. Έστω E Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ και έστω $T : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ γραμμική απεικόνιση. Δείξτε ότι το $T(E)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

Υπόδειξη. Παρατηρήστε ότι αν το $F \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι συμπαγές τότε το $T(F)$ είναι συμπαγές, και δείξτε ότι αν το E είναι F_σ–σύνολο τότε το $T(E)$ είναι F_σ–σύνολο. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η T είναι Lipschitz συνεχής, δείξτε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(T(A)) = 0$.

29. Έστω E ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$. Ορίζουμε το *εσωτερικό μέτρο Lebesgue* του E θέτοντας

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\}.$$

(α) Δείξτε ότι $\lambda_{(i)}(E) \leq \lambda^*(E)$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\lambda^*(E) < \infty$. Δείξτε ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο αν και μόνο αν $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E)$.

(γ) Δείξτε ότι αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή.

30. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n).$$

31. Έστω $\{q_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}\cap[0,1]$. Για κάθε $\varepsilon>0$ ορίζουμε

$$A(\varepsilon)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(q_n-\frac{\varepsilon}{2^n},q_n+\frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Τέλος, θέτουμε $A=\cap_{j=1}^{\infty}A(1/j)$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda(A(\varepsilon))\leq 2\varepsilon$.

(β) Αν $\varepsilon<\frac{1}{2}$ δείξτε ότι το $[0,1]\setminus A(\varepsilon)$ είναι μη κενό.

(γ) Δείξτε ότι $A\subseteq[0,1]$ και $\lambda(A)=0$.

(δ) Δείξτε ότι $\mathbb{Q}\cap[0,1]\subseteq A$ και ότι το A είναι υπεραριθμήσιμο.

32. Έστω $A\subseteq\mathbb{R}$ με $\lambda(A)=0$. Δείξτε ότι το σύνολο $B=\{x^2:x\in A\}$ είναι Lebesgue μετρήσιμο, και $\lambda(B)=0$.

33. Δείξτε ότι το τριαδικό σύνολο C του Cantor είναι τέλειο και πουθενά πυκνό (δηλαδή, είναι κλειστό, δεν έχει μεμονωμένα σημεία, δεν περιέχει διάστημα).

34. Έστω $C=\cap_{n=0}^{\infty}I^{(n)}$ το τριαδικό σύνολο του Cantor. Δείξτε ότι $\frac{1}{4}\in C$ αλλά, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, ο $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα 2^n κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$.

35. (α) Δείξτε ότι για κάθε ακολουθία c_n στο $\{0,1,2\}$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}$ συγκλίνει σε κάποιον αριθμό στο $[0,1]$.

(β) Δείξτε ότι για κάθε $x\in[0,1]$ υπάρχει ακολουθία c_n στο $\{0,1,2\}$ ώστε $x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{c_n}{3^n}$. Λέμε ότι το $0.c_1c_2\cdots$ είναι ένα *τριαδικό ανάπτυγμα* του x.

(γ) Δείξτε ότι αν $x\in[0,1]$ τότε ο x έχει δύο διαφορετικά τριαδικά αναπτύγματα αν και μόνο αν $x=\frac{m}{3^n}$ για κάποιους $m,n\in\mathbb{N}$.

(δ) Δείξτε ότι αν $x\in[0,1]$ τότε $x\in C$ αν και μόνο αν ο x έχει τουλάχιστον ένα τριαδικό ανάπτυγμα $0.c_1c_2\cdots$ με $c_n\in\{0,2\}$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$.

36. Έστω $0<\delta<1$. Κατασκευάστε ένα υποσύνολο του $[0,1]$ με τον ίδιο τρόπο όπως το σύνολο του Cantor, με τη διαφορά ότι στο n–οστό βήμα τα διαστήματα που αφαιρούνται έχουν μήκος $\frac{\delta}{3^n}$. Δείξτε ότι το σύνολο D_δ που προκύπτει είναι τέλειο, δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\lambda(D_\delta)=1-\delta$.

37*. Κατασκευάστε ένα Lebesgue μετρήσιμο σύνολο $E\subseteq[0,1]$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε διάστημα $J\subseteq[0,1]$,

$$\lambda(J\cap E)>0\quad\text{και}\quad\lambda(J\setminus E)>0.$$

Κεφάλαιο 5

Μετρήσιμες συναρτήσεις

5.1 Μετρησιμότητα

Ορισμός 5.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}_1)$ και $(Y, \mathcal{A}_2)$ δύο μετρήσιμοι χώροι. Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ λέγεται $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$–μετρήσιμη αν για κάθε $E \in \mathcal{A}_2$ ισχύει $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_1$.

Πρόταση 5.1.2. Αν $\mathcal{A}_2 = \sigma(\mathcal{E})$ τότε η $f : X \to Y$ είναι $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$–μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $E \in \mathcal{E}$ ισχύει $f^{-1}(E) \in \mathcal{A}_1$.

Πρόταση 5.1.3. Έστω X και Y δύο μετρικοί χώροι. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι $(\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y))$–μετρήσιμη.

5.1α′ Περιορισμός και συγκόλληση

Ορισμός 5.1.4. Έστω $f : X \to Y$. Για κάθε $E \subseteq X$ συμβολίζουμε με f_E τον περιορισμό της f στο E. Δηλαδή, $f_E : E \to Y$ και $f_E(x) = f(x)$ για κάθε $x \in E$.

Έστω $\mathcal{A}_1$ μια σ–άλγεβρα υποσυνόλων του X. Θυμηθείτε ότι η οικογένεια $\mathcal{A} \upharpoonright E = \{A \cap E \mid A \in \mathcal{A}\}$ είναι σ–άλγεβρα στο E. Ειδικότερα, αν $E \in \mathcal{A}$ τότε

$$\mathcal{A} \upharpoonright E = \{A \mid A \subseteq E,\, A \in \mathcal{A}\}.$$

Πρόταση 5.1.5. Έστω $(X, \mathcal{A}_1)$, $(Y, \mathcal{A}_2)$ δύο μετρήσιμοι χώροι, και έστω $f : X \to Y$. Υποθέτουμε ότι τα $E_1, \ldots, E_n \in \mathcal{A}_1$ είναι ξένα και $X = E_1 \cup \cdots \cup E_n$.

Τότε, η f είναι $(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$–μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $j = 1, \ldots, n$ η f_{E_j} είναι $(\mathcal{A}_1 \upharpoonright E_j, \mathcal{A}_2)$–μετρήσιμη.

Το ίδιο ισχύει αν αντί για την πεπερασμένη διαμέριση $\{E_1, \ldots, E_n\}$ του X θεωρήσουμε άπειρη αριθμήσιμη διαμέριση $\{E_j\}_{j=1}^{\infty}$ του X.

5.2 Μετρήσιμες συναρτήσεις με πραγματικές τιμές

Ορισμός 5.2.1. (α) Μια συνάρτηση $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ λέγεται $\mathcal{A}$–μετρήσιμη (ή, πιο απλά, μετρήσιμη) αν είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$–μετρήσιμη.

(β) Μια συνάρτηση $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ λέγεται $\mathcal{A}$–μετρήσιμη (ή, πιο απλά, μετρήσιμη) αν είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$–μετρήσιμη.

Σημείωση. Η οικογένεια των Borel υποσυνόλων του $\overline{\mathbb{R}}$ είναι η

$$\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) = \{A, A \cup \{+\infty\}, A \cup \{-\infty\}, A \cup \{+\infty, -\infty\} \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}.$$

Αυτό έρχεται σε συμφωνία με τον γενικό ορισμό μιας Borel σ–άλγεβρας, αν θεωρήσουμε το $\overline{\mathbb{R}}$ σαν τοπολογικό χώρο με βασικές περιοχές του $+\infty$ και του $-\infty$ τα σύνολα της μορφής $(a, +\infty]$ και $[-\infty, a)$ (όπου $a \in \mathbb{R}$) αντίστοιχα.

Ορισμός 5.2.2. (α) Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ή $\overline{\mathbb{R}}$ λέγεται **Borel μετρήσιμη** αν είναι $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k)$–μετρήσιμη.

(β) Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ή $\overline{\mathbb{R}}$ λέγεται **Lebesgue μετρήσιμη** αν είναι $\mathcal{L}_k$–μετρήσιμη.

5.2α′ Χαρακτηρισμοί μετρησιμότητας

Πρόταση 5.2.3. Έστω $f = (f_1, \ldots, f_k) : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}^k$. Η f είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$–μετρήσιμη αν και μόνο αν κάθε f_j είναι $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$–μετρήσιμη.

Πρόταση 5.2.4. Η $f : (X, \mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$f^{-1}((a, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > a\} \in \mathcal{A}.$$

Σημείωση. Στην προηγούμενη Πρόταση μπορούμε να αντικαταστήσουμε την οικογένεια $\{(a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ με οποιαδήποτε από τις $\{[a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$, $\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ ή $\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$.

Πρόταση 5.2.5. Έστω $f : (X, \mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) Η f είναι μετρήσιμη.

(β) Τα σύνολα $f^{-1}(\{+\infty\})$ και $E = f^{-1}(\mathbb{R})$ ανήκουν στην $\mathcal{A}$, και η f_E είναι $(\mathcal{A} \restriction E)$–μετρήσιμη.

(γ) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ έχουμε $f^{-1}((a, +\infty]) \in \mathcal{A}$.

5.2β′ Πράξεις μεταξύ μετρήσιμων συναρτήσεων

Πρόταση 5.2.6. Έστω $(X,\mathcal{A}_1)$, $(Y,\mathcal{A}_2)$ και $(Z,\mathcal{A}_3)$ τρεις μετρήσιμοι χώροι. Αν η $f : X \to Y$ είναι $(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2)$–μετρήσιμη και η $g : Y \to Z$ είναι $(\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3)$–μετρήσιμη, τότε η $g \circ f : X \to Z$ είναι $(\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_3)$–μετρήσιμη.

Πρόταση 5.2.7. Έστω f και $g : (X,\mathcal{A}) \to \mathbb{R}$ δύο $\mathcal{A}$–μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε, οι $f+g$ και $f \cdot g$ είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμες.

Πρόταση 5.2.8. Έστω f και $g : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ δύο $\mathcal{A}$–μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε, το σύνολο

$$E = \{x : f(x) = +\infty, g(x) = -\infty\} \cup \{x : f(x) = -\infty, g(x) = +\infty\}$$

ανήκει στην $\mathcal{A}$ και η $(f+g) \restriction E^c$ είναι $(\mathcal{A} \restriction E^c)$–μετρήσιμη.

Σύμβαση. $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0$.

Πρόταση 5.2.9. Έστω f και $g : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ δύο $\mathcal{A}$–μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε, η $f \cdot g$ είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη.

Πρόταση 5.2.10. Έστω f και $g : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ δύο $\mathcal{A}$–μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε, τα σύνολα $\{x \in X : f(x) = g(x)\}$ και $\{x \in X : f(x) < g(x)\}$ ανήκουν στην $\mathcal{A}$.

Πρόταση 5.2.11. Έστω $f_1,\dots,f_n : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε, οι συναρτήσεις $\max\{f_1,\dots f_n\}$ και $\min\{f_1,\dots,f_n\}$ είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμες.

Πρόταση 5.2.12. Έστω $f : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$ μια $\mathcal{A}$–μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, οι συναρτήσεις $f^+ = \max\{f,0\}$ και $f^- = -\min\{f,0\}$ είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμες.

Πρόταση 5.2.13. Έστω (f_n) μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε, οι συναρτήσεις $\sup\limits_{n\geq 1} f_n$, $\inf\limits_{n\geq 1} f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ και $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμες.

Πρόταση 5.2.14. Έστω (f_n) μια ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : (X,\mathcal{A}) \to \overline{\mathbb{R}}$. Τότε, το σύνολο

$$A = \{x \in X : \text{το } \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ υπάρχει στο } \overline{\mathbb{R}}\}$$

ανήκει στην $\mathcal{A}$ και η συνάρτηση $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n : A \to \overline{\mathbb{R}}$ είναι μετρήσιμη.

5.3 Απλές συναρτήσεις

Ορισμός 5.3.1. Έστω $E \subseteq X$. Η συνάρτηση $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } x \in E \\ 0 & \text{αν } x \notin E \end{cases}$, λέγεται **χαρακτηριστική συνάρτηση** του E.

Παρατήρηση 5.3.2. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$t\chi_E + s\chi_F = t\chi_{E\setminus F} + (t+s)\chi_{E\cap F} + s\chi_{F\setminus E}, \quad \chi_E\chi_F = \chi_{E\cap F}, \quad \chi_{E^c} = 1 - \chi_E$$

για κάθε $E, F \subseteq X$ και για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$.

Πρόταση 5.3.3. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και έστω $E \subseteq X$. Τότε, η χ_E είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη αν και μόνο αν $E \in \mathcal{A}$.

Ορισμός 5.3.4. Έστω X ένα μη κενό σύνολο. Μια συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ λέγεται **απλή** αν το σύνολο τιμών της είναι πεπερασμένο.

Πρόταση 5.3.5. (α) Μια συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ είναι απλή αν και μόνο αν είναι γραμμικός συνδυασμός (πεπερασμένων το πλήθος) χαρακτηριστικών συναρτήσεων υποσυνόλων του X.

(β) Αν η $\phi : X \to \mathbb{R}$ είναι απλή, τότε υπάρχει διαμέριση $\{E_1, \ldots, E_m\}$ του X σε ξένα, μη κενά σύνολα E_i, και υπάρχουν $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{R}$, διαφορετικοί ανά δύο, ώστε

$$\phi = a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_m\chi_{E_m}.$$

Υπάρχει μία μόνο αναπαράσταση της ϕ με τις παραπάνω ιδιότητες. Αυτή η αναπαράσταση λέγεται **κανονική μορφή** της ϕ.

(γ) Αν $(X, \mathcal{A})$ είναι ένας μετρήσιμος χώρος και αν $\phi : X \to \mathbb{R}$ είναι μια απλή συνάρτηση με κανονική μορφή την $\phi = a_1\chi_{E_1} + \cdots + a_m\chi_{E_m}$, τότε η ϕ είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη αν και μόνο αν $E_1, \ldots, E_m \in \mathcal{A}$.

Πρόταση 5.3.6. (α) Κάθε γραμμικός συνδυασμός των απλών συναρτήσεων $\phi_1, \ldots, \phi_s : X \to \mathbb{R}$ (με συντελεστές πραγματικούς αριθμούς) είναι απλή συνάρτηση.

(β) Αν $\phi, \psi : X \to \mathbb{R}$ είναι δύο απλές συναρτήσεις, τότε οι $\phi \cdot \psi$, $\max\{\phi, \psi\}$ και $\min\{\phi, \psi\}$ είναι απλές συναρτήσεις.

Θεώρημα 5.3.7 (προσέγγιση συνάρτησης από απλές συναρτήσεις). Έστω $f : X \to [0, +\infty]$. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{\phi_n\}$ απλών συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο στην f: για κάθε $x \in X$ ισχύει $\phi_n(x) \to f(x)$.

Επιπλέον, αν η f είναι φραγμένη σε κάποιο $E \subseteq X$, τότε $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα στο E.

Ορισμός της ϕ_n: Ορίζουμε $G = \{x \in X : f(x) = 0\}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ χωρίζουμε το $(0, n]$ σε $n \cdot 2^n$ διαδοχικά ανοικτά–κλειστά διαστήματα μήκους $1/2^n$ και θέτουμε

$$E_n^k = \left\{ x \in X : \frac{k-1}{2^n} < f(x) \leq \frac{k}{2^n} \right\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n \cdot 2^n$$

και

$$F_n = \{x \in X : f(x) > n\}.$$

Τέλος, ορίζουμε

$$\phi_n = n \cdot \chi_{F_n} + \sum_{k=1}^{n \cdot 2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_n^k}.$$

Θεώρημα 5.3.8 (προσέγγιση μετρήσιμης συνάρτησης από απλές μετρήσιμες συναρτήσεις). Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μια $\mathcal{A}$–μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει αύξουσα ακολουθία $\{\phi_n\}$ απλών μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο στην f: για κάθε $x \in X$ ισχύει $\phi_n(x) \to f(x)$.

Επιπλέον, αν η f είναι φραγμένη σε κάποιο $E \subseteq X$, τότε $\phi_n \to f$ ομοιόμορφα στο E.

Απόδειξη. Αν η f είναι μετρήσιμη, τότε οι ϕ_n που ορίστηκαν παραπάνω είναι μετρήσιμες.

5.4 Ασκήσεις

38. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Δείξτε ότι η f είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη αν και μόνο αν $f^{-1}((q, +\infty]) \in \mathcal{A}$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$.

39. Έστω $(X, \mathcal{A})$ ένας μετρήσιμος χώρος και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$–μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $g : X \to \mathbb{R}$ με $g(x) = 0$ αν $f(x) \in \mathbb{Q}$ και $g(x) = 1$ αν $f(x) \notin \mathbb{Q}$. Δείξτε ότι η g είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη.

40. Δείξτε ότι κάθε αύξουσα συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

41. (α) Δείξτε ότι αν η $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και η $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη, τότε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση Cantor–Lebesgue βρείτε μια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ να μην είναι Lebesgue μετρήσιμη.

42. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(E) < \infty$, και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ μια Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε $\omega_f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\omega_f(t) = \lambda(\{x \in E : f(x) > t\}).$$

(α) Δείξτε ότι η ω_f είναι φθίνουσα και συνεχής από δεξιά. Σε ποιά σημεία είναι ασυνεχής;

(β) Αν οι $f_n, f : E \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμες και $f_k \uparrow f$, δείξτε ότι $\omega_{f_k} \uparrow \omega_f$.

43. (α) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty$, τότε υπάρχει $N \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(N) = 0$ ώστε $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n(x) \leq \alpha$ για κάθε $x \notin N$.

(β) Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\varepsilon_n \to 0^+$. Δείξτε ότι: αν $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \varepsilon_n\}) < \infty$, τότε υπάρχει $N \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(N) = 0$ ώστε $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \notin N$.

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε την Άσκηση 1(γ) του Φυλλαδίου 3 (Λήμμα Borel–Cantelli).

44. Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις. Δείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (α_n) θετικών πραγματικών αριθμών και υπάρχει $N \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(N) = 0$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin N$.

Υπόδειξη. Για κάθε n υπάρχει $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$.

45. Έστω $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ συνάρτηση συνεχής ως προς κάθε μεταβλητή χωριστά. Δείξτε ότι η f είναι Borel μετρήσιμη.

Υπόδειξη. Γράψτε την f σαν όριο ακολουθίας Borel μετρήσιμων συναρτήσεων.

Κεφάλαιο 6

Ολοκλήρωμα

6.1 Απλές μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 6.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $\phi : X \to [0, \infty)$ μια απλή μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση με κανονική μορφή την

$$\phi = a_1 \chi_{E_1} + \cdots + a_m \chi_{E_m}.$$

Ορίζουμε το ολοκλήρωμα της ϕ θέτοντας

$$\int_X \phi \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \mu(E_i).$$

Παρατήρηση 6.1.2. (α) Με τον παραπάνω ορισμό, έχουμε $\int_X \phi \, d\mu < \infty$ αν και μόνο αν $\mu(\{x \in X : \phi(x) > 0\}) < \infty$.

(β) Έχουμε $\int_X \phi \, d\mu = 0$ αν και μόνο αν $\mu(\{x \in X : \phi(x) > 0\}) = 0$.

Λήμμα 6.1.3. Έστω $\phi : X \to [0, \infty)$ μια απλή μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $\phi = \sum_{j=1}^{k} b_j \chi_{F_j}$ για κάποια ξένα $F_1, \ldots, F_k \in \mathcal{A}$. Τότε,

$$\int_X \phi \, d\mu = \sum_{j=1}^{k} b_j \mu(F_j).$$

Λήμμα 6.1.4. Έστω $\phi, \psi : X \to [0, \infty)$ απλές μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $t \geq 0$. Τότε,

$$\int_X (\phi + \psi) \, d\mu = \int_X \phi \, d\mu + \int_X \psi \, d\mu \quad \textit{και} \quad \int_X (t\phi) \, d\mu = t \int_X \phi \, d\mu.$$

Λήμμα 6.1.5. Έστω $\phi, \psi : X \to [0, \infty)$ απλές μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $\phi \leq \psi$ στο X, τότε

$$\int_X \phi \, d\mu \leq \int_X \psi \, d\mu.$$

Πρόταση 6.1.6. Έστω $\phi : X \to [0,\infty)$ μια απλή μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\{A_n\}$ είναι μια αύξουσα ακολουθία στοιχείων της $\mathcal{A}$ και $A_n \uparrow X$, τότε

$$\int_X \phi\chi_{A_n}\, d\mu \nearrow \int_X \phi\, d\mu.$$

Πρόταση 6.1.7. Έστω $\phi : X \to [0,\infty)$ μια απλή μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση και έστω $\{\phi_n\}$ μια αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων $\phi_n : X \to [0,\infty)$.

(α) Αν $\lim\limits_{n\to\infty} \phi_n \le \phi$, τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n\, d\mu \le \int_X \phi\, d\mu.$$

(β) Αν $\phi \le \lim\limits_{n\to\infty} \phi_n$, τότε

$$\int_X \phi\, d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n\, d\mu.$$

Πρόταση 6.1.8. Έστω $\{\phi_n\}$ και $\{\psi_n\}$ δύο αύξουσες ακολουθίες απλών μετρήσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων $\phi_n, \psi_n : X \to [0,\infty)$. Αν

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n = \lim_{n\to\infty} \psi_n,$$

τότε

$$\lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \psi_n\, d\mu.$$

6.2 Μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 6.2.1. Έστω $(X,\mathcal{A},\mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f : X \to [0,+\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε

$$\int_X f\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X \phi_n\, d\mu,$$

όπου $\{\phi_n\}$ αύξουσα ακολουθία απλών μετρήσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων που συγκλίνει κατά σημείο στην f. Τέτοιες ακολουθίες $\{\phi_n\}$ υπάρχουν από το Θεώρημα 5.3.8. Επίσης, το όριο στο δεξιό μέλος είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της αύξουσας ακολουθίας $\{\phi_n\}$. Αυτό είναι συνέπεια της Πρότασης 6.1.8. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα της f είναι καλά ορισμένο.

Παρατηρήσεις 6.2.2. (α) Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι

$$\int_X f\, d\mu = \sup\left\{ \int_X \phi\, d\mu :\ 0 \le \phi \le f,\ \phi \text{ απλή μετρήσιμη} \right\}.$$

(β) Αν η f είναι απλή, τότε ο νέος ορισμός του ολοκληρώματος της f συμφωνεί με τον παλιό: αυτό φαίνεται αμέσως αν θεωρήσουμε την σταθερή ακολουθία $\phi_n \equiv \phi \uparrow \phi$.

Πρόταση 6.2.3. Έστω $f, g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $t \geq 0$. Τότε,

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu \quad \textit{και} \quad \int_X (tf)\, d\mu = t \int_X f\, d\mu.$$

Πρόταση 6.2.4. Έστω $f, g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f \leq g$ στο X, τότε

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu.$$

Πρόταση 6.2.5. Έστω $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $\int_X f\, d\mu = 0$, τότε $\mu(\{x : f(x) > 0\}) = 0$.

Ορισμός 6.2.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου. Λέμε ότι μια ιδιότητα $P(x)$ ισχύει **σχεδόν παντού** (και γράφουμε $\mu - \sigma.\pi.$) αν

$$\mu(\{x : \ \eta\ P(x)\ \delta\epsilon\nu\ \iota\sigma\chi\acute{\upsilon}\epsilon\iota\}) = 0.$$

Πρόταση 6.2.7. Έστω $f, g : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$, τότε

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

Θεώρημα 6.2.8 (Θεώρημα μονότονης σύγκλισης). Έστω $\{f_n\}$ αύξουσα ακολουθία μετρήσιμων συναρτήσεων $f_n : X \to [0, +\infty]$ και έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f_n(x) \to f(x)$ $\mu - \sigma.\pi.$, τότε

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu.$$

Θεώρημα 6.2.9 (Θεώρημα Beppo Levi). Έστω $f, f_n : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ $\mu - \sigma.\pi.$, τότε

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Θεώρημα 6.2.10 (Λήμμα του Fatou). Έστω $f_n : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $f = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$. Τότε,

$$\int_X f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

6.3 Ολοκληρώσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 6.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε το θετικό μέρος f^+ και το αρνητικό μέρος f^- της f.

(α) Αν ισχύει τουλάχιστον μία από τις $\int_X f^+ d\mu < \infty$ ή $\int_X f^- d\mu < \infty$, τότε λέμε ότι το ολοκλήρωμα της f **ορίζεται** και θέτουμε

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

(β)Αν $\int_X f^+ d\mu < \infty$ και $\int_X f^- d\mu < \infty$, τότε λέμε ότι η f είναι **ολοκληρώσιμη**, με ολοκλήρωμα (όπως πριν)

$$\int_X f\, d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Πρόταση 6.3.2. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη.

Πρόταση 6.3.3. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,

(α) $f(x) \in \mathbb{R}$ $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Το $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$ γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση συνόλων πεπερασμένου μέτρου.

Πρόταση 6.3.4. Έστω $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Αν $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$ και το $\int_X f\, d\mu$ ορίζεται, τότε το $\int_X g\, d\mu$ ορίζεται και $\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu$.

Πρόταση 6.3.5. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(i) $\int_X |f|\, d\mu = 0$.

(ii) $f = 0$ $\mu - \sigma.\pi.$

(iii) $\int_X f\chi_A\, d\mu = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Πρόταση 6.3.6. Έστω $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και έστω $t \in \mathbb{R}$. Τότε, οι $f + g$ και tf είναι ολοκληρώσιμες, και

$$\int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu \quad , \quad \int_X (tf)\, d\mu = t \int_X f\, d\mu.$$

Πρόταση 6.3.7. Έστω $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Αν $f \leq g$ $\mu - \sigma.\pi.$ στο X, τότε

$$\int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu.$$

Πρόταση 6.3.8. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε,

$$\left| \int_X f\, d\mu \right| \leq \int_X |f|\, d\mu.$$

Θεώρημα 6.3.9 (Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης). Έστω $f, f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ και $g : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n(x) \to f(x)$ $\mu - \sigma.\pi.$, $|f_n| \leq g$ $\mu - \sigma.\pi.$ και $\int_X g\, d\mu < \infty$, τότε οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες και

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu.$$

Θεώρημα 6.3.10. Έστω $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|\, d\mu < \infty,$$

τότε η $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ ορίζεται $\mu - \sigma.\pi.$, και

$$\int_X f\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Θεώρημα 6.3.11. Έστω $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει απλή μετρήσιμη συνάρτηση $\phi : X \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_X |f - \phi|\, d\mu < \varepsilon.$$

6.3α′ Αόριστο ολοκλήρωμα

Θεώρημα 6.3.12. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμη συνάρτιση. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ ορίζουμε

$$\nu(A) = \int_A f\, d\mu = \int_X f \chi_A\, d\mu.$$

Τότε, ισχύουν τα εξής:

(i) Το ν είναι μέτρο.

(ii) Αν $\mu(A) = 0$ τότε $\nu(A) = 0$.

(iii) Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $g : X \to [0, +\infty]$ ισχύει

$$\int_X g\, d\nu = \int_X gf\, d\mu.$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, τότε το ν έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) < \delta$, τότε $\nu(A) < \varepsilon$.

6.4 Ασκήσεις

46. (Θεώρημα ομοιόμορφης σύγκλισης). Έστω $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X. Αν $\mu(X) < \infty$, δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu.$$

47. (Θεώρημα φραγμένης σύγκλισης). Έστω $f, f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι υπάρχει $0 < M < \infty$ ώστε $|f_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$, δείξτε ότι

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu.$$

48. Έστω $f, f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $g : X \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leq g$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$, δείξτε ότι

$$\int_X |f_n - f|\, d\mu \to 0.$$

49. Έστω $f, f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \leq f$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$, δείξτε ότι

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu.$$

50. (Γενίκευση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης). Έστω $f, f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ και $g, g_n : X \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $|f_n| \leq g_n$ $\mu - \sigma.\pi.$, $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$, $g_n \to g$ $\mu - \sigma.\pi.$, και $\int_X g_n \, d\mu \to \int_X g \, d\mu < +\infty$. Δείξτε ότι

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

51. Έστω $f, f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ μετρήσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$ και $\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu < +\infty$. Δείξτε ότι

$$\int_A f_n \, d\mu \to \int_A f \, d\mu \quad \text{για κάθε } A \in \mathcal{A}.$$

52. Έστω $f, f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \overline{\mathbb{R}}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$. Δείξτε ότι

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \int_X |f_n| \, d\mu \to \int_X |f| \, d\mu.$$

53. Έστω $f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $f_n \to 0$ $\mu - \sigma.\pi.$ στο X. Ορίζουμε $g_n = \max\{f_1, \ldots, f_n\}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $\int_X g_n \, d\mu \leq M$. Δείξτε ότι

$$\int_X f_n \, d\mu \to 0.$$

Κεφάλαιο 7

Σύγκλιση ακολουθιών μετρήσιμων συναρτήσεων

7.1 Σύγκλιση κατά σημείο και ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 7.1.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.

(α) Λέμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$ αν υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε: $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in X \setminus Z$. Δηλαδή,

> Για κάθε $x \in X \setminus Z$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(β) Λέμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$ αν υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε: $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus Z$. Δηλαδή,

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X \setminus Z$, $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

(γ) Λέμε ότι η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy $\mu - \sigma.\pi.$ αν υπάρχει $Z \in \mathcal{A}$ με $\mu(Z) = 0$ ώστε:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X \setminus Z$, $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Από τους ορισμούς είναι φανερό ότι αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$ τότε $f_n \to f$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$ Επίσης, αν η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα Cauchy $\mu - \sigma.\pi.$ τότε $f_n \to f$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.1.2. (α) Αν $f_n \to f$ και $f_n \to g$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$, τότε $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Αν $f_n \to f$ και $f_n \to g$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$, τότε $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.1.3. (α) Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$, τότε, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, $tf_n + sg_n \to tf + sg$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$, τότε, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, $tf_n + sg_n \to tf + sg$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.1.4. (α) Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$, τότε $f_n g_n \to fg$ κατά σημείο $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ και $|g_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$, τότε $f_n g_n \to fg$ ομοιόμορφα $\mu - \sigma.\pi.$

(γ) Αν αφαιρέσουμε την υπόθεση ότι οι $\{f_n\}$, $\{g_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες $\mu - \sigma.\pi.$, τότε (β) δεν ισχύει γενικά.

7.2 Σύγκλιση κατά μέσο

Ορισμός 7.2.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.

(α) Λέμε ότι $f_n \to f$ κατά μέσο αν

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

(β) Λέμε ότι η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geq n_0$,

$$\int_X |f_n - f_m| \, d\mu < \varepsilon.$$

Πρόταση 7.2.2. Αν $f_n \to f$ και $f_n \to g$ κατά μέσο, τότε $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.2.3. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά μέσο, τότε, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, $tf_n + sg_n \to tf + sg$ κατά μέσο.

Παρατήρηση 7.2.4. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο.

Θεώρημα 7.2.5 (Riesz). Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέσο, τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0.$$

Επιπλέον, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πόρισμα 7.2.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $\int_X |f_n - f| \, d\mu \to 0$, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.2.7. (α) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ $\mu-\sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε $|f| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ και $|g_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά μέσο, τότε $f_n g_n \to fg$ κατά μέσο.

7.3 Σύγκλιση κατά μέτρο

Ορισμός 7.3.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.

(α) Λέμε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0.$$

(β) Λέμε ότι η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο αν για κάθε $\varepsilon, \delta > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon, \delta) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $m, n \geq n_0$,

$$\mu(\{x \in X : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \varepsilon\}) < \delta.$$

Παρατήρηση 7.3.2. Αν $f, g : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε, για κάθε $a, b > 0$ ισχύει

$$\mu(\{x : |f(x) + g(x)| \geq a + b\}) \leq \mu(\{x : |f(x)| \geq a\}) + \mu(\{x : |g(x)| \geq b\}).$$

Πρόταση 7.3.3. Αν $f_n \to f$ και $f_n \to g$ κατά μέτρο, τότε $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.3.4. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά μέτρο, τότε, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, $tf_n + sg_n \to tf + sg$ κατά μέτρο.

Παρατήρηση 7.3.5. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, τότε η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο.

Θεώρημα 7.3.6. Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο, τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ κατά μέτρο. Επιπλέον, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πόρισμα 7.3.7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.3.8. (α) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ $\mu-\sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, τότε $|f| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ και $|g_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ κατά μέτρο, τότε $f_n g_n \to fg$ κατά μέτρο.

7.4 Σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 7.4.1. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.

(α) Λέμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$.

(β) Λέμε ότι η $\{f_n\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ ώστε η $\{f_n\}$ να είναι ομοιόμορφα Cauchy στο $X \setminus A$.

Πρόταση 7.4.2. Αν $f_n \to f$ και $f_n \to g$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f = g$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.4.3. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε, για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$, $tf_n + sg_n \to tf + sg$ σχεδόν ομοιόμορφα.

Παρατήρηση 7.4.4. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε η $\{f_n\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα.

Θεώρημα 7.4.5. Αν η $\{f_n\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα, τότε υπάρχει μετρήσιμη συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. Επιπλέον, $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πόρισμα 7.4.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$

Πρόταση 7.4.7. (α) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $|f| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$

(β) Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n| \leq M$ και $|g_n| \leq M$ $\mu - \sigma.\pi.$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ και $g_n \to g$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n g_n \to fg$ σχεδόν ομοιόμορφα.

7.5 Σύγκριση των διαφόρων τύπων σύγκλισης

Θεώρημα 7.5.1 (Egoroff). Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $\mu(X) < \infty$ και αν $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$, τότε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.

Θεώρημα 7.5.2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$ και αν υπάρχει $g : X \to [0, \infty]$ ώστε $|f_n| \leq g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\int_X g \, d\mu < \infty$, τότε $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.

Θεώρημα 7.5.3. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.

Αντίστροφα, αν $f_n \to f$ κατά μέτρο, τότε υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε $f_{k_n} \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα.

Θεώρημα 7.5.4 (ανισότητα Chebyshev–Markov). Έστω $f : X \to [0, \infty]$ μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$\mu(\{x \in X : f(x) \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X f \, d\mu.$$

Θεώρημα 7.5.5. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε $f_n \to f$ κατά μέτρο.

Αντίστροφα, αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και αν υπάρχει $g : X \to [0, \infty]$ ώστε $|f_n| \leq g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\int_X g \, d\mu < \infty$, τότε $f_n \to f$ κατά μέσο.

Θεώρημα 7.5.6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και έστω $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:

(α) $f_n \to f$ κατά μέτρο.

(β) $\int_X \frac{|f_n - f|}{1 + |f_n - f|} \, d\mu \to 0$ όταν $n \to \infty$.

(γ) Κάθε υπακολουθία της $\{f_n\}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στην f μ-σχεδόν παντού.

7.6 Ασκήσεις

Σε όλες τις Ασκήσεις, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος μέτρου, όλα τα υποσύνολα του X ανήκουν στην $\mathcal{A}$, και οι $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις.

54. Έστω $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο ή σχεδόν ομοιόμορφα, τότε $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ κατά μέτρο ή σχεδόν ομοιόμορφα αντίστοιχα.

55. Έστω $E_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δείξτε ότι η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο ή κατά μέσο αν και μόνο αν $\mu(E_n \triangle E_m) \to 0$ όταν $m, n \to \infty$.

Εξετάστε αν ισχύει το εξής: η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα αν και μόνο αν $\mu(E_n \triangle E_m) \to 0$ όταν $m, n \to \infty$.

56. Αν $f_n \geq 0$ και $f_n \to f$ κατά μέτρο, δείξτε ότι

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

57. Αν $|f_n| \leq g$, $\int_X g\,d\mu < \infty$ και $f_n \to f$ κατά μέτρο, δείξτε ότι

$$\int_X f_n\,d\mu \to \int_X f\,d\mu.$$

58. (α) Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$ μ-σχεδόν παντού. Δείξτε ότι, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ και $M > 0$ ώστε: $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X \setminus A$.

(β) Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Αν $f_n \to f$ κατά μέτρο και $g_n \to g$ κατά μέτρο, δείξτε ότι $f_n g_n \to fg$ κατά μέτρο.

59. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$. Δείξτε ότι $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού αν και μόνο αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon)) = 0$, όπου

$$E_k(\varepsilon) = \{x \in X : |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}.$$

60. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες. Λέμε ότι οι f_n είναι **ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $\mu(A) < \delta$ τότε $\left|\int_A f_n\,d\mu\right| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Δείξτε ότι $f_n \to f$ κατά μέσο αν και μόνο αν οι f_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες και $f_n \to f$ κατά μέτρο.

61. Υποθέτουμε ότι $\mu(X) < \infty$ και ότι οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες. Εξετάστε αν ισχύει το εξής: $f_n \to f$ κατά μέσο αν και μόνο αν $\int_A f_n\,d\mu \to \int_A f\,d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

Κεφάλαιο 8

Ολοκλήρωμα Lebesgue και ολοκλήρωμα Riemann

8.1 Ολοκλήρωμα Riemann

Ορισμός 8.1.1. Έστω $Q = [a_1, b_1] \times [a_k, b_k]$ ένα κλειστό διάστημα στον $\mathbb{R}^k$. **Διαμέριση** του Q θα λέμε κάθε πεπερασμένη οικογένεια $\Delta = \{Q_1, \ldots, Q_l\}$ κλειστών μη επικαλυπτόμενων διαστημάτων $Q_1, \ldots, Q_l$ με $Q = Q_1 \cup \cdots \cup Q_l$.

Έστω $f : Q \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Αν $\Delta = \{Q_1, \ldots, Q_l\}$ είναι μια διαμέριση του Q, για κάθε $j = 1, \ldots, l$ ορίζουμε

$$m_j := m_j(f, \Delta) = \inf\{f(x) : x \in Q_j\}$$

και

$$M_j = M_j(f, \Delta) = \sup\{f(x) : x \in Q_j\}.$$

Το άνω και το κάτω άθροισμα Darboux της f ως προς την Δ είναι οι αριθμοί

$$U(f, \Delta) = \sum_{j=1}^{l} M_j \mathrm{vol}_k(Q_j)$$

και

$$L(f, \Delta) = \sum_{j=1}^{l} m_j \mathrm{vol}_k(Q_j)$$

αντίστοιχα. Αν Δ_1, Δ_2 είναι δύο διαμερίσεις του Q, τότε

$$L(f, \Delta_1) \leq U(f, \Delta_2).$$

Ορίζουμε

$$(R_k) \underline{\int_Q} f = \sup\left\{ L(f, \Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } Q \right\}$$

και
$$(R_k)\overline{\int_Q} f = \inf\Big\{U(f,\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } Q\Big\}.$$
Τότε,
$$(R_k)\underline{\int_Q} f \leq (R_k)\overline{\int_q} f.$$
Η f λέγεται **Riemann ολοκληρώσιμη** αν
$$(R_k)\underline{\int_Q} f = (R_k)\overline{\int_Q} f.$$
Η κοινή αυτή τιμή λέγεται **ολοκλήρωμα Riemann** της f στο Q και συμβολίζεται με
$$(R_k)\int_Q f.$$

Λήμμα 8.1.2 (κριτήριο Riemann). Έστω $f : Q \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση Δ του Q ώστε
$$U(f,\Delta) - L(f,\Delta) < \varepsilon.$$

Θεώρημα 8.1.3. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : Q \to \mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Θεώρημα 8.1.4. Έστω Q κλειστό διάστημα στον $\mathbb{R}^k$ και έστω $f : Q \to \mathbb{R}$ μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη και
$$\int_Q f\, d\lambda_k = (R_k)\int_Q f.$$

Θεώρημα 8.1.5. Έστω Q κλειστό διάστημα στον $\mathbb{R}^k$ και έστω $f : Q \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη συνάρτηση. Τότε, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν είναι σχεδόν παντού συνεχής.

8.2 Το θεώρημα του Lusin

Θεώρημα 8.2.1 (προσέγγιση ολοκληρώσιμων συναρτήσεων). Έστω $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ μια Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε συνεχή συνάρτηση $g_\varepsilon : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα, ώστε
$$\int_{\mathbb{R}^k} |g_\varepsilon - f|\, d\lambda_k < \varepsilon.$$

Πόρισμα 8.2.2. Έστω $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Υπάρχει ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα, η οποία συγκλίνει στην f σχεδόν παντού.

Θεώρημα 8.2.3 (Lusin). Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda_k(E) < \infty$, και έστω $f : E \to \mathbb{R}$ Lebesgue μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε κλειστό $F_\varepsilon \subseteq E$ με $\lambda_k(E \setminus F_\varepsilon) < \varepsilon$, ώστε η $f|_{F_\varepsilon}$ να είναι συνεχής.

8.3 Ασκήσεις

62. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $g_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη ώστε $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

63. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση με την ιδιότητα: για κάθε $0 < b \leq 1$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$. Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

64. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

(α) Δείξτε ότι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a,b]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} < 1.$$

(β) Δείξτε ότι υπάρχουν $a_2 < b_2$ στο (a_1, b_1) ώστε $b_2 - a_2 < 1/2$ και

$$\sup\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} - \inf\{f(x) : a_2 \leq x \leq b_2\} < \frac{1}{2}.$$

(γ) Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n, b_n] \subseteq (a_{n-1}, b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$, ώστε

$$\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(δ) Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Δείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.

(ε) Τώρα δείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a,b]$.

65. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

66. Εξετάστε αν είναι ολοκληρώσιμη η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}(p,q) = 1 \end{cases}$$

67. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nx^n f(x)\, dx = f(1).$$

68. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ορίζουμε μια ακολουθία (a_n) θέτοντας

$$a_n = \int_0^1 f(x^n) dx.$$

Δείξτε ότι $a_n \to f(0)$.

69. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nf(x)e^{-nx}\, dx = f(0).$$

70. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$\limsup_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1.$$

Δείξτε ότι: για κάθε $0 < \alpha < 1$ υπάρχει υπακολουθία $\{A_{k_n}\}$ της $\{A_n\}$ με

$$\lambda\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) > \alpha.$$

71. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda_k(E) < \infty$. Έστω $\{A_n\}$ ακολουθία Lebesgue μετρήσιμων υποσυνόλων του E και έστω $c > 0$ με την ιδιότητα $\lambda(A_n) \geq c$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(α) Δείξτε ότι $\lambda_k(\limsup A_n) > 0$.

(β) Δείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$.

72. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα

$$\int_{[a,x]} f\, d\lambda = 0$$

για κάθε $x \in [a,b]$. Δείξτε ότι $f = 0$ λ-σχεδόν παντού στο $[a,b]$.

73. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με $\lambda(E) > 1$. Δείξτε ότι υπάρχουν $x \neq y$ στο E ώστε $x - y \in \mathbb{Z}$.

74. Έστω $E_1, \ldots, E_N$ Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, \ldots, E_N$. Δείξτε ότι υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, N\}$ με την ιδιότητα $\lambda(E_{i_0}) \geq \frac{k}{N}$.

75. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda_k(E) < \infty$. Έστω $f : E \to \mathbb{R}$ γνησίως θετική μετρήσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, αν A είναι Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του E με $\lambda(A) > \alpha$, τότε

$$\int_A f \, d\lambda \geq \delta.$$

76. Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση των ρητών του $[0,1]$ και έστω (α_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών με $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < \infty$. Δείξτε ότι η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{|x - q_n|}}$$

συγκλίνει απολύτως σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

77. Δείξτε ότι:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2x^2} \, dx = 0 \qquad \text{και} \qquad \lim_{n \to \infty} \int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1 + n^2x^2} \, dx = 0.$$

Κεφάλαιο 9

Υποδείξεις για τις Ασκήσεις

1. (α) Παρατηρήστε ότι $x \in \limsup A_n$ αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $x \in \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j$, δηλαδή αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $j \geq k$ ώστε $x \in A_j$. Εξηγήστε γιατί η τελευταία πρόταση ισχύει αν και μόνο αν $x \in A_j$ για άπειρες τιμές του j.

(β) Παρατηρήστε ότι $x \in \liminf A_n$ αν και μόνο υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $x \in \bigcap_{j=k}^{\infty} A_j$, δηλαδή αν και μόνο αν υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $j \geq k$ να ισχύει $x \in A_j$, δηλαδή αν και μόνο αν το x ανήκει σε τελικά όλα τα A_j.

(γ) Αν κάποιο $x \in X$ ανήκει σε τελικά όλα τα A_j τότε το x ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_j. Από τα (α) και (β) έπεται ότι $\liminf A_n \subseteq \limsup A_n$. Ένα παράδειγμα στο οποίο ο εγκλεισμός να είναι γνήσιος παίρνουμε αν θεωρήσουμε ένα μη κενό σύνολο X και θέσουμε $A_{2k} = \emptyset$ και $A_{2k-1} = X$, $k = 1, 2, \ldots$. Τότε, $\liminf A_n = \emptyset$ και $\limsup A_n = X$.

2. (α) Παρατηρήστε πρώτα ότι η $\sigma(\mathcal{F})$ περιέχει όλα τα μονοσύνολα του X: αν $x \in X$ τότε, επιλέγοντας δύο στοιχεία y και z του $X \setminus \{x\}$ έχουμε $\{x, y\} \in \mathcal{F}$, $\{x, z\} \in \mathcal{F}$ και $\{x\} = \{x, y\} \cap \{x, z\}$.

Η $\sigma(\mathcal{F})$ περιέχει όλα τα μονοσύνολα, επομένως περιέχει όλα τα αριθμήσιμα υποσύνολα του X (αριθμήσιμες ενώσεις μονοσυνόλων). Συνεπώς,

$$\sigma(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{B} = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Όμως, η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα και $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{B}$. Άρα, $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{B}$.

Έπεται ότι $\sigma(\mathcal{F}) = \{A \subseteq X \mid A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}$.

(β) Για το δεύτερο ερώτημα παρατηρήστε ότι η $\mathcal{F}$ είναι μονότονη κλάση: κάθε αύξουσα ή φθίνουσα ακολουθία δισυνόλων είναι αναγκαστικά σταθερή. Έπεται ότι $m(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$.

3. (α) Ορίζουμε $\mathcal{B} = \{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$.

(i) Η $\mathcal{B}$ είναι μη κενή: $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{A}$, άρα $Y \in \mathcal{B}$.

(ii) Αν $B \in \mathcal{B}$ τότε $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ και, αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα, $f^{-1}(B^c) = X \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$. Συνεπώς, $B^c \in \mathcal{B}$.

(iii) Αν $B_n \in \mathcal{B}$, $n \in \mathbb{N}$, τότε

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$$

διότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα. Συνεπώς, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}$.

Έπεται ότι η $\mathcal{B}$ είναι σ–άλγεβρα.

(β) Από την υπόθεση έχουμε $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$. Από το (α) βλέπουμε ότι

$$\mathcal{C} = \sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{B}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ για κάθε $B \in \mathcal{C}$.

(γ) Εφαρμογή του (β): πάρτε $\mathcal{E}$ την οικογένεια των ανοικτών υποσυνόλων του Y, $\mathcal{C}$ την οικογένεια των Borel υποσυνόλων του Y, και $\mathcal{A}$ την οικογένεια των Borel υποσυνόλων του X. Παρατηρήστε ότι αν $B \in \mathcal{E}$ τότε το $f^{-1}(B)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του X, άρα $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

4. (α) Θέτουμε $\mathcal{F} = \big\{\{x = (x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_j > a_j\}, j = 1, \ldots, n, \, a_j \in \mathbb{R}\big\}$. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Η $\sigma(\mathcal{F})$ περιέχει όλους τους ημιχώρους της μορφής $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_j \geq a_j\}$, $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_j < b_j\}$ και $\{x = (x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_j \leq b_j\}$, όπου $j = 1, \ldots, n$ και $a_j \in \mathbb{R}$.

(ii) Η $\sigma(\mathcal{F})$ περιέχει όλα τα διαστήματα.

Έπεται ότι η $\sigma(\mathcal{F})$ περιέχει όλα τα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

(β) Έστω $\mathcal{F}_1 = \{B(x, r) \,|\, x \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}^+\}$. Δείξτε ότι κάθε ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ γράφεται σαν αριθμήσιμη ένωση συνόλων από την $\mathcal{F}_1$. Έπεται ότι κάθε Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ανήκει στην $\sigma(\mathcal{F}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{F})$.

5. Έστω F ένα κλειστό υποσύνολο του X. Τότε,

$$F = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{x \in X : \rho(x, F) < \frac{1}{n}\right\},$$

όπου $\rho(x, F) = \inf\{\rho(x, y) : y \in F\}$. Παρατηρήστε ότι τα σύνολα $A_n = \big\{x \in X : \rho(x, F) < \frac{1}{n}\big\}$ είναι ανοικτά, διότι η $x \mapsto \rho(x, F)$ είναι συνεχής συνάρτηση. Άρα, το F είναι G_δ σύνολο.

Έστω G ένα ανοικτό υποσύνολο του X. Από το προηγούμενο ερώτημα, υπάρχουν ανοικτά σύνολα A_n ώστε $X \setminus G = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$. Έπεται ότι το $G = (X \setminus G)^c = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X \setminus A_n)$ είναι αριθμήσιμη ένωση κλειστών συνόλων, δηλαδή F_σ–σύνολο.

6. (α) Ορίζουμε $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \text{η } f \text{ είναι συνεχής στο } x\}$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \text{υπάρχει } \delta > 0 \text{ ώστε για κάθε } y, z \in B(x, \delta) \text{ να ισχύει } |f(y) - f(z)| < \frac{1}{m}\right\},$$

όπου $B(x,\delta)$ η ανοικτή Ευκλείδεια μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα δ. Δείξτε ότι $A=\bigcap_{m=1}^{\infty} A_m$ και ότι κάθε A_m είναι ανοικτό σύνολο. Έπεται ότι το A είναι G_δ–σύνολο.

(β) Ορίζουμε $B=\{x\in\mathbb{R}^n \mid$ υπάρχει το $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\}$. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, το $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ υπάρχει αν και μόνο αν η ακολουθία $(f_k(x))_{k=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy. Έτσι, μπορείτε να γράψετε το B στη μορφή

$$B=\bigcap_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{r,s=k}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R}^n:\ |f_r(x)-f_s(x)|\le\frac{1}{m}\right\}\right)\right).$$

Από τη συνέχεια των f_k, για κάθε k και m, το σύνολο

$$\bigcap_{r,s=k}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R}^n:\ |f_r(x)-f_s(x)|\le\frac{1}{m}\right\}$$

είναι κλειστό σύνολο (ως τομή κλειστών συνόλων). Άρα, για κάθε $m\in\mathbb{N}$, το σύνολο

$$B_m=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigcap_{r,s=k}^{\infty}\left\{x\in\mathbb{R}^n:\ |f_r(x)-f_s(x)|\le\frac{1}{m}\right\}\right)$$

είναι F_σ–σύνολο. Έπεται ότι το $B=\bigcap_{m=1}^{\infty} B_m$ είναι $F_{\sigma\delta}$–σύνολο.

7. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{A}=\{A\subseteq X \mid \text{ υπάρχει αριθμήσιμη υποοικογένεια } \mathcal{C}_A \text{ της } \mathcal{F} \text{ ώστε } A\in\sigma(\mathcal{C}_A)\}.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα:

(α) Η $\mathcal{A}$ είναι μη κενή: αν $E\in\mathcal{F}$ τότε $X\in\sigma(\mathcal{C}_X)$ όπου $\mathcal{C}_X=\{E\}\subseteq\mathcal{F}$. Άρα, $X\in\mathcal{A}$.

(β) Αν $A\in\mathcal{A}$ τότε υπάρχει αριθμήσιμη $C_A\subseteq\mathcal{F}$ ώστε $A\in\sigma(\mathcal{C}_A)$. Έπεται ότι $A^c\in\sigma(\mathcal{C}_A)$. Άρα, $A\in\mathcal{A}$ (πάρτε $\mathcal{C}_{A^c}=\mathcal{C}_A$).

(γ) Έστω $A_n\in\mathcal{A}$. Υπάρχουν αριθμήσιμες $C_{A_n}\subseteq\mathcal{F}$ ώστε $A_n\in\sigma(\mathcal{C}_{A_n})$. Η οικογένεια $\mathcal{C}_{\cup A_n}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\mathcal{C}_{A_n}\subseteq\mathcal{F}$ είναι αριθμήσιμη και για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε

$$A_n\in\sigma(\mathcal{C}_{A_n})\subseteq\sigma(\mathcal{C}_{\cup A_n}).$$

Άρα,

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\in\sigma(\mathcal{C}_{\cup A_n}).$$

Τέλος, αν $A\in\mathcal{F}$ τότε $A\in\sigma(\mathcal{C}_A)$ όπου $\mathcal{C}_A=\{A\}\subseteq\mathcal{F}$. Άρα, $A\in\mathcal{A}$. Αφού η σ–άλγεβρα $\mathcal{A}$ περιέχει την $\mathcal{F}$, συμπεραίνουμε ότι $\sigma(\mathcal{F})\subseteq\mathcal{A}$. Δηλαδή, για κάθε $A\in\sigma(\mathcal{F})$ υπάρχει αριθμήσιμη $C_A\subseteq\mathcal{F}$ ώστε $A\in\sigma(\mathcal{C}_A)$.

8. (α) Έχουμε $\liminf\limits_{n\to\infty} A_n=\cup_{k=1}^{\infty}\left(\cap_{j=k}^{\infty}A_j\right)$, δηλαδή $\cap_{j=k}^{\infty}A_j\nearrow\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$. Από τη συνέχεια του μ έπεται ότι

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty}A_n\right)=\lim_{k\to\infty}\mu\left(\cap_{j=k}^{\infty}A_j\right)=\sup_{k\in\mathbb{N}}\mu\left(\cap_{j=k}^{\infty}A_j\right).$$

Από τη μονοτονία του μ, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mu\left(\cap_{j=k}^{\infty} A_j\right) \leq \inf_{j\geq k} \mu(A_j)$. Έπεται ότι

$$\mu\left(\liminf_{n\to\infty} A_n\right) \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{j\geq k} \mu(A_j) = \liminf_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(β) Έχουμε $\limsup\limits_{n\to\infty} A_n = \cap_{k=1}^{\infty}\left(\cup_{j=k}^{\infty} A_j\right)$, δηλαδή $\cup_{j=k}^{\infty} A_j \searrow \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Από την υπόθεση ότι $\mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty$ και τη συνέχεια του μ έπεται ότι

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\cup_{j=k}^{\infty} A_j\right) = \inf_{k\in\mathbb{N}} \mu\left(\cup_{j=k}^{\infty} A_j\right).$$

Από τη μονοτονία του μ, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε $\mu\left(\cup_{j=k}^{\infty} A_j\right) \geq \sup_{j\geq k} \mu(A_j)$. Έπεται ότι

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \geq \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{j\geq k} \mu(A_j) = \limsup_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

(γ) Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu\left(\cup_{j=k}^{\infty} A_j\right) \leq \sum_{j=k}^{\infty} \mu(A_j) < \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν και $\mu\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) \leq \mu\left(\cup_{j=k}^{\infty} A_j\right)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι $\mu\left(\limsup\limits_{n\to\infty} A_n\right) = 0$.

9. Αφού η $\{\mu_n\}$ είναι αύξουσα, το $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ υπάρχει (και ενδεχομένως είναι άπειρο) για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Επίσης, $\mu(A) \geq \mu_n(A)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Δείχνουμε ότι το μ είναι μέτρο:

(i) Από τον ορισμό του μ έχουμε $\mu(\emptyset) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(\emptyset) = 0$, αφού $\mu_n(\emptyset) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Έστω $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \mu(A_k) &= \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \mu_n(A_k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu_n(A_k)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\cup_{k=1}^{N} A_k\right) \leq \lim_{n\to\infty} \mu_n\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right)\\ &= \mu\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k) \leq \mu\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρήστε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\mu_n\left(\cup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_n(A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

10. Αφού το μ είναι σ–πεπερασμένο, υπάρχει ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Έστω $E \in \mathcal{A}$. Για κάθε $i \in I$ έχουμε

$$\mu(E \cap A_i) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E \cap B_n \cap A_i).$$

Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\{i \in I : \mu(E \cap A_i) > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 0\}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το σύνολο $U_n = \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 0\}$ είναι αριθμήσιμο. Παρατηρήστε ότι, για κάθε n και για κάθε k, το σύνολο

$$U_{n,k} = \{i \in I : \mu(E \cap B_n \cap A_i) > 1/k\}$$

είναι πεπερασμένο: τα σύνολα $(E \cap B_n \cap A_i)_{i \in U_{n,k}}$ είναι ξένα και περιέχονται στο $E \cap B_n$, άρα

$$\frac{1}{k} \cdot \mathrm{card}(U_{n,k}) \leq \mu(E \cap B_n) \leq \mu(B_n) < \infty.$$

Έπεται ότι το $U_n = \cup_{k=1}^{\infty} U_{n,k}$ είναι αριθμήσιμο.

11. Έστω $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \infty$. Ορίζουμε

$$S = \{B \in \mathcal{A}, B \subseteq A, 0 < \mu(B) < \infty\}$$

και θέτουμε

$$s = \sup(S).$$

Αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο, το σύνολο S είναι μη κενό. Συνεπώς, $s > 0$.

Υποθέτουμε ότι $s < \infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ βρίσκουμε $B_n \in S$ ώστε $\mu(B_n) > \left(1 - \frac{1}{n}\right) s$. Θεωρούμε το σύνολο

$$B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n.$$

Τότε, $B \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq A$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $\mu(B) < \infty$, τότε $B \in S$. Επίσης,

$$\mu(B) \geq \mu(B_n) > \left(1 - \frac{1}{n}\right) s$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα $\mu(B) = s$. Θεωρούμε το $A \setminus B$: έχουμε $\mu(A \setminus B) = \infty$. Αφού το μ είναι ημιπεπερασμένο, μπορούμε να βρούμε $C \subseteq A \setminus B$ ώστε $0 < \mu(C) < \infty$. Όμως τότε, $B \cup C \subseteq A$ και $0 < \mu(B \cup C) < \infty$, οπότε $B \cup C \in S$ και $\mu(B \cup C) = \mu(B) + \mu(C) > s$. Άτοπο.

(β) Αν $\mu(B) = \infty$, από την $\mu(B) = \lim\limits_{k \to \infty} \mu\left(\cup_{n=1}^{k} B_n\right)$ μπορούμε να βρούμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\mu\left(\cup_{n=1}^{k} B_n\right) > s.$$

Αφού $\cup_{n=1}^{k} B_n \in S$, καταλήγουμε πάλι σε άτοπο.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $s = \infty$. Δηλαδή, για κάθε $M > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{A}$ ώστε $B \subseteq A$ και $M < \mu(B) < \infty$.

12. Ορίζουμε

$$\mathcal{A} = \{A \in \sigma(\mathcal{F}) : \text{ για κάθε } \varepsilon > 0 \text{ υπάρχει } F \in \mathcal{F} \text{ ώστε } \mu(A \triangle F) < \varepsilon\}.$$

Είναι φανερό ότι $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$. Ειδικότερα, $\mathcal{A} \neq \emptyset$.

Αν $A \in \mathcal{A}$ και αν $\varepsilon > 0$, τότε υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \triangle F) < \varepsilon$. Παρατηρούμε ότι $F^c \in \mathcal{F}$ και $A^c \triangle F^c = A \triangle F$, άρα $\mu(A^c \triangle F^c) < \varepsilon$. Έπεται ότι $A^c \in \mathcal{A}$.

Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο μέτρο, έχουμε $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\big(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\big) < \infty$. Συνεπώς, υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $\sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) < \frac{\varepsilon}{2}$. Για $n = 1, \ldots, k$ βρίσκουμε $F_n \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A_n \triangle F_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$. Αφού η $\mathcal{F}$ είναι άλγεβρα, η ένωση $F = F_1 \cup \cdots \cup F_k \in \mathcal{F}$. Παρατηρήστε ότι

$$(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \triangle F \subseteq \big(\cup_{n=k+1}^{\infty} A_n\big) \cup (A_1 \triangle F_1) \cup \cdots \cup (A_k \triangle F_k).$$

Συνεπώς,

$$\mu\left((\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \triangle F\right) \leq \sum_{n=k+1}^{\infty} \mu(A_n) + \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n \triangle F_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=1}^{k} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} < \varepsilon.$$

Έπεται ότι $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Από τα παραπάνω, η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα. Αφού $\mathcal{A} \supseteq \mathcal{F}$, συμπεραίνουμε ότι $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{F})$.

13. Αφού $B \setminus A \subseteq A \triangle B$ και $\mu(A \triangle B) = 0$, η πληρότητα του $(X, \mathcal{A}, \mu)$ εξασφαλίζει ότι $B \setminus A \in \mathcal{A}$ και $\mu(B \setminus A) = 0$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $A \setminus B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \setminus B) = 0$.

Η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα, συνεπώς, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B) \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \cap B) = \mu(A) - \mu(A \setminus B) = \mu(A) - 0 = \mu(A)$. Ομοίως, $B = (A \cap B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{A}$ και $\mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A) = \mu(A \cap B) + 0 = \mu(A)$.

14. (α) Δείχνουμε πρώτα ότι $\mathcal{A} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$: αν $E \in \mathcal{A}$, τότε $E \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ (δεν χρειάζεται η υπόθεση ότι $\mu(A) < \infty$). Ειδικότερα, η $\tilde{\mathcal{A}}$ είναι μη κενή.

Έστω $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$ έχουμε $E^c \cap A = A \setminus (E \cap A) \in \mathcal{A}$. Άρα, $E^c \in \tilde{\mathcal{A}}$.

Τέλος, έστω $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία συνόλων στην $\tilde{\mathcal{A}}$. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \infty$ έχουμε

$$(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) \cap A = \cup_{n=1}^{\infty} (E_n \cap A) \in \mathcal{A}$$

διότι η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα και $E_n \cap A \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Άρα, $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(β) Υποθέτουμε ότι το μ είναι σ–πεπερασμένο. Υπάρχει ακολουθία $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ ώστε $X = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$. Έστω $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Τότε, $E \cap B_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού η $\mathcal{A}$ είναι σ–άλγεβρα,

$$E = \cup_{n=1}^{\infty} (E \cap B_n) \in \mathcal{A}.$$

Δηλαδή, $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}$.

(γ) Δείξτε πρώτα ότι το $\tilde{\mu}$ είναι μέτρο στον $(X, \tilde{\mathcal{A}})$. Έστω E ένα τοπικά μετρήσιμο σύνολο στον $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$. Τότε, για κάθε $A \in \tilde{\mathcal{A}}$ με $\tilde{\mu}(A) < \infty$ έχουμε $E \cap A \in \tilde{\mathcal{A}}$. Από τον ορισμό του $\tilde{\mu}$ αυτό σημαίνει ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) = \tilde{\mu}(A) < \infty$ έχουμε $E \cap A \in \tilde{\mathcal{A}}$ και $\tilde{\mu}(E \cap A) \leq \tilde{\mu}(A) < \infty$, δηλαδή $E \cap A \in \mathcal{A}$. Συνεπώς, $E \in \tilde{\mathcal{A}}$. Αφού κάθε τοπικά μετρήσιμο σύνολο του $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι στην $\tilde{\mathcal{A}}$, ο $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ είναι κορεσμένος χώρος μέτρου.

15. (α)$\Longrightarrow$(γ): Παρατηρούμε πρώτα ότι $\mu(X) > 0$: αλλιώς θα είχαμε $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\} = \{0\}$. Επίσης, υπάρχει $A_1 \in \mathcal{A}$ ώστε $0 < \mu(A_1) < \mu(X)$: αλλιώς θα είχαμε $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\} = \{0, \mu(X)\}$.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρεί ξένα σύνολα $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n = 1, \ldots, k$ και $\mu(B_k) > 0$, όπου $B_k = X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_k)$. Παρατηρήστε ότι κάποιο από τα σύνολα

$$U_{n,k} = \{\mu(C) : C \in \mathcal{A}, C \subseteq A_n\} \quad (n \leq k) \quad \text{ή} \quad J_k = \{\mu(C) : C \in \mathcal{A}, C \subseteq B_k\}$$

είναι άπειρο. Πράγματι, για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\mu(A) = \mu(A \cap A_1) + \cdots + \mu(A \cap A_k) + \mu(A \cap B_k) \in U_{1,k} + \cdots + U_{k,k} + J_k.$$

Αν λοιπόν τα $U_{n,k}$ $(n \leq k)$ και J_k ήταν πεπερασμένα, τότε το $\{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ θα ήταν πεπερασμένο. Συνεχίζουμε ως εξής:

(i) Αν το J_k είναι άπειρο, βρίσκουμε $A_{k+1} \in \mathcal{A}$, ξένο πρός τα $A_1, \ldots, A_k$, με $\mu(A_{k+1}) > 0$ και $\mu(B_k \setminus A_{k+1}) > 0$. Τα σύνολα $A_1, \ldots, A_{k+1}$ έχουν θετικό μέτρο, το ίδιο και το $X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k+1})$.

(ii) Αν κάποιο $U_{n,k}$ είναι άπειρο, βρίσκουμε ξένα $A_n', A_n'' \in \mathcal{A}$ με $A_n = A_n' \cup A_n''$ και $\mu(A_n') > 0$, $\mu(A_n'') > 0$. Τότε, τα $A_m, m \neq n$ και A_n', A_n'' έχουν θετικό μέτρο, το ίδιο και το συμπλήρωμα της ένωσής τους.

Δηλαδή, υπάρχουν ξένα σύνολα $A_1, \ldots, A_{k+1} \in \mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n = 1, \ldots, k+1$ και $\mu(B_{k+1}) > 0$, όπου $B_{k+1} = X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{k+1})$.

Η διαδικασία αυτή ορίζει άπειρη ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων από την $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(γ)$\Longrightarrow$(β): Θεωρούμε ακολουθία $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων από την $\mathcal{A}$ ώστε $\mu(A_n) > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) < \infty,$$

συνεπώς, $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $0 < \mu(A_n) < \varepsilon$.

(β)$\Longrightarrow$(α): Ας υποθέσουμε ότι το $M = \{\mu(A) : A \in \mathcal{A}\}$ είναι πεπερασμένο. Από την υπόθεση, το σύνολο των θετικών στοιχείων του M είναι μη κενό, άρα το M έχει ελάχιστο θετικό στοιχείο $\mu(B) = \varepsilon > 0$, για κάποιο $B \in \mathcal{A}$. Τότε, πάλι από την υπόθεση, υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ ώστε $0 < \mu(A) < \varepsilon$. Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα το M είναι άπειρο.

16. (α) Από τον ορισμό του μ^* έχουμε $\mu^*(\emptyset) = 0$. Επίσης, αν $A \subseteq B \subseteq X$ έχουμε $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (αν $B \neq \emptyset$ τότε $\mu^*(A) \leq 1 = \mu^*(B)$ ενώ αν $B = \emptyset$ τότε $A = \emptyset$ και $\mu^*(A) = 0 = \mu^*(B)$).

Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του X. Αν $A_n = \emptyset$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $\cup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, άρα $\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$. Αν υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $A_m \neq \emptyset$, τότε $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \neq \emptyset$, άρα

$$\mu^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 = \mu^*(A_m) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Από τα παραπάνω έπεται ότι το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο.

(β) Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A}_{\mu^*} = \{\emptyset, X\}$. Έστω A ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του X. Τότε, $\mu^*(A) = \mu^*(X \setminus A) = 1$. Συνεπώς,

$$\mu^*(A \cap X) + \mu^*(A^c \cap X) = 2 > 1 = \mu^*(X).$$

Αυτό δείχνει ότι $A \notin \mathcal{A}_{\mu^*}$.

17. (α) Δείξτε ότι:

(i) Αν $E = \{n_1, \ldots, n_{2k}\}$ τότε $\mu^*(E) = 2k$.

(ii) Αν $E = \{n_1, \ldots, n_{2k-1}\}$ τότε $\mu^*(E) = 2k$.

Για παράδειγμα, αν $E = \{n_1, \ldots, n_{2k-1}\}$ τότε

$$E \subset \left(\cup_{j=1}^{k-1} \{n_{2j-1}, n_{2j}\}\right) \cup \{n_{2k-1}, n_1\},$$

άρα

$$\mu^*(E) \leq \sum_{j=1}^{k-1} \tau(\{n_{2j-1}, n_{2j}\}) + \tau(\{n_{2k-1}, n_1\}) = 2k.$$

Αφού το E δεν καλύπτεται από λιγότερα από k δισύνολα, έχουμε $\mu^*(E) = 2k$.

Τέλος, αν το E έχει άπειρα στοιχεία τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $A_k \subset E$ με $\mathrm{card}(A_k) = 2k$. Άρα, $\mu^*(E) \geq \mu^*(A_k) = 2k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, $\mu^*(E) = \infty$.

(β) Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A}_{\mu^*} = \{\emptyset, \mathbb{N}\}$. Έστω A ένα μη κενό γνήσιο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Αν $m \in A$ και $n \notin A$ τότε για το $E = \{m, n\}$ έχουμε

$$\mu^*(A \cap E) + \mu^*(A^c \cap E) = \mu^*(\{m\}) + \mu^*(\{n\}) = 2 + 2 = 4 > 2 = \mu^*(E).$$

Αυτό δείχνει ότι $A \notin \mathcal{A}_{\mu^*}$.

18. Θεωρούμε τα σύνολα $A_m = \{m\}$, $m = 1, 2, \ldots$. Τότε, $\cup_{m=1}^{\infty} A_m = \mathbb{N}$. Άρα,

$$\varphi\left(\cup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathrm{card}(\mathbb{N} \cap \{1, \ldots, n\}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{n}{n} = 1.$$

Όμως, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $n \geq m$ έχουμε $\mathrm{card}(A_m \cap \{1, \ldots, n\}) = 1$. Άρα,

$$\varphi(A_m) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathrm{card}(A_m \cap \{1, \ldots, n\}) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Δηλαδή,

$$\varphi\left(\cup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = 1 > 0 = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi(A_m).$$

Αφού η φ δεν είναι σ–υποπροσθετική, η φ δεν είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{N}$.

19. Έχουμε δείξει ότι αν $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία ξένων μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X τότε

$$\mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap E)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n \cap E)$$

για κάθε $E \subseteq X$. Επίσης, για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\mu^*\big(\cup_{n=1}^{N} (B_n \cap E)\big) = \sum_{n=1}^{N} \mu^*(B_n \cap E).$$

Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια αύξουσα ακολουθία μ^*–μετρήσιμων υποσυνόλων του X. Ορίζουμε $B_1 = A_1$ και $B_n = A_n \setminus A_{n-1}$ για $n \geq 2$. Τότε, τα σύνολα B_n είναι ξένα και μ^*–μετρήσιμα. Επίσης $\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$ και $\cup_{n=1}^{N} B_n = \cup_{n=1}^{N} A_n = A_N$ για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap E)\big) &= \mu^*\big((\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \cap E\big) = \mu^*\big((\cup_{n=1}^{\infty} B_n) \cap E\big) \\
&= \mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} (B_n \cap E)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n \cap E) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} \mu^*(B_n \cap E)\right) = \lim_{N\to\infty} \mu^*\big((\cup_{n=1}^{N} B_n) \cap E\big) \\
&= \lim_{N\to\infty} \mu^*(A_N \cap E).
\end{aligned}$$

20. (α) Αποδεικνύουμε την σ–υποπροσθετικότητα του μ^*. Έστω $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία υποσυνόλων του X. Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $\mu^*(E_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε n βρίσκουμε $A_n \in \mathcal{A}$ ώστε $E_n \subseteq A_n$ και $\mu(A_n) < \mu^*(E_n) + \varepsilon/2^n$. Τότε, $\cup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} A_n$, και

$$\mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\big) \leq \mu\big(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n) + \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, βλέπουμε ότι $\mu^*\big(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\big) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$.

(β) Έστω $(X, \tilde{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ η πλήρωση του μ. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Αν $A \in \mathcal{A}$ τότε $\mu^*(A) = \mu(A)$.

(ii) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_{\mu_*}$. Θα χρειαστείτε την εξής παρατήρηση: αν $E \subseteq X$ με $\mu^*(E) < \infty$, τότε υπάρχουν $F_n \in \mathcal{A}$ ώστε $F_n \supseteq E$ για κάθε n και $\mu(F_n) < \mu^*(E) + \frac{1}{n}$. Συνεπώς, $F = \cap_{n=1}^{\infty} F_n \supseteq E$ και $\mu(F) = \mu^*(E)$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την παρατήρηση μπορούμε να γράψουμε

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu(F \cap A) + \mu(F \cap A^c) = \mu(F) = \mu^*(E)$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

(iii) Αν $A, F \in \mathcal{A}$, $\mu(F) = 0$ και $B \subseteq F$, τότε $A \cup B \in \mathcal{A}_{\mu^*}$. Δηλαδή, $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(iv) Αν $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και $\overline{\mu}(A) = \mu^*(A) < \infty$, τότε $A \in \tilde{\mathcal{A}}$. Θα βοηθήσει η παρατήρηση του Βήματος 2.

(v) Αν το μ είναι σ–πεπερασμένο τότε $\mathcal{A}_{\mu^*} \subseteq \tilde{\mathcal{A}}$.

21. (α) Έχουμε $G_2 \setminus G_1 \subseteq G_2 \setminus E$ διότι $E \subseteq G_1$. Αφού $G_2 \setminus G_1 \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και το G_2 είναι μετρήσιμο κάλυμα του E, συμπεραίνουμε ότι $\mu(G_2 \setminus G_1) = 0$.

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι $\mu(G_1 \setminus G_2) = 0$. Συνεπώς,

$$\mu(G_1 \triangle G_2) = \mu(G_2 \setminus G_1) + \mu(G_1 \setminus G_2) = 0.$$

Τέλος, από τις $\mu(G_1 \setminus G_2) = \mu(G_1 \setminus G_2) = 0$ έπεται ότι

$$\mu(G_2) = \mu(G_2 \cap G_1) + \mu(G_2 \setminus G_1) = \mu(G_2 \cap G_1) + \mu(G_1 \setminus G_2) = \mu(G_1).$$

(β) Έστω $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ με $A \subseteq G \setminus E$. Τότε, $E \subseteq G \setminus A$. Άρα,

$$\mu(G) = \mu^*(E) \leq \mu^*(G \setminus A) = \mu(G \setminus A) = \mu(G) - \mu(A),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη μονοτονία του μ^*, το γεγονός ότι $G \setminus A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και την υπόθεση ότι $\mu(G) < \infty$. Έπεται ότι $\mu(A) = 0$. Άρα, το G είναι μ^*–μετρήσιμο κάλυμα του E.

22. (α) Το μ^* είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{R}$: η μόνη ιδιότητα που χρειάζεται προσοχή είναι η σ–υποπροσθετικότητα. Πιο συγκεκριμένα, η περίπτωση $\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty$. Αυτό σημαίνει ότι το $\cup_{n=1}^{\infty} A_n$ είναι υπεραριθμήσιμο και έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Παρατηρήστε ότι τουλάχιστον ένα από τα A_n είναι υπεραριθμήσιμο. Επίσης, αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος υπεραριθμήσιμα A_m, τα $A_{m_1}, \ldots, A_{m_s}$, και κανένα από αυτά δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο, τότε, για κάθε $j = 1, \ldots, s$ υπάρχει $\alpha_j > 0$ ώστε το σύνολο $\{x \in A_{m_j} : |x| > \alpha_j\}$ να είναι αριθμήσιμο. Τότε, αν θέσουμε $\alpha = \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_s\}$ βλέπουμε ότι το σύνολο $\{x \in \cup_{n=1}^{\infty} A_n : |x| > \alpha\}$ είναι αριθμήσιμο. Αυτό είναι άτοπο.

Απομένουν λοιπόν δύο περιπτώσεις:

(i) Κάποιο A_m έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Τότε, $\mu^*(A_m) = \infty$, άρα

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty = \mu^*(A_m) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

(ii) Υπάρχουν άπειρα το πλήθος υπεραριθμήσιμα A_m, κανένα όμως δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο. Αφού $\mu^*(A_m) = 1$ για καθένα από αυτά, παίρνουμε

$$\mu^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

(β) Έστω A αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ το $E \cap A$ είναι αριθμήσιμο, άρα

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = 0 + \mu^*(E \cap A^c) \leq \mu^*(E)$$

από τη μονοτονία του μ^*. Έπεται ότι $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$, και συνεπώς,

$$\mathcal{A}_{\mu^*} \supseteq \{A \subseteq \mathbb{R} \,|\, A \text{ αριθμήσιμο ή } A^c \text{ αριθμήσιμο}\}.$$

Έστω τώρα A υπεραριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ με υπεραριθμήσιμο συμπλήρωμα. Μπορούμε να βρούμε υπεραριθμήσιμα $G \subseteq A$ και $F \subseteq A^c$ τα οποία δεν έχουν σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο (εξηγήστε γιατί). Αν θέσουμε $E = G \cup F$ τότε το E δεν έχει σημείο συμπύκνωσης στο άπειρο (εξηγήστε γιατί), άρα

$$\mu^*(E \cap A) + \mu^*(E \cap A^c) = \mu^*(G) + \mu^*(F) = 1 + 1 = 2 > 1 = \mu^*(E).$$

Άρα, $A \notin \mathcal{A}_{\mu^*}$.

(γ) Κάθε $E \subseteq \mathbb{R}$ έχει μ^*–μετρήσιμο κάλυμα. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Το E είναι αριθμήσιμο. Τότε, $E \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ οπότε μπορούμε να πάρουμε $G = E$.

(ii) Το E είναι υπεραριθμήσιμο. Παίρνουμε $G = \mathbb{R}$. Αν $A \in \mathcal{A}_{\mu^*}$ και $A \subseteq \mathbb{R} \setminus E = E^c$, τότε το A δεν έχει αριθμήσιμο συμπλήρωμα (παρατηρήστε ότι $A^c \supseteq E$) άρα είναι αριθμήσιμο. Έπεται ότι $\mu(A) = 0$.

23. Υποθέτουμε πρώτα ότι τα A και B είναι φραγμένα, δηλαδή υπάρχουν διαστήματα I και J ώστε: $A \subseteq I$ και $B \subseteq J$. Δείχνουμε διαδοχικά τα εξής:

(i) $\lambda_2^*(A \times B) \leq \lambda_1(A)\lambda_2(B)$. Θεωρούμε τυχούσες καλύψεις $\{R_m\}_{m=1}^\infty$ και $\{Q_n\}_{n=1}^\infty$ των A και B. Τότε, η $\{R_m \times Q_n\}_{m,n=1}^\infty$ είναι κάλυψη του $A \times B$. Άρα,

$$\begin{aligned}\lambda_2^*(A \times B) &\leq \sum_{n,m=1}^\infty \mathrm{vol}(R_m \times Q_n) = \sum_{n,m=1}^\infty \mathrm{vol}(R_m)\mathrm{vol}(Q_n) \\ &= \left(\sum_{m=1}^\infty \mathrm{vol}(R_m)\right)\left(\sum_{n=1}^\infty \mathrm{vol}(Q_n)\right).\end{aligned}$$

Πάρτε infimum ως προς όλες τις δυνατές καλύψεις.

(ii) Το $A \times B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Πράγματι, υπάρχουν F_σ σύνολα E, F και σύνολα N, Z μηδενικού μέτρου ώστε $A = E \cup N$ και $B = F \cup Z$. Τότε,

$$A \times B = (E \cup N) \times (F \cup Z) = (E \times F) \cup (N \times F) \cup (E \times Z) \cup (N \times Z).$$

Το $E \times F$ είναι F_σ σύνολο και τα υπόλοιπα τρία σύνολα είναι μηδενικού μέτρου (από το προηγούμενο βήμα). Άρα, το $A \times B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(iii) Παρατηρήστε ότι

$$I \times J = (A \times B) \cup ((I \setminus A) \times B) \cup (A \times (J \setminus B)) \cup ((I \setminus A) \times (J \setminus B)).$$

Όλα τα σύνολα είναι μετρήσιμα από το δεύτερο βήμα. Άρα,

$$\begin{aligned}\lambda_1(I)\lambda_1(J) &= \lambda_2(I\times J)\\ &= \lambda_2(A\times B)+\lambda_2((I\setminus A)\times B)+\lambda_2(A\times(J\setminus B))+\lambda_2((I\setminus A)\times(J\setminus B))\\ &\leq \lambda_1(A)\lambda_1(B)+\lambda_1(I\setminus A)\lambda_1(B)+\lambda_1(A)\lambda_1(J\setminus B)+\lambda_1(I\setminus A)\lambda_1(J\setminus B)\\ &= [\lambda_1(A)+\lambda_1(I\setminus A)]\cdot[\lambda_1(B)+\lambda_1(J\setminus B)]\\ &= \lambda_1(I)\lambda_1(J).\end{aligned}$$

Πρέπει να έχουμε παντού ισότητες: ειδικότερα, $\lambda_2(A\times B)=\lambda_1(A)\lambda_2(B)$.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε τα διαστήματα $I_n=[-n,n]$ και ορίζουμε $A_n=A\cap I_n$, $B_n=B\cap I_n$. Τότε, $A_n\times B_n\nearrow A\times B$, άρα το $A\times B$ είναι Lebesgue μετρήσιμο. Επίσης,

$$\lambda_2(A\times B)=\lim_{n\to\infty}\lambda_2(A_n\times B_n)=\lim_{n\to\infty}\lambda_1(A_n)\lambda_1(B_n)=\lambda_1(A)\lambda_1(B).$$

24. Μιμούμαστε την κατασκευή του συνόλου του Cantor. Θεωρούμε το διάστημα $I^0=[0,1]$ και το χωρίζουμε σε δέκα ίσα διαστήματα. Αφαιρούμε το τέταρτο κλειστό διάστημα $\left[\frac{4}{10},\frac{5}{10}\right]$. Ονομάζουμε I^1 το σύνολο που απομένει, το οποίο αποτελείται από εννέα διαστήματα μήκους $\frac{1}{10}$.

Χωρίζουμε καθένα από αυτά σε δέκα ίσα διαστήματα και αφαιρούμε το τέταρτο κλειστό διάστημα. Ονομάζουμε I^2 το σύνολο που απομένει. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n=1,2,\dots$ ένα σύνολο I^n έτσι ώστε η ακολουθία (I^n) να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $I^n\supset I^{n+1}$ για κάθε $n\geq 0$.

(ii) Το I^n είναι η ένωση 9^n κλειστών διαστημάτων, καθένα από τα οποία έχει μήκος $\frac{1}{10^n}$.

Ορίζουμε $C=\bigcap_{n=0}^{\infty}I^n$. Το C είναι μετρήσιμο και από την $\lambda(I^n)=9^n/10^n$ έπεται ότι $\lambda(C)=0$. Παρατηρήστε ότι το $x\in[0,1]$ δεν έχει δεκαδικό ανάπτυγμα που να περιέχει το ψηφίο 4 αν και μόνο αν $x\in C$.

25. Δείχνουμε πρώτα το εξής: αν W είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^k$ με $\lambda(W)>0$, τότε, για κάθε $0<\beta<\lambda(W)$ μπορούμε να βρούμε συμπαγές $V\subset W$ ώστε $\lambda(V)=\beta$.

Απόδειξη. Αφού το W είναι συμπαγές, μπορούμε να βρούμε κλειστό διάστημα $[a,b]\subset\mathbb{R}$ και κλειστό διάστημα $Q\subset\mathbb{R}^{k-1}$ ώστε $W\subseteq Q_1:=[a,b]\times Q$. Ορίζουμε $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ με

$$f(t)=\lambda(W\cap\{x=(x_1,\dots,x_k)\in Q_1:\,a\leq x_1\leq t\}).$$

Η f είναι συνεχής: δείξτε ότι

$$|f(t)-f(s)|\leq\lambda_{k-1}(Q)\,|t-s|.$$

Αφού $f(a)=0$ και $f(b)=\lambda(W)$, ο ισχυρισμός έπεται από το θεώρημα ενδιάμεσης τιμής.

Έστω τώρα E και F δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^k$ με $E \subset F$ και $\lambda(E) < \lambda(F)$. Έστω $\alpha \in \big(\lambda(E), \lambda(F)\big)$. Αφού $\alpha - \lambda(E) < \lambda(F \setminus E)$, μπορούμε να βρούμε συμπαγές σύνολο $W \subseteq F \setminus E$ με $\lambda(W) > \alpha - \lambda(E)$. Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό, βρίσκουμε συμπαγές $V \subset W$ ώστε $\lambda(V) = \alpha - \lambda(E)$. Αν θέσουμε $K = E \cup V$, έχουμε ότι το K είναι συμπαγές, $E \subset K \subset F$ και $\lambda(K) = \alpha$.

26. Από τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου, για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{J_n\}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} J_n$ και

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(J_n) < (1+\varepsilon)\lambda^*(A).$$

Από την υποπροσθετικότητα του λ^* παίρνουμε

$$\lambda^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A \cap J_n).$$

Από τις παραπάνω ανισότητες έπεται ότι, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$,

$$\lambda^*(A \cap J_m) \geq \frac{1}{1+\varepsilon}\, \lambda^*(J_m).$$

Παίρνοντας $\varepsilon = \frac{1}{\alpha} - 1$ έχουμε το ζητούμενο.

27. Το επιχείρημα της προηγούμενης Άσκησης δουλεύει στον $\mathbb{R}^k$ για οποιονδήποτε $k \in \mathbb{N}$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι οι κορυφές των διαστημάτων J_n έχουν κορυφές με ρητές συντεταγμένες.

Εφαρμόζοντας το παραπάνω στα E και F, μπορούμε να βρούμε διαστήματα I_0 και J_0 με «ρητές κορυφές», ώστε

$$(*) \qquad \lambda(E \cap I_0) \geq \frac{3}{4}\lambda(I_0) \quad \text{και} \quad \lambda(F \cap J_0) \geq \frac{3}{4}\lambda(J_0).$$

Ισχυρισμός. Μπορούμε να βρούμε $m, n \in \mathbb{N}$ ώστε τα I_0 και J_0 να χωρίζονται σε m και n ίσους μη επικαλυπτόμενους κύβους αντίστοιχα (άσκηση: χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι οι ακμές των I_0 και J_0 έχουν ρητά μήκη).

Η $(*)$ και ένα επιχείρημα όμοιο με αυτό της Άσκησης 4 δείχνουν ότι υπάρχουν κύβοι I_1 και J_1 που έχουν το ίδιο μήκος ακμής, ώστε

$$\lambda(E \cap I_1) \geq \frac{3}{4}\lambda(I_1) \quad \text{και} \quad \lambda(F \cap J_1) \geq \frac{3}{4}\lambda(J_1).$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει κύβος I με κέντρο το 0 και υπάρχουν $x, y \in \mathbb{R}^k$ ώστε

$$\lambda((E-x) \cap I) \geq \frac{3}{4}\lambda(I) \quad \text{και} \quad \lambda((F-y) \cap I) \geq \frac{3}{4}\lambda(I).$$

Έπεται ότι

$$\lambda((E-x) \cap (F-y) \cap I) \geq \frac{1}{2}\lambda(I) > 0.$$

Θέτουμε $B = (E - x) \cap (F - y)$. Από το Λήμμα του Steinhaus, το $B - B$ περιέχει διάστημα με κέντρο το 0. Αφού

$$E - F - (x + y) = (E - x) - (F - y) \supseteq B - B,$$

συμπεραίνουμε ότι το $E - F$ περιέχει διάστημα. Αντικαθιστώντας το F με το $-F$ παίρνουμε το ζητούμενο.

28. Δείξτε διαδοχικά τα εξής:

(i) Αν το $F \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι συμπαγές τότε το $T(F)$ είναι συμπαγές.

(ii) Αν το $E \subseteq \mathbb{R}^k$ είναι F_σ–σύνολο τότε το E μπορεί να γραφτεί σαν αριθμήσιμη ένωση συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^k$. Από το προηγούμενο βήμα, το $T(E)$ είναι F_σ–σύνολο.

(iii) Η T είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση: υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|T(x) - T(y)\|_2 \leq M\,\|x - y\|_2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^k$.

(iv) Αν R είναι ένας κύβος (διάστημα με ισομήκεις ακμές) στον $\mathbb{R}^k$, τότε το $T(R)$ περιέχεται σε μια μπάλα ακτίνας το πολύ ίσης με $\frac{M\cdot d}{2} = \frac{M\sqrt{k}\alpha}{2}$ όπου d η διάμετρος και α η ακμή του R. Δηλαδή, υπάρχει $c = c(M, k) > 0$ ώστε το $T(R)$ να περιέχεται σε κύβο ακμής $c\alpha$. Έπεται ότι $\lambda(T(R)) \leq c^k \lambda(R)$.

(v) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο βήμα και την παρατήρηση ότι για τον ορισμό του εξωτερικού μέτρου του A αρκεί να θεωρήσουμε καλύψεις του A με κύβους, δείξτε ότι αν $\lambda(A) = 0$ τότε $\lambda(T(A)) = 0$.

Γράφοντας το τυχόν μετρήσιμο σύνολο σαν ένωση ενός F_σ–συνόλου και ενός συνόλου μέτρου 0 παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο.

29. (α) Από τη μονοτονία του εξωτερικού μέτρου έχουμε $\lambda(F) \leq \lambda^*(E)$ για κάθε κλειστό $F \subseteq E$. Συνεπώς,

$$\lambda_{(i)}(E) = \sup\{\lambda(F) : F \subseteq E, F \text{ κλειστό}\} \leq \lambda^*(E).$$

(β) Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι υπάρχει κλειστό $F \subseteq E$ ώστε $\lambda(E) < \lambda(F) + \varepsilon$. Από τον ορισμό του $\lambda_{(i)}(E)$ έπεται ότι $\lambda(E) < \lambda_{(i)}(E) + \varepsilon$. Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\lambda^*(E) \leq \lambda_{(i)}(E)$. Από το (α) προκύπτει η ισότητα.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\lambda^*(E) = \lambda_{(i)}(E) < \infty$. Μπορούμε τότε να βρούμε G_δ–σύνολο G και F_σ–σύνολο F ώστε $F \subseteq E \subseteq G$ και $\lambda(F) = \lambda^*(E) = \lambda(G) < \infty$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, $\lambda(G \setminus F) = \lambda(G) - \lambda(F) = 0$ και $E \setminus F \subseteq G \setminus F$, οπότε το $E \setminus F$ είναι Lebesgue μετρήσιμο (με $\lambda(E \setminus F) = 0$). Έπεται ότι το $E = F \cup (E \setminus F)$ είναι Lebesgue μετρήσιμο.

(γ) Αν $\lambda^*(E) = \infty$ τότε η ισοδυναμία στο (β) δεν είναι πάντα σωστή, με την εξής έννοια: υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο E με $\lambda_{(i)}(E) = \lambda^*(E) = \infty$. Παράδειγμα: θεωρήστε ένα μη μετρήσιμο $A \subset [0, 1]$ και πάρτε σαν E το $A \cup [2, +\infty)$.

30. *Πρώτος τρόπος.* Ορίζουμε την εξής σχέση ισοδυναμίας στο $[0,1]$:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Αν $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ είναι η οικογένεια των κλάσεων ισοδυναμίας της $\sim$, ορίζουμε, με χρήση του αξιώματος της επιλογής, ένα σύνολο $E \subset [0,1]$ το οποίο περιέχει ακριβώς ένα σημείο από κάθε F_α. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ των ρητών του $[-1,1]$ και ορίζουμε $E_n = q_n + E$. Από τον τρόπο ορισμού του E ελέγχουμε ότι τα E_n είναι ξένα ανά δύο και ότι

$$[0,1] \subseteq \cup_{n=1}^{\infty} E_n \subseteq [-1,2].$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lambda^*(E_n) = \lambda^*(E) > 0$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αλλιώς, θα είχαμε

$$1 = \lambda([0,1]) \leq \lambda^* \left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0.$$

Άρα,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(E_n) = +\infty > 3 = \lambda([-1,2]) \geq \lambda^* \left(\cup_{n=1}^{\infty} E_n\right).$$

Δεύτερος τρόπος. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει μη μετρήσιμο σύνολο $A \subset \mathbb{R}$. Συνεπώς, υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$ ώστε

$$\lambda^*(E) < \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E \cap A^c).$$

Θεωρήστε τα σύνολα $E_1 = E \cap A$, $E_2 = E \cap A^c$, $E_3 = E_4 = \cdots = \emptyset$.

31. (α) Παρατηρήστε ότι

$$\lambda(A(\varepsilon)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\left(q_n - \frac{\varepsilon}{2^n}, q_n + \frac{\varepsilon}{2^n}\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^n} = 2\varepsilon.$$

(β) Αν το $[0,1] \setminus A(\varepsilon)$ ήταν κενό, θα είχαμε $[0,1] \subseteq A(\varepsilon)$, οπότε $1 \leq \lambda(A(\varepsilon))$. Όμως, αν $\varepsilon < \frac{1}{2}$, από το (α) παίρνουμε $\lambda(A(\varepsilon)) \leq 2\varepsilon < 1$.

(γ) Αφού $0 \leq q_n \leq 1$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$ έχουμε $A \subseteq A(1/j) \subseteq [-1/j, 1+1/j]$. Άρα,

$$A \subseteq \bigcap_{j=1}^{\infty} [-1/j, 1+1/j] = [0,1].$$

Επίσης, από το (α),

$$\lambda(A) \leq \lambda(A(1/j)) \leq 2/j$$

για κάθε $j \in \mathbb{N}$. Άρα, $\lambda(A) = 0$.

(δ) Έχουμε $\mathbb{Q} \cap [0,1] = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq A(1/j)$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$, άρα $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq \cap_{j=1}^{\infty} A(1/j) = A$.

Για κάθε $j \in \mathbb{N}$, το $[0,1] \setminus A(1/j)$ είναι κλειστό και πουθενά πυκνό (διότι δεν περιέχει ρητούς). Ας υποθέσουμε ότι το A είναι αριθμήσιμο. Αν $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$[0,1] = A \cup ([0,1] \setminus A) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x_n\}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\infty} ([0,1] \setminus A(1/j))\right).$$

Αυτό οδηγεί σε άτοπο: όλα τα σύνολα $\{x_n\}$, $[0,1] \setminus A(1/j)$ είναι κλειστά, άρα κάποιο από αυτά θα έπρεπε να περιέχει διάστημα, από το θεώρημα του Baire. Συνεπώς, το A είναι υπεραριθμήσιμο.

32. Κάνουμε πρώτα την επιπλέον υπόθεση ότι το A είναι φραγμένο υποσύνολο του $[0,\infty)$. Δηλαδή, υπάρχει $m > 0$ ώστε $A \subseteq [0,m]$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $\lambda(A) = 0$, υπάρχει ακολουθία $\{R_k\}$ διαστημάτων $R_k = [a_k, b_k] \subset [0,\infty)$ ώστε $A \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} R_k$ και $\sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < \varepsilon$. Τότε,

$$\{x^2 : x \in A\} \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k^2, b_k^2]$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty}(b_k^2 - a_k^2) = \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k)(b_k + a_k) \leq 2m \sum_{k=1}^{\infty}(b_k - a_k) < 2m\varepsilon.$$

Αφού $\lambda^*(\{x^2 : x \in A\}) \leq 2m\varepsilon$ για το τυχόν $\varepsilon > 0$, συμπεραίνουμε ότι $\lambda(\{x^2 : x \in A\}) = 0$.

Έστω τώρα $A \subset [0,\infty)$ με $\lambda(A) = 0$. Ορίζουμε $A_m = A \cap [0,m]$, $m \in \mathbb{N}$. Τότε, $\lambda(A_m) = 0$ και το προηγούμενο βήμα δείχνει ότι $\lambda(\{x^2 : x \in A_m\}) = 0$. Αφού

$$\{x^2 : x \in A\} = \bigcup_{m=1}^{\infty} \{x^2 : x \in A_m\},$$

έπεται ότι $\lambda(\{x^2 : x \in A\}) = 0$. Το ίδιο ισχύει αν $A \subset (-\infty, 0]$ και $\lambda(A) = 0$.

Για την γενική περίπτωση, αν $A \subseteq \mathbb{R}$ και $\lambda(A) = 0$, ορίζουμε $A^+ = \{x \in A : x \geq 0\}$, $A^- = \{x \in A : x < 0\}$ και, χρησιμοποιώντας το πρόηγούμενο βήμα, παίρνουμε

$$\lambda(B) \leq \lambda(\{x^2 : x \in A^+\}) + \lambda(\{x^2 : x \in A^-\}) = 0.$$

33. (α) Το C είναι κλειστό ως τομή κλειστών συνόλων: έχουμε $C = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}$ και κάθε $I^{(n)}$ είναι πεπερασμένη ένωση κλειστών διαστημάτων.

(β) Το C δεν έχει μεμονωμένα σημεία: έστω $x \in C$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το x ανήκει σε κάποιο από τα 2^n κλειστά διαστήματα $I_k^{(n)}$ που σχηματίζουν το $I^{(n)}$. Τουλάχιστον ένα από τα άκρα του $I_k^{(n)}$, ας το πούμε y_n, είναι διαφορετικό από το x. Το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $1/3^n$, άρα $|x - y_n| \leq 1/3^n$.

Κάθε άκρο διαστήματος $I_k^{(n)}$ είναι σημείο του C. Συνεπώς, $y_n \in C$, $y_n \neq x$ και $y_n \to x$. Έπεται ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του C.

(γ) Αν κάποιο (μη τετριμμένο) διάστημα J περιέχεται στο C, τότε για κάθε n έχουμε $J \subseteq I_k^{(n)}$, όπου $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$.

Τότε, $\lambda(J) \leq \lambda(I_k^{(n)}) = 1/3^n$. Αφού αυτό συμβαίνει για κάθε n, συμπεραίνουμε ότι $\lambda(J) = 0$, άτοπο.

34. Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $1/4$ βρίσκεται στο εσωτερικό κάποιου από τα $I_k^{(n)}$, και χωρίζει το $I_k^{(n)}$ σε δύο μέρη που έχουν λόγο $3:1$ αν n περιττός και $1:3$ αν n άρτιος. Έπεται ότι $\frac{1}{4} \in C$ αλλά, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο $\frac{1}{4}$ δεν είναι άκρο κανενός από τα 2^n κλειστά διαστήματα $I_k^{(n)}$ που σχηματίζουν το $I^{(n)}$.

Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $x \in I_k^{(n)} = (a,b)$ και $x - a = 3(b-x)$ (εδώ, ο n είναι περιττός). Στο επόμενο βήμα, χωρίζουμε το $[a,b]$ σε τρία ίσα μέρη και κρατάμε τα $\left[a, \frac{2a+b}{3}\right]$, $\left[\frac{2b+a}{3}, b\right]$. Παρατηρήστε ότι $x = \frac{3b+a}{4}$, άρα $\frac{2b+a}{3} < x < b$ και

$$b - x = b - \frac{3b+a}{4} = \frac{b-a}{4} = 3\left(\frac{3b+a}{4} - \frac{2b+a}{3}\right) = 3\left(x - \frac{2b+a}{3}\right).$$

35. (α) Αν $c_n \in \{0,1,2\}$ τότε

$$0 \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{3^n} = 1.$$

(β) Έστω $x \in [0,1]$. Χωρίζουμε το $[0,1]$ στα τρία υποδιαστήματα $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ και $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \text{ αν } x \in \big[0, 1/3\big] \\ c_1 &= 1, \text{ αν } x \in \big(1/3, 2/3\big) \\ c_1 &= 2, \text{ αν } x \in \big[2/3, 1\big]. \end{aligned}$$

Έτσι, σε κάθε περίπτωση, έχουμε

$$\frac{c_1}{3} \leq x \leq \frac{c_1}{3} + \frac{1}{3}.$$

Ας υποθέσουμε ότι $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$. Χωρίζουμε αυτό το διάστημα στα τρία υποδιαστήματα $\left[0, \frac{1}{9}\right]$, $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ και $\left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right]$, και θέτουμε $c_2 = 0, 1$ ή 2 αντίστοιχα αν το x ανήκει στο αριστερό, στο μεσαίο ή στο δεξιό από αυτά τα διαστήματα. Ανάλογα ορίζεται το c_2 όταν $x \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ ή $x \in \left[\frac{2}{3}, 1\right]$, έτσι ώστε, σε κάθε περίπτωση, να έχουμε

$$\frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} \leq x \leq \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \frac{1}{3^2}.$$

Συνεχίζουμε την επιλογή των c_n με αυτό τον τρόπο έτσι ώστε, για κάθε N, να έχουμε

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{3^n} \leq x \leq \sum_{n=1}^{N} \frac{c_n}{3^n} + \frac{1}{3^N}.$$

Αφού λοιπόν, για κάθε N έχουμε $0 \leq x - \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{c_n}{3^n} \leq \frac{1}{3^N}$, έπεται ότι η σειρά $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}$ συγκλίνει στο x, δηλαδή

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{3^n}.$$

(γ) Έστω ότι κάποιος $x \in [0,1]$ έχει δύο διαφορετικά τριαδικά αναπτύγματα:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{3^k}.$$

Έστω n ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο $c_k \neq b_k$, και ας υποθέσουμε ότι $c_n < b_n$. Αφού

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{c_k}{3^k} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{3^k},$$

και

$$\sum_{k=n}^{\infty} \frac{c_k}{3^k} \leq \frac{c_n}{3^n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{2}{3^k} = \frac{c_n+1}{3^n} \leq \frac{b_n}{3^n} \leq \sum_{k=n}^{\infty} \frac{b_k}{3^k},$$

βλέπουμε ότι

$$b_n = c_n + 1, \quad c_k = 2 \text{ αν } k > n, \quad b_k = 0 \text{ αν } k > n.$$

Συνεπώς,

$$x = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_k}{3^k} = \frac{m}{3^n},$$

όπου $m = b_1 3^{n-1} + b_2 3^{n-2} + \cdots + b_n$.

Αντίστροφα, αν $x = m/3^n$ για κάποιον $m \in \mathbb{N}$, γράφουμε τον m στη μορφή $m = b_1 3^{n-1} + b_2 3^{n-2} + \cdots + b_n$, όπου $b_j \in \{0,1,2\}$ και $b_n \neq 0$, και παίρνουμε δύο διαφορετικά τριαδικά αναπτύγματα για τον x, τα $0 \cdot b_1 b_2 \cdots b_n$ και $0 \cdot b_1 \cdots b_{n-1}(b_n - 1)2 \cdots 2 \cdots$.

(δ) Έστω $x \in [0,1]$ και $0 \cdot c_1 c_2 \cdots$ η τριαδική παράσταση που βρήκαμε για τον x στο (β). Είναι φανερό ότι $x \in I^{(1)}$ αν και μόνο αν $c_1 = 0$ ή $c_1 = 2$. Επίσης, $x \in I^{(2)}$ αν και μόνο αν $c_1 \in \{0,2\}$ και $c_2 \in \{0,2\}$. Με τον ίδιο τρόπο, $x \in I^{(n)}$ αν και μόνο αν $c_1, \ldots, c_n \in \{0,2\}$. Αν τώρα $x \in C$, τότε $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I^{(n)}$. Έπεται ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $c_n \in \{0,2\}$.

Έστω τώρα $x \in [0,1] \setminus C$ και έστω $0 \cdot c_1 c_2 \cdots$ μια τριαδική παράσταση του x. Αν $x \notin I^{(1)}$, τότε $\frac{1}{3} < x < \frac{2}{3}$. Αλλά, από τη σχέση $\frac{c_1}{3} \leq x \leq \frac{c_1}{3} + \frac{1}{3}$ παίρνουμε $0 < c_1 < 2$, άρα $c_1 = 1$. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $n \geq 2$, έχουμε $x \in I^{(n-1)}$ αλλά $x \notin I^{(n)}$. Αφού $x \notin I^{(n)}$, το x δεν μπορεί να είναι άκρο κάποιου τριαδικού διαστήματος από αυτά που αποτελούν το $I^{(n-1)}$. Υπάρχει λοιπόν μοναδικό ανοιχτό τριαδικό διάστημα μήκους $\frac{1}{3^{n-1}}$ στο οποίο ανήκει το x και, αναγκαστικά, αυτό είναι το

$$\left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{3^k} + \frac{1}{3^{n-1}} \right).$$

Το γεγονός ότι $x \notin I^{(n)}$ σημαίνει ότι το x ανήκει στο μεσαίο ανοιχτό τρίτο αυτού του διαστήματος, δηλαδή

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{3^k} + \frac{1}{3^n} < x < \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{3^k} + \frac{2}{3^n}.$$

Από αυτό και τη σχέση

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{3^k} + \frac{c_n}{3^n} \leq x \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{c_k}{3^k} + \frac{c_n + 1}{3^n}$$

παίρνουμε $0 < c_n < 2$, δηλαδή $c_n = 1$. Αν λοιπόν $x \notin C$, τότε, για τον ελάχιστο φυσικό n με $x \notin I^{(n)}$, ισχύει $c_n = 1$.

36. Θεωρούμε το διάστημα $I^{(0)} = [0,1]$ και το χωρίζουμε σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\delta}{3}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Αφαιρούμε το ανοικτό μεσαίο διάστημα και ονομάζουμε $I^{(1)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(1)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και $\lambda(I^{(1)}) = 1 - \frac{\delta}{3}$. Χωρίζουμε καθένα από τα δύο διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(1)}$ σε τρία διαστήματα: το μεσαίο έχει μήκος $\frac{\delta}{3^2}$ και τα άλλα δύο έχουν το ίδιο μήκος. Κατόπιν, αφαιρούμε το μεσαίο ανοικτό διάστημα. Ονομάζουμε $I^{(2)}$ το σύνολο που απομένει. Το $I^{(2)}$ είναι προφανώς κλειστό σύνολο, και

$$\lambda(I^{(2)}) = \lambda(I^{(1)}) - 2\frac{\delta}{3^2} = 1 - \frac{\delta}{3} - 2\frac{\delta}{3^2}.$$

Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε για κάθε $n = 1, 2, \ldots$ ένα κλειστό σύνολο $I^{(n)}$ έτσι ώστε η ακολουθία $(I^{(n)})$ να έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) $I^{(n)} \supset I^{(n+1)}$ για κάθε $n \geq 0$.

(ii) Το $I^{(n)}$ είναι η ένωση 2^n κλειστών διαστημάτων που έχουν το ίδιο μήκος.

(iii) $\lambda(I^{(n)}) = 1 - \frac{\delta}{3} - 2\frac{\delta}{3^2} - \cdots - 2^{n-1}\frac{\delta}{3^n}$.

Τέλος, ορίζουμε

$$D_\delta = \bigcap_{n=0}^{\infty} I^{(n)}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\lambda(D_\delta) = \lim_{n\to\infty} \lambda(I^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \delta\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] = 1 - \delta.$$

Αν $I_k^{(n)}$ είναι κάποιο από τα κλειστά διαστήματα που σχηματίζουν το $I^{(n)}$, τότε το μήκος του $I_k^{(n)}$ είναι ίσο με $\frac{1}{2^n}\left[1 - \delta\left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)\right] \to 0$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την πληροφορία και δουλεύοντας όπως στην Άσκηση 3, μπορούμε να δείξουμε ότι το D_δ είναι τέλειο και δεν περιέχει διαστήματα.

37*. Από την προηγούμενη Άσκηση ισχύει το εξής: αν I είναι ένα διάστημα μήκους α, και αν ακολουθήσουμε τη διαδικασία κατασκευής του συνόλου του Cantor αφαιρώντας στο n–οστό βήμα ανοικτά υποδιαστήματα μήκους $\alpha\delta/3^n$ (όπου $0 < \delta < 1$), τότε το σύνολο που προκύπτει δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\alpha(1-\delta)$.

Παίρνουμε $0 < \delta_1 < 1$ και κατασκευάζουμε σύνολο D^1 στο $[0,1]$ με τον παραπάνω τρόπο. Το D^1 δεν περιέχει διαστήματα και $\lambda(D^1) = 1 - \delta_1$.

Το $B_1 = [0,1] \setminus D^1$ είναι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_1 = \cup_j R_j^1$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^1}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο

$0 < \delta_2 < 1$ (το ίδιο για κάθε j). Προκύπτει σύνολο D_j^2 που δεν περιέχει διαστήματα και έχει μέτρο $\lambda(D_j^2) = (1-\delta_2)\lambda(R_j^1)$. Ορίζουμε

$$D^2 = D^1 \cup \left(\cup_{j=1}^{\infty} D_j^2\right).$$

Τότε,

$$\lambda(D^2) = (1-\delta_1) + (1-\delta_2)\delta_1 = 1 - \delta_1\delta_2.$$

Το $B_2 = [0,1] \setminus D_2$ είναι πάλι μια αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων: $B_2 = \cup_j R_j^2$. Σε κάθε κλειστό διάστημα $\overline{R_j^2}$, $j \in \mathbb{N}$, κάνουμε την ίδια κατασκευή με κάποιο $0 < \delta_3 < 1$ (το ίδιο για κάθε j).

Επαγωγικά, ορίζουμε μια ακολουθία $\{D^n\}$ υποσυνόλων του $[0,1]$ με τις εξής ιδιότητες:

(i) $D^{n+1} \subset B^n = [0,1] \setminus D^n$.

(ii) $\lambda(D^n) = 1 - \delta_1\delta_2 \cdots \delta_n$.

(iii) Το $D^n \setminus D^{n-1}$ είναι ένωση αριθμήσιμων το πλήθος μη επικαλυπτόμενων κλειστών συνόλων D_j^n, καθένα από τα οποία δεν περιέχει διαστήματα.

Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε συγκεκριμένα $\delta_j = \frac{2^j+1}{2^j+2}$ ώστε

$$\delta_1\delta_2 \cdots \delta_n = \frac{2^n+1}{2^{n+1}} \to \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε $E = \cup_{n=1}^{\infty} D^n$. Τότε, $\lambda(E) = \lim_{n\to\infty} \lambda(D^n) = \lim_{n\to\infty} (1 - \delta_1 \cdots \delta_n) = \frac{1}{2}$. Το E είναι μετρήσιμο, αφού κάθε D^n είναι σύνολο Borel.

Έστω $J = [a,b]$ υποδιάστημα του $[0,1]$. Ο ισχυρισμός είναι ότι υπάρχει υποδιάστημα R_j^n κάποιου B_n ώστε $R_j^n \subseteq J$.

Απόδειξη. Με εις άτοπο απαγωγή. Έστω ότι δεν υπάρχει $R_j^1 \subset B_1$ με $R_j^1 \subseteq J$. Παρατηρήστε ότι υπάρχει j ώστε $R_j^1 \cap J \neq \emptyset$ (αλλιώς θα είχαμε $J \subseteq D^1$, άτοπο). Αφού το $R_j^1 = (a_j, b_j)$ είναι ανοικτό, το $R_j^1 \cap J$ είναι διάστημα. Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

(α) $a_j < a < b_j < b$: υπάρχει $R_t^1 = (a_t, b_t)$ με $b_j < a_t \leq b$ (αλλιώς, $[b_j, b] \subseteq D^1$ το οποίο είναι άτοπο). Τότε όμως, υπάρχει $R_s^1 = (a_s, b_s) \subseteq [b_j, a_t)$ λόγω της κατασκευής του D^1. Άρα, υπάρχει $R_s^1 \subseteq J$. Αυτό είναι άτοπο.

(β) $a < a_j < b < b_j$: καταλήγουμε σε άτοπο με τον ίδιο τρόπο.

(γ) $J = [a,b] \subset R_j^1 = (a_j, b_j)$: στο $\overline{R_j^1}$ κατασκευάστηκε το D_j^2. Επαναλαμβάνοντας το συλλογισμό, βλέπουμε ότι είτε υπάρχει j ώστε $R_j^2 \subseteq J$ ή υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^2$.

Συνεχίζοντας έτσι, βλέπουμε ότι είτε υπάρχουν n και j ώστε $R_j^n \subseteq J$ ή για κάθε n υπάρχει j ώστε $J \subseteq R_j^n$. Η δεύτερη περίπτωση αποκλείεται γιατί τότε θα είχαμε

$$\lambda(J) \leq \inf_n \lambda(R_j^n) = 0$$

(παρατηρήστε ότι $\lambda(R_j^n) \leq \frac{\delta_1 \cdots \delta_n}{3^n}$). □

Υπάρχει λοιπόν κάποιο R_j^n, ανοικτό υποδιάστημα κάποιου D^n, ώστε $R_j^n \subseteq J$. Όμως τότε, στο $\overline{R_j^n}$ κατασκευάστηκε το D_j^{n+1}, το οποίο έχει μέτρο $\lambda(R_j^{n+1}) = \lambda(R_j^n)(1-\delta_{n+1})$, μέσα σε αυτό αριθμήσιμα το πλήθος D_j^{n+2} με συνολικό μέτρο $\lambda(R_j^n)\delta_{n+1}(1-\delta_n)$ κλπ. Δηλαδή, το συνολικό μέτρο των D_j^m, $m > n$ που κατασκευάστηκαν μέσα στο R_j^n είναι ίσο με

$$\lambda(R_j^n)(1-\delta_{n+1}\delta_{n+2}\cdots) = \lambda(R_j^n)\left(1-\frac{1}{2\delta_1\cdots\delta_n}\right).$$

Έπεται ότι

$$\lambda(E\cap R_j^n) = \lambda(R_j^n)\left(1-\frac{1}{2\delta_1\cdots\delta_n}\right) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(R_j^n\setminus E) = \lambda(R_j^n)\frac{1}{2\delta_1\cdots\delta_n} > 0.$$

Αφού $R_j^n \subseteq J$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda(E\cap J) > 0 \quad \text{και} \quad \lambda(J\setminus E) > 0.$$

38. Υποθέτουμε ότι $f^{-1}((q,+\infty]) \in \mathcal{A}$ για κάθε $q \in \mathbb{Q}$. Έστω $\alpha \in \mathbb{R}$. Υπάρχει γνησίως φθίνουσα ακολουθία ρητών $q_n \to \alpha$. Γράφουμε

$$\{x\in X : f(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\{x \in X : f(x) > q_n\}.$$

Πράγματι, αν $f(x) > \alpha$ τότε τελικά έχουμε $f(x) > q_n$ (και αντίστροφα, αν $f(x) > q_n$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, τότε $f(x) > \alpha$). Αφού $\{x \in X : f(x) > q_n\} \in \mathcal{A}$ για κάθε n, έπεται ότι $\{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$. Αφού το $\alpha \in \mathbb{R}$ ήταν τυχόν, η f είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη. Η αντίστροφη κατεύθυνση είναι προφανής: ξέρουμε ότι αν η f είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη τότε $f^{-1}((\alpha,+\infty]) \in \mathcal{A}$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

39. Έστω $\{q_n : n \in \mathbb{N}\}$ μια αρίθμηση του $\mathbb{Q}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$E_n = \{x \in X : f(x) = q_n\}.$$

Αφού η f είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη, έχουμε $E_n \in \mathcal{A}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Παρατηρήστε ότι $g = 1 - \chi_E$. Αφού $E \in \mathcal{A}$, η g είναι $\mathcal{A}$–μετρήσιμη.

40. *Πρώτος τρόπος.* Ελέγξτε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ το σύνολο $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ είναι (ανοικτή ή κλειστή) ημιευθεία ή το κενό σύνολο ή το $\mathbb{R}$.

Δεύτερος τρόπος. Αφού η f είναι αύξουσα, το σύνολο A των σημείων ασυνέχειας της f είναι αριθμήσιμο.

Θα δείξουμε ότι κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με αριθμήσιμο σύνολο σημείων ασυνέχειας είναι Borel μετρήσιμη. Έστω $C = \mathbb{R}\setminus A$ το σύνολο των σημείων συνέχειας της f. Έστω U ένα ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Γράφουμε

$$f^{-1}(U) = \big(f^{-1}(U)\cap C\big) \cup \big(f^{-1}(U)\cap A\big).$$

Το $f^{-1}(U)\cap A$ είναι αριθμήσιμο, άρα ανήκει στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Το $f^{-1}(U)\cap C$ είναι ανοικτό στο C: έστω $x \in C$ ώστε $f(x) \in U$. Αφού το U είναι ανοικτό, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε

$(f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \subset U$. Αφού η f είναι συνεχής στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $|y-x| < \delta$ τότε $f(y) \in (f(x)-\varepsilon, f(x)+\varepsilon) \subset U$. Δηλαδή, $f^{-1}(U) \cap C \supseteq (x-\delta, x+\delta) \cap C$.

Είδαμε ότι το $f^{-1}(U) \cap C$ είναι ανοικτό στο C, άρα υπάρχει V ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ώστε $f^{-1}(U) \cap C = V \cap C$. Όμως, $V \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και $C = \mathbb{R} \setminus A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Άρα, $f^{-1}(U) \cap C = V \cap C \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι το $f^{-1}(U)$ είναι Borel ως ένωση δύο συνόλων Borel. Αφού αυτό ισχύει για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}$, η f είναι Borel μετρήσιμη.

41. (α) Έστω $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Αφού η h είναι Borel μετρήσιμη, έχουμε $h^{-1}(U) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Η g είναι συνεχής, άρα $g^{-1}(h^{-1}(U)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ (Άσκηση 3(γ), Φυλλάδιο 2). Είδαμε ότι $(h \circ g)^{-1}(U) = g^{-1}(h^{-1}(U)) \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ για κάθε $U \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Άρα, η $h \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Borel μετρήσιμη.

(β) Θεωρούμε τη συνάρτηση Cantor–Lebesgue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ και ορίζουμε $m : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $m(x) = \frac{f(x)+x}{2}$. Η m είναι γνησίως αύξουσα και επί του $[0,1]$. Θεωρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της m και την επεκτείνουμε σε συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ θέτοντας $g(x) = 0$ αν $x < 0$ και $g(x) = 1$ αν $x > 1$. Γνωρίζουμε ότι η εικόνα $m(C)$ του συνόλου του Cantor μέσω της m έχει θετικό μέτρο (ίσο με $1/2$), άρα υπάρχει μη–μετρήσιμο $A \subseteq m(C)$ (το οποίο δεν περιέχει τα $0,1$). Αν $E = g(A)$, τότε το E περιέχεται στο C, άρα είναι Lebesgue μετρήσιμο. Έπεται ότι η συνάρτηση $h = \chi_E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι Lebesgue μετρήσιμη.

Θεωρούμε την $h \circ g = \chi_E \circ g$. Παρατηρήστε ότι η $h \circ g$ παίρνει μόνο τις τιμές 0 και 1, και ότι $(h \circ g)(x) = 1$ αν και μόνο αν $g(x) \in E$, δηλαδή αν και μόνο αν $x \in A$. Άρα,

$$h \circ g = \chi_E \circ g = \chi_A.$$

Αφού το A είναι μη–μετρήσιμο, η $h \circ g$ δεν είναι Lebesgue μετρήσιμη.

42. (α) Αν $t < s$ τότε $\{f > s\} \subseteq \{f > t\}$, άρα

$$\omega_f(s) = \lambda(\{f > s\}) \leq \lambda(\{f > t\}).$$

Δηλαδή, η ω_f είνα φθίνουσα. Έστω $t \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε πρώτα ότι αν $E_t = \{f > t\}$ και $E_{t,n} = \{f > t + \frac{1}{n}\}$, τότε $E_{t,n} \nearrow E_t$, άρα $\omega_f(t+\frac{1}{n}) \to \omega_f(t)$. Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $0 \leq \omega_f(t) - \omega_f(t+\frac{1}{n_0}) < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $t < s < t + \frac{1}{n_0}$ έχουμε $\omega_f(t) - \omega_f(s) < \varepsilon$. Έπεται ότι η ω_f είναι συνεχής από δεξιά.

Με τον ίδιο τρόπο μπορείτε να δείξετε ότι $\lim\limits_{s \to t^-} \omega_f(s) = \lambda(\{f \geq t\})$. Άρα, η ω_f είναι συνεχής στο t αν και μόνο αν $\lambda(\{f \geq t\}) = \lambda(\{f > t\})$. Δηλαδή, αν $\lambda(\{f = t\}) = 0$.

(β) Έστω $t \in \mathbb{R}$. Αν ορίσουμε $F_{k,t} = \{f_k > t\}$ και $F_t = \{f > t\}$, τότε $F_{k,t} \nearrow F_t$: πράγματι, από την $f_k \leq f_{k+1}$ έχουμε

$$f_k(x) > t \Longrightarrow f_{k+1}(x) > t,$$

δηλαδή $F_{k,t} \subseteq F_{k+1,t}$. Επίσης, $f(x) \geq f_{k+1}(x)$ για κάθε $x \in E$, άρα $F_t \supseteq \cup_{k=1}^{\infty} F_{k,t}$. Αντίστροφα, αν $f(x) > t$ τότε $\lim\limits_{k \to \infty} f_k(x) > a$, άρα υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ ώστε $f_k(x) > t$.

Συνεπώς, $F_t \subseteq \cup_{k=1}^{\infty} F_{k,t}$. Είδαμε ότι $F_{k,t} \nearrow F_t$, άρα

$$\lambda(F_{k,t}) \nearrow \lambda(F_t).$$

Ισοδύναμα, $\omega_{f_k}(t) \nearrow \omega_f(t)$.

43. (α) Θέτουμε $E_n = \{f_n > \alpha\}$. Τότε,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(\{x : f_n(x) > \alpha\}) < \infty,$$

άρα $\lambda(\limsup_n E_n) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει $N \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(N) = 0$ ώστε $x \notin \limsup_n E_n$ για κάθε $x \notin N$. Έστω $x \notin N$. Τότε, $x \notin \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{n=k}^{\infty} E_n$, άρα υπάρχει $k = k(x) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq k$ ισχύει $x \notin E_n \implies f_n(x) \leq \alpha$. Όμως τότε, $\limsup_n f_n(x) \leq \alpha$.
(β) Όπως πριν, βλέπουμε ότι υπάρχει $N \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(N) = 0$ ώστε για κάθε $x \notin N$ ισχύει το εξής: υπάρχει $k = k(x) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq k$ ισχύει $f_n(x) \leq \varepsilon_n$. Αφού $\varepsilon_n \to 0$, συμπεραίνουμε ότι $f_n(x) \to 0$.

44. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$ και ορίζουμε $F_{n,m} := \{|f_n| > m\}$. Παρατηρούμε ότι $F_{n,m} \searrow \emptyset$. Άρα, υπάρχει $\beta_n > 0$ ώστε $\lambda(\{x : |f_n(x)| > \beta_n\}) < 1/2^n$ (πάρτε $\beta_n = m$ για m αρκετά μεγάλο).

Θέτουμε $\alpha_n = n\beta_n$. Τότε, αν θέσουμε

$$E_n = \left\{x \in [0,1] : \frac{|f_n(x)|}{\alpha_n} > \frac{1}{n}\right\} = \{x \in [0,1] : |f_n(x)| > \beta_n\},$$

έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda\left(\left\{x \in [0,1] : \frac{|f_n(x)|}{\alpha_n} > \frac{1}{n}\right\}\right) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} < \infty.$$

Από την προηγούμενη Άσκηση (με $\varepsilon_n = 1/n$) έπεται ότι υπάρχει $N \subset \mathbb{R}$ με $\lambda(N) = 0$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f_n(x)}{\alpha_n} = 0$ για κάθε $x \notin N$.

45. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ χωρίζουμε το $[0,1]$ σε k ίσα διαστήματα $\left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right)$, $j = 1, \ldots, k$. Ορίζουμε $f_k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_k(x,y) = f\left(\frac{j-1}{k}, y\right) \quad \text{αν } \frac{j-1}{k} \leq x < \frac{j}{k}$$

και $f_k(1,y) = f(1,y)$. Η f_k είναι μετρήσιμη διότι είναι συνεχής σχεδόν παντού: αν $\frac{j-1}{k} < x < \frac{j}{k}$, $y \in [0,1]$ και $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: $(x-\delta, x+\delta) \subset \left[\frac{j-1}{k}, \frac{j}{k}\right)$ και

$$\left|f\left(\frac{j-1}{k}, y\right) - f\left(\frac{j-1}{k}, y'\right)\right| \quad \text{αν } |y - y'| < \delta$$

από τη συνέχεια της $f\left(\frac{j-1}{k}, y\right)$ ως προς y. Τότε, αν $(x', y') \in (x-\delta, x+\delta) \times (y-\delta, y+\delta)$ έχουμε

$$|f_k(x', y') - f_k(x,y)| = \left|f\left(\frac{j-1}{k}, y'\right) - f\left(\frac{j-1}{k}, y\right)\right| < \varepsilon.$$

Δηλαδή, η f_k είναι συνεχής στο $[0,1]\times[0,1]\setminus\cup_{j=0}^{k}(\{\frac{j}{k}\}\times[0,1])$.

Παρατηρούμε τώρα ότι αν $y<1$, τότε $f_k(x,y)\to f(x,y)$: αφού η $f(x,y)$ είναι συνεχής ως προς x, για το τυχόν $\varepsilon>0$ υπάρχει $\delta>0$ ώστε: αν $|x'-x|<\delta$ τότε $|f(x',y)-f(x,y)|<\varepsilon$. Υπάρχει k_0 ώστε $\frac{1}{k}<\delta$ για κάθε $k\geq k_0$. Τότε, για κάθε $k\geq k_0$ έχουμε

$$|f_k(x,y)-f(x,y)|=\left|f\left(\frac{j-1}{k},y\right)-f\left(x,y\right)\right|<\varepsilon$$

διότι $\left|\frac{j-1}{k}-x\right|\leq\frac{1}{k}<\delta$.

Δείξαμε ότι η f είναι κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων, άρα η f είναι μετρήσιμη.

46. Η f είναι μετρήσιμη διότι $f_n\to f$ κατά σημείο. Έστω $\varepsilon>0$. Αφού $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο X, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n\geq n_0$ και για κάθε $x\in X$ ισχύει $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. Η σταθερή συνάρτηση ε είναι ολοκληρώσιμη λόγω της $\mu(X)<\infty$, οπότε, από την $|f|<|f_{n_0}|+\varepsilon$ έπεται ότι η $|f|$ (άρα και η f) είναι ολοκληρώσιμη. Τέλος, για κάθε $n\geq n_0$ έχουμε

$$\left|\int_X f_n\,d\mu-\int_X f\,d\mu\right|\leq\int_X|f_n-f|\,d\mu\leq\varepsilon\mu(X).$$

Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_X f_n\,d\mu\to\int_X f\,d\mu.$$

47. Η σταθερή συνάρτηση M είναι ολοκληρώσιμη λόγω της $\mu(X)<\infty$, οπότε, το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

48. Από τις $|f_n|\leq g$ $\mu-\sigma.\pi.$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $f_n\to f$ $\mu-\sigma.\pi.$, έπεται ότι $|f|\leq g$ $\mu-\sigma.\pi.$ Άρα,

$$|f_n-f|\leq 2g$$

$\mu-\sigma.\pi.$, για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Αφού $|f_n-f|\to 0$ $\mu-\sigma.\pi.$, το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης.

49. Αφού $f_n\leq f$ $\mu-\sigma.\pi.$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, έχουμε $\int_X f_n\,d\mu\leq\int_X f\,d\mu$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$. Συνεπώς,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu\leq\int_X f\,d\mu.$$

Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_X f\,d\mu\leq\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\liminf_{n\to\infty}\int_X f_n\,d\mu=\int_X f\,d\mu.$$

Άρα,

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

50. Οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι οι f, g και τελικά οι f_n, g_n παίρνουν πεπερασμένες τιμές σχεδόν παντού. Από την $|f_n| \leq g_n$ έχουμε $-g_n \leq f_n \leq g_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, δηλαδή

$$f_n + g_n \geq 0 \quad \text{και} \quad g_n - f_n \geq 0.$$

Αφού $f_n + g_n \to f + g$ και $g_n - f_n \to g - f$, το Λήμμα του Fatou μας δίνει:

$$\int_X f \, d\mu + \int_X g \, d\mu = \int_X (f+g) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (f_n+g_n) \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu + \int_X g \, d\mu$$

(χρησιμοποιήσαμε την $\int_X g_n \, d\mu \to \int_X g \, d\mu$). Άρα,

$$\int_X f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu.$$

Πάλι από το Λήμμα του Fatou,

$$\int_X g \, d\mu - \int_X f \, d\mu = \int_X (g-f) \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (g_n - f_n) \, d\mu = \int_X g \, d\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu,$$

δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu.$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu.$$

Άρα,

$$\int_X f_n \, d\mu \to \int_X f \, d\mu.$$

51. Έστω $A \in \mathcal{A}$. Από το Λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\int_A f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu$$

και

$$\int_{X\setminus A} f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{X\setminus A} f_n \, d\mu$$

δηλαδή

$$\int_X f \, d\mu - \int_A f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu - \int_A f_n \, d\mu \right).$$

Αφού

$$-\int_X f \, d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(-\int_X f_n \, d\mu \right),$$

προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$-\int_A f \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \left(-\int_A f_n \, d\mu \right) = -\limsup_{n\to\infty} \int_A f_n \, d\mu.$$

Δηλαδή,

$$\limsup_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu \leq \int_A f\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty}\int_A f_n\,d\mu.$$

Συνεπώς,

$$\int_A f_n\,d\mu \to \int_A f\,d\mu.$$

52. ($\Longrightarrow$) Έχουμε

$$\left|\int_X |f_n|\,d\mu - \int_X |f|\,d\mu\right| \leq \int_X \big|\,|f_n|-|f|\,\big|\,d\mu \leq \int_X |f_n - f|\,d\mu \to 0.$$

Άρα,

$$\int_X |f_n|\,d\mu \to \int_X |f|\,d\mu.$$

($\Longleftarrow$) Έχουμε $\big|\,|f_n-f|-|f_n|\,\big| \leq |f|$. Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και $|f_n-f|-|f_n| \to -|f|$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης,

$$\int_X (|f_n-f|-|f_n|)\,d\mu \to \int_X (-|f|)\,d\mu.$$

Έχουμε υποθέσει ότι

$$\int_X |f_n|\,d\mu \to \int_X |f|\,d\mu.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, παίρνουμε

$$\int_X |f_n - f|\,d\mu \to 0.$$

53. Παρατηρήστε ότι

$$g_n = \max\{f_1,\dots,f_n\} \leq \max\{f_1,\dots,f_n,f_{n+1}\} = g_{n+1}.$$

Ορίζουμε $g := \lim\limits_{n\to\infty} g_n$ (η g ορίζεται καλά, διότι η $\{g_n\}$ είναι αύξουσα). Αφού $g_n \geq 0$ στο X, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\int_X g\,d\mu = \lim_{n\to\infty}\int_X g_n\,d\mu.$$

Έχουμε υποθέσει ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να ισχύει $\int_X g_n\,d\mu \leq M$. Συνεπώς,

$$\int_X g\,d\mu \leq M < \infty.$$

Όμως, $f_n \leq g_n \leq g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και $f_n \to 0$ $\mu - \sigma.\pi.$ Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_X f_n\,d\mu \to 0.$$

54. (α) Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο. Έστω $\varepsilon > 0$ και $\eta > 0$. Η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $|z - y| < \delta$ τότε $|\phi(z) - \phi(y)| < \varepsilon$. Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\{x \in X : |(\phi \circ f_n)(x) - (\phi \circ f)(x)| \geq \varepsilon\} \subseteq \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}.$$

Αφού $f_n \to f$ κατά μέτρο, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$,

$$\mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}) < \eta.$$

Άρα, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\mu(\{x \in X : |(\phi \circ f_n)(x) - (\phi \circ f)(x)| \geq \varepsilon\}) \leq \eta.$$

Αφού το $\eta > 0$ ήταν τυχόν,

$$\mu(\{x \in X : |(\phi \circ f_n)(x) - (\phi \circ f)(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0.$$

Δηλαδή, $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ κατά μέτρο.

(β) Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ σχεδόν ομοιόμορφα. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \varepsilon$, ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$. Αφού η ϕ είναι ομοιόμορφα συνεχής, $\phi \circ f_n \to \phi \circ f$ ομοιόμορφα στο $X \setminus A$: θεωρήστε τυχόν $\eta > 0$ και βρείτε $\delta > 0$ ώστε: αν $|z - y| < \delta$ τότε $|\phi(z) - \phi(y)| < \eta$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $x \in X \setminus A$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \delta, \text{ και συνεπώς, } |(\phi \circ f_n)(x) - (\phi \circ f)(x)| < \eta.$$

55. (α) Παρατηρούμε πρώτα ότι $\chi_{E_n \triangle E_m} = |\chi_{E_m} - \chi_{E_n}|$. Συνεπώς,

$$\mu(E_n \triangle E_m) = \int_X \chi_{E_n \triangle E_m} \, d\mu = \int_X |\chi_{E_m} - \chi_{E_n}| \, d\mu$$

για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$. Αυτό αποδεικνύει ότι η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο αν και μόνο αν $\mu(E_n \triangle E_m) \to 0$ όταν $m, n \to \infty$.

(β) Έστω $\varepsilon > 0$. Από την

$$\mu(\{|\chi_{E_n} - \chi_{E_m}| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_X |\chi_{E_n} - \chi_{E_m}| \, d\mu$$

έπεται ότι αν η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέσο τότε είναι Cauchy κατά μέτρο. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέτρο. Τότε,

$$\int_X |\chi_{E_n} - \chi_{E_m}| \, d\mu = \mu(\{|\chi_{E_n} - \chi_{E_m}| = 1\}) = \mu(\{|\chi_{E_n} - \chi_{E_m}| \geq 1\}) \to 0$$

όταν $m, n \to \infty$. Άρα, η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέσο.

(γ) Έστω ότι η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα. Θεωρούμε τυχόν $\delta > 0$. Υπάρχει $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ ώστε: για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n, n \geq n_0$,

$$|\chi_{E_n}(x) - \chi_{E_m}(x)| < \varepsilon \text{ αν } x \notin A.$$

Αφού $\varepsilon < 1$, αυτό σημαίνει ότι $E_n \triangle E_m \subseteq A$, άρα

$$\int_X |\chi_{E_m} - \chi_{E_n}|\, d\mu \leq \mu(A) < \delta.$$

Το $\delta > 0$ ήταν τυχόν, άρα η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέσο.

Το αντίστροφο δεν ισχύει: θεωρήστε την ακολουθία $E_1 = [0,1)$, $E_2 = [0,1/2)$, $E_3 = [1/2,1)$, $E_4 = [0,1/3)$, $E_5 = [1/3,2/3)$, $E_6 = [2/3,1)$ κλπ. Τότε, η $\{\chi_{E_n}\}$ είναι Cauchy κατά μέσο αλλά δεν είναι Cauchy σχεδόν ομοιόμορφα (θα συνέκλινε σχεδόν ομοιόμορφα, ενώ η $\{\chi_{E_n}(x)\}$ δεν συγκλίνει για κανένα $x \in [0,1)$).

56. Θέτουμε $J := \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu$. Υπάρχει υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$J = \lim_{n\to\infty} \int_X f_{k_n}\, d\mu.$$

Έχουμε $f_{k_n} \to f$ κατά μέτρο, άρα υπάρχει υπακολουθία $\{f_{l_{k_n}}\}$ της $\{f_{k_n}\}$ ώστε $f_{l_{k_n}} \to f$ σχεδόν παντού. Από το Λήμμα του Fatou,

$$\int_X f\, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_{l_{k_n}}\, d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_{l_{k_n}}\, d\mu = J.$$

57. Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε, υπάρχουν $\varepsilon > 0$ και υπακολουθία $\{f_{k_n}\}$ της $\{f_n\}$ ώστε

$$(*) \qquad \left| \int_X (f_{k_n} - f)\, d\mu \right| \geq \varepsilon \quad \text{για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Αφού $f_n \to f$ κατά μέτρο, έχουμε $f_{k_n} \to f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{l_{k_n}}\}$ της $\{f_{k_n}\}$ με $f_{l_{k_n}} \to f$ σχεδόν παντού. Αφού η g είναι ολοκληρώσιμη και $f_{l_{k_n}} \to f$ σχεδόν παντού, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: παίρνουμε

$$\int_X (f_{l_{k_n}} - f)\, d\mu \to 0,$$

το οποίο είναι άτοπο, λόγω της $(*)$.

58. (α) Ορίζουμε $A_k = \{x \in X : \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leq k\}$. Τότε, $A_k \subseteq A_{k+1}$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, και η υπόθεση εξασφαλίζει ότι $A_k \nearrow X \setminus Z$, όπου $\mu(Z) = 0$. Άρα, $\lim\limits_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu(X)$.

Έστω $\delta > 0$. Αφού $\mu(X) < \infty$, μπορούμε να γράψουμε $\mu(X \setminus A_k) = \mu(X) - \mu(A_k) \to 0$. Άρα, υπάρχει $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\mu(X \setminus A_{k_0}) < \delta$. Θέτουμε $A = X \setminus A_{k_0}$ και $M = k_0$. Τότε, $\mu(A) < \delta$ και $|f_n(x)| \leq M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X \setminus A$.

(β) Αφού $\mu(X) < \infty$, για να δείξουμε ότι $f_n g_n \to fg$ κατά μέτρο αρκεί να δείξουμε ότι κάθε υπακολουθία της $\{f_n g_n\}$ έχει υπακολουθία που συγκλίνει στην fg μ-σχεδόν παντού (θυμηθείτε ότι οι δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες όταν $\mu(X) < \infty$).

Θεωρούμε την $\{f_{k_n} g_{k_n}\}$. Τότε, $f_{k_n} \to f$ κατά μέτρο. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $\{f_{l_{k_n}}\}$ της $\{f_{k_n}\}$ η οποία συγκλίνει στην f σχεδόν παντού. Ομοίως, $g_{l_{k_n}} \to g$ κατά μέτρο, άρα υπάρχει υπακολουθία $\{g_{s_{l_{k_n}}}\}$ της $\{g_{l_{k_n}}\}$ η οποία συγκλίνει στην g σχεδόν παντού. Τότε, $f_{s_{l_{k_n}}} g_{s_{l_{k_n}}} \to fg$ σχεδόν παντού. Έπεται το ζητούμενο.

59. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon)) = 0$. Αφού $\mu(X) < \infty$, αυτό σημαίνει ότι $\mu(\limsup_n E_n(\varepsilon)) = 0$ για κάθε $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε το σύνολο

$$Z = \bigcup_{s=1}^{\infty} \limsup_n E_n(1/s).$$

Τότε, $\mu(Z) = 0$. Θα δείξουμε ότι, αν $x \in A = X \setminus Z$ τότε $f_n(x) \to f(x)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Βρίσκουμε $s \in \mathbb{N}$ ώστε $1/s < \varepsilon$. Αφού $x \notin \limsup_n E_n(1/s)$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$, τότε $x \notin E_n(1/s)$. Δηλαδή, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{1}{s} < \varepsilon.$$

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι $f_n \to f$ στο $A = X \setminus Z$, όπου $\mu(Z) = 0$. Έστω $\varepsilon > 0$. Αν $x \in A$, τότε τελικά ισχύει $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Δηλαδή, $\limsup_n E_n(\varepsilon) \subseteq Z$. Άρα,

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \mu(\cup_{k=n}^{\infty} E_k(\varepsilon)) = \mu(\limsup_n E_n(\varepsilon)) \leq \mu(Z) = 0.$$

60. Υποθέτουμε πρώτα ότι $f_n \to f$ κατά μέσο. Από την ανισότητα του Chebyshev βλέπουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέτρο. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $\int_X |f_n - f|\, d\mu < \varepsilon/2$. Επίσης, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $\mu(A) < \delta$ τότε $\left|\int_A f\, d\mu\right| < \varepsilon/2$ και $\left|\int_A f_n\, d\mu\right| < \varepsilon/2$ για κάθε $n < n_0$ (εξηγήστε γιατί). Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ και για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) < \delta$ έχουμε

$$\left|\int_A f_n\, d\mu\right| \leq \int_A |f_n - f|\, d\mu + \left|\int_A f\, d\mu\right| \leq \int_X |f_n - f|\, d\mu + \left|\int_A f\, d\mu\right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Άρα, οι f_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι οι f_n είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες και $f_n \to f$ κατά μέτρο. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $\mu(A) < \delta$ τότε $\left|\int_A f\, d\mu\right| < \varepsilon$ και $\left|\int_A f_n\, d\mu\right| < \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αφού $f_n \to f$ κατά μέτρο, μπορούμε να βρούμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε: αν $n \geq n_0$ τότε $\mu(\{|f_n - f| \geq \varepsilon\}) < \delta$. Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_X |f_n - f|\, d\mu &= \int_{\{|f-f_n|\geq\varepsilon\}} |f - f_n|\, d\mu + \int_{\{|f-f_n|<\varepsilon\}} |f - f_n|\, d\mu \\
&\leq \int_{\{|f-f_n|\geq\varepsilon\}} |f - f_n|\, d\mu + \varepsilon \cdot \mu(X) \\
&\leq \int_{\{|f-f_n|\geq\varepsilon\}} |f|\, d\mu + \int_{\{|f-f_n|\geq\varepsilon\}} |f_n|\, d\mu + \varepsilon \cdot \mu(X) \\
&< 2\varepsilon + \varepsilon \cdot \mu(X) \\
&= (2 + \mu(X))\varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, $\int_X |f - f_n|\, d\mu \to 0$.

61. ($\Longrightarrow$) Ισχύει. Για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\left|\int_A f_n\,d\mu - \int_A f\,d\mu\right| = \left|\int_A (f_n - f)\,d\mu\right| \leq \int_A |f_n - f|\,d\mu \leq \int_X |f_n - f|\,d\mu.$$

Αν $f_n \to f$ κατά μέσο, τότε $\int_X |f_n - f|\,d\mu \to 0$, απ' όπου έπεται ότι $\int_A f_n\,d\mu \to \int_A f\,d\mu$.

($\Longleftarrow$) Δεν ισχύει. Πάρτε $X = [0, 2\pi]$ με το μέτρο Lebesgue και $f_n(x) = \sin(nx)$. Ελέγξτε ότι

$$\int_A f_n\,d\mu \to 0$$

για κάθε Lebesgue μετρήσιμο $A \subset [0, 2\pi]$: ξεκινήστε από την περίπτωση που το A είναι υποδιάστημα του $[0, 2\pi]$ και προσεγγίστε το τυχόν μετρήσιμο $A \subseteq [0, 2\pi]$ με πεπερασμένες ενώσεις ξένων διαστημάτων.

Παρατηρήστε τώρα ότι

$$\int_{[0,2\pi]} |f_n|\,d\lambda = \int_{[0,2\pi]} |\sin(nx)|\,d\lambda = 4$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

62. Η f είναι φραγμένη: από την υπόθεση υπάρχει ολοκληρώσιμη $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $|f(x) - g(x)| < 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Η g είναι ολοκληρώσιμη, άρα φραγμένη. Συνεπώς, υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $|g(x)| \leq \alpha$ για κάθε $x \in [0,1]$. Έπεται ότι

$$|f(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x)| < 1 + \alpha$$

για κάθε $x \in [0,1]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση υπάρχει ολοκληρώσιμη $g_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [0,1]$. Έπεται ότι

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} (g_\varepsilon(x) + \varepsilon)\,dx = \int_a^b g_\varepsilon(x)\,dx + \varepsilon$$

και

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \geq \underline{\int_a^b} (g_\varepsilon(x) - \varepsilon)\,dx = \int_a^b g_\varepsilon(x)\,dx - \varepsilon.$$

Έπεται ότι

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx - \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq 2\varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, η f είναι ολοκληρώσιμη.

63. Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $|f(x)| \leq \alpha$ για κάθε $x \in [0,1]$. Θα δείξουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $0 < b < 1$ αρκετά μικρό ώστε να ικανοποιείται η

$$2\alpha b < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από την υπόθεση, η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[b,1]$, άρα υπάρχει διαμέριση Q του $[b,1]$ με την ιδιότητα

$$U(f,Q)-L(f,Q)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τη διαμέριση $P=\{0\}\cup Q$ του $[0,1]$. Τότε,

$$U(f,P)-L(f,P)=b(M_0-m_0)+U(f,Q)-L(f,Q)<b(M_0-m_0)+\frac{\varepsilon}{2},$$

όπου

$$M_0=\sup\{f(x):0\le x\le b\}\le\alpha \quad \text{και} \quad m_0=\inf\{f(x):0\le x\le b\}\ge-\alpha.$$

Από τις τελευταίες ανισότητες παίρνουμε $M_0-m_0\le 2\alpha$, άρα

$$U(f,P)-L(f,P)<2\alpha b+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$.

64. (α) Αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P_1=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ του $[a,b]$ ώστε $U(f,P_1)-L(f,P_1)<b-a$. Περνώντας αν χρειαστεί σε εκλέπτυνση της P_1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το πλάτος της P_1 είναι μικρότερο από 1. Αφού

$$\sum_{k=0}^{n-1}(M_k-m_k)(x_{k+1}-x_k)<b-a=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k),$$

υπάρχει $k\in\{0,1,\dots,n-1\}$ ώστε $M_k-m_k<1$. Αν θέσουμε $a_1=x_k$ και $b_1=x_{k+1}$ βλέπουμε ότι $a_1<b_1$, $a_1,b_1\in[a,b]$, $b_1-a_1<1$ και

$$\sup\{f(x):a_1\le x\le b_1\}-\inf\{f(x):a_1\le x\le b_1\}=M_k-m_k<1.$$

(β) Με τον ίδιο τρόπο δείξτε ότι υπάρχει $[a_2,b_2]\subseteq(a_1,b_1)$ με μήκος μικρότερο από $1/2$ ώστε

$$\sup\{f(x):a_2\le x\le b_2\}-\inf\{f(x):a_2\le x\le b_2\}<\frac{1}{2}.$$

Για να πετύχετε τον εγκλεισμό $[a_2,b_2]\subset(a_1,b_1)$ ξεκινήστε από ένα υποδιάστημα $[c,d]$ του $[a_1,b_1]$ με $a_1<c<d<b_1$ (η f είναι ολοκληρώσιμη και στο $[c,d]$). Βρείτε διαμέριση P_2 του $[c,d]$ με $U(f,P_2)-L(f,P_2)<\frac{d-c}{2}$ και πλάτος μικρότερο από $1/2$ και συνεχίστε όπως πριν.

Επαγωγικά μπορείτε να βρείτε $[a_n,b_n]\subset(a_{n-1},b_{n-1})$ ώστε $b_n-a_n<1/n$ και

$$\sup\{f(x):a_n\le x\le b_n\}-\inf\{f(x):a_n\le x\le b_n\}<\frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή των κιβωτισμένων διαστημάτων $[a_n,b_n]$ περιέχει ακριβώς ένα σημείο x_0. Θα δείξουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0: έστω $\varepsilon>0$. Επιλέγουμε $n\in\mathbb{N}$ με

$\frac{1}{n} < \varepsilon$. Αφού $x_0 \in [a_{n+1}, b_{n+1}]$, έχουμε $x_0 \in (a_n, b_n)$. Υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a_n, b_n)$. Τότε, για κάθε $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ έχουμε

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει τη συνέχεια της f στο x_0.

(δ) Ας υποθέσουμε ότι η f έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία συνέχειας στο $[a,b]$. Τότε, υπάρχει διάστημα $[c,d] \subset [a,b]$ στο οποίο η f δεν έχει κανένα σημείο συνέχειας (εξηγήστε γιατί). Αυτό είναι άτοπο από το προηγούμενο βήμα: η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[c,d]$, άρα έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε αυτό.

Για την ακρίβεια, το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε δείχνει κάτι ισχυρότερο: αν η f είναι ολοκληρώσιμη τότε έχει τουλάχιστον ένα σημείο συνέχειας σε *κάθε υποδιάστημα* του $[a,b]$. Με άλλα λόγια, το σύνολο των σημείων συνέχειας της f είναι *πυκνό* στο $[a,b]$.

65. Από την προηγούμενη Άσκηση, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ στο οποίο η f είναι συνεχής. Αφού $f(x_0) > 0$, υπάρχει διάστημα $J \subseteq [a,b]$ με μήκος $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in J$ ισχύει $f(x) > f(x_0)/2$. Αφού η f είναι μη αρνητική παντού στο $[a,b]$, έχουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_J f(x)\,dx \geq \delta \cdot \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

66. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα των αρρήτων ελέγχουμε εύκολα ότι $L(f,P) = 0$ για κάθε διαμέριση P του $[0,1]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Παρατηρούμε ότι το σύνολο $A = \{x \in [0,1] : f(x) \geq \varepsilon\}$ είναι πεπερασμένο. [Πράγματι, αν $f(x) \geq \varepsilon$ τότε $x = p/q$ και $f(x) = 1/q \geq \varepsilon$ δηλαδή $q \leq 1/\varepsilon$. Οι ρητοί του $[0,1]$ που γράφονται σαν ανάγωγα κλάσματα με παρονομαστή το πολύ ίσο με $[1/\varepsilon]$ είναι πεπερασμένοι το πλήθος (ένα άνω φράγμα για το πλήθος τους είναι ο αριθμός $1 + 2 + \cdots + [1/\varepsilon]$ – εξηγήστε γιατί)].

Έστω $z_1 < z_2 < \cdots < z_N$ μία αρίθμηση των στοιχείων του A. Μπορούμε να βρούμε ξένα υποδιαστήματα $[a_i, b_i]$ του $[0,1]$ που έχουν μήκη $b_i - a_i < \varepsilon/N$ και ικανοποιούν τα εξής: $a_1 > 0$, $a_i < z_i < b_i$ αν $i < N$ και $a_N < z_N \leq b_N$ (παρατηρήστε ότι αν $\varepsilon \leq 1$ τότε $z_N = 1$ οπότε $b_N = 1$). Αν θεωρήσουμε τη διαμέριση

$$P_\varepsilon = \{0 < a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \cdots < a_N < b_N \leq 1\},$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
U(f, P_\varepsilon) &\leq \varepsilon \cdot (a_1 - 0) + 1 \cdot (b_1 - a_1) + \varepsilon \cdot (a_2 - b_1) + \cdots + 1 \cdot (b_{N-1} - a_{N-1}) \\
&\quad + \varepsilon \cdot (a_N - b_{N-1}) + 1 \cdot (b_N - a_N) + \varepsilon \cdot (1 - b_N) \\
&\leq \varepsilon \cdot \Big(a_1 + (a_2 - b_1) + \cdots + (a_N - b_{N-1}) + (1 - b_N) \Big) \\
&\quad + \sum_{i=1}^N (b_i - a_i) \\
&< 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Για το τυχόν $\varepsilon > 0$ βρήκαμε διαμέριση P_ε του $[0,1]$ με την ιδιότητα

$$U(f,P_\varepsilon) - L(f,P_\varepsilon) < 2\varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

67. Παρατηρήστε πρώτα ότι

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n f(1)\,dx = \lim_{n\to\infty}\left(f(1)\int_0^1 nx^n dx\right) = \lim_{n\to\infty}\left(f(1)\cdot\frac{n}{n+1}\right) = f(1).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty}\int_0^1 nx^n g(x)\,dx = 0,$$

όπου $g(x) = f(x) - f(1)$. Η g είναι συνεχής, άρα υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $|g(x)| \leq \alpha$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της g στο 1 και το γεγονός ότι $g(1) = 0$, υπάρχει $\delta \in (0,1)$ ώστε $|g(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [1-\delta, 1]$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 nx^n g(x)\,dx\right| &\leq \int_0^{1-\delta} nx^n|g(x)|\,dx + \int_{1-\delta}^1 nx^n|g(x)|\,dx \\
&\leq \alpha\int_0^{1-\delta} nx^n dx + \varepsilon\int_{1-\delta}^1 nx^n dx \\
&\leq \alpha\cdot\frac{n(1-\delta)^{n+1}}{n+1} + \varepsilon\int_0^1 nx^n dx \\
&\leq \alpha\cdot\frac{n(1-\delta)^{n+1}}{n+1} + \varepsilon\cdot\frac{n}{n+1} \\
&\leq \alpha(1-\delta)^{n+1} + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha(1-\delta)^{n+1} = 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\alpha(1-\delta)^{n+1} < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα,

$$\left|\int_0^1 nx^n g(x)\,dx\right| \leq 2\varepsilon \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Έπεται η $(*)$.

68. Η f είναι συνεχής, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(y)| \leq M$ για κάθε $y \in [0,1]$. Έστω $0 < \varepsilon < 1$. Από τη συνέχεια της f στο 0, υπάρχει $0 < \delta < 1$ ώστε: αν $0 \leq y \leq \delta$ τότε

$$|f(y) - f(0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}\right)^n < \delta.$$

Τότε, για κάθε $n \geq n_0$ μπορούμε να γράψουμε (παρατηρήστε ότι αν $0 < x < 1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}$ τότε $|f(x^n) - f(0)| < \varepsilon/2$)

$$\begin{aligned}
|a_n - f(0)| &= \left| \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}} (f(x^n) - f(0))dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}^1 (f(x^n) - f(0))dx \right| \\
&\leq \int_0^{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}} |f(x^n) - f(0)|\, dx + \int_{1-\frac{\varepsilon}{4M+1}}^1 (|f(x^n)| + |f(0)|)\, dx \\
&\leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{4M+1}\right) \cdot \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M+1} \cdot 2M \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα, $a_n \to f(0)$.

69. Παρατηρήστε πρώτα ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 nf(0)e^{-nx}dx = \lim_{n\to\infty} \left(f(0) \int_0^1 ne^{-nx}dx \right) = \lim_{n\to\infty} \big(f(0) \cdot (1 - e^{-n}) \big) = f(0).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$(*) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_0^1 ne^{-nx} g(x)\, dx = 0,$$

όπου $g(x) = f(x) - f(0)$. Η g είναι συνεχής, άρα υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $|g(x)| \leq \alpha$ για κάθε $x \in [0,1]$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της g στο 0 και το γεγονός ότι $g(0) = 0$, υπάρχει $\delta \in (0,1)$ ώστε $|g(x)| < \varepsilon$ για κάθε $x \in [0,\delta]$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^1 ne^{-nx} g(x)\, dx \right| &\leq \int_0^\delta ne^{-nx} |g(x)|\, dx + \int_\delta^1 ne^{-nx} |g(x)|\, dx \\
&\leq \varepsilon \int_0^\delta ne^{-nx} dx + \alpha \int_\delta^1 ne^{-nx} dx \\
&\leq \varepsilon \cdot (1 - e^{-n\delta}) + \alpha \cdot (e^{-n\delta} - e^{-n}) \\
&\leq \varepsilon + \alpha \cdot e^{-n\delta}.
\end{aligned}$$

Αφού $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha \cdot e^{-n\delta} = 0$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\alpha \cdot e^{-n\delta} < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα,

$$\left| \int_0^1 ne^{-nx} g(x)\, dx \right| \leq 2\varepsilon \text{ για κάθε } n \geq n_0.$$

Έπεται η $(*)$.

70. Αφού $\limsup\limits_{n\to\infty} \lambda(A_n) = 1$, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $n > m$ ώστε $\lambda(A_n) > 1 - \varepsilon$.

Έστω $0 < \alpha < 1$. Επαγωγικά, βρίσκουμε $k_1 < k_2 < \cdots < k_n < k_{n+1} < \cdots$ ώστε

$$\lambda(A_{k_n}) > 1 - \frac{1-\alpha}{2^n}.$$

Τότε, αν θέσουμε $A_{k_n}^c := [0,1] \setminus A_{k_n}$, έχουμε

$$\lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_{k_n}^c) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\alpha}{2^n} = 1-\alpha.$$

Συνεπώς,

$$\lambda\left(\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}\right) = 1 - \lambda\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_{k_n}^c\right) > \alpha.$$

71. (α) Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ έχουμε $\cup_{n=m}^{\infty} A_n \supseteq A_m$, άρα

$$\lambda_k\left(\cup_{n=m}^{\infty} A_n\right) \geq \lambda_k(A_n) \geq c.$$

Αν θέσουμε $E_m = \cup_{n=m}^{\infty} A_n$, τότε $E_m \searrow \limsup A_n$ και $\lambda_k(E_1) \leq \lambda_k(E) < \infty$. Συνεπώς,

$$\lambda_k(\limsup A_n) = \lim_{m\to\infty} \lambda_k(E_m) \geq c > 0.$$

(β) Αφού $\lambda_k(\limsup A_n) > 0$, έχουμε $\limsup A_n \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχει $x \in E$ το οποίο ανήκει σε άπειρα το πλήθος A_n. Ισοδύναμα, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}$ φυσικών με την ιδιότητα $x \in \cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n}$. Με άλλα λόγια, $\cap_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \neq \emptyset$.

72. Αφού η f είναι Lebesgue ολοκληρώσιμη, έχουμε

$$\int_Z f\, d\lambda = 0 \quad \text{αν } Z \subset [a,b] \text{ με } \lambda(Z) = 0.$$

Από την υπόθεση έπεται ότι αν $a \leq c < d \leq b$ τότε

$$\int_{[c,d]} f\, d\lambda = \int_{[a,d]} f\, d\lambda - \int_{[a,c]} f\, d\lambda = 0.$$

Έστω $G \subset [a,b]$ ανοικτό. Τότε, το G γράφεται στη μορφή $G = \cup_{n=1}^{\infty} [c_n, d_n]$ με τα $[c_n, d_n]$ μη επικαλυπτόμενα. Συνεπώς (εξηγήστε γιατί, θεωρώντας τις f^+ και f^-),

$$\int_G f\, d\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{[c_n,d_n]} f\, d\lambda = 0.$$

Αν H είναι ένα G_δ υποσύνολο του $[a,b]$, τότε υπάρχει φθίνουσα ακολουθία $\{G_n\}$ ανοικτών υποσυνόλων του $[a,b]$ ώστε $H = \cap_{n=1}^{\infty} G_n$. Έχουμε $f\chi_H = \lim_{n\to\infty}(f\chi_{G_n})$ και $|f\chi_{G_n}| \leq |f|$. Αφού η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μας δίνει

$$0 = \int_{G_n} f\, d\lambda = \int_{[a,b]} f\chi_{G_n}\, d\lambda \to \int_{[a,b]} f\chi_H\, d\lambda = \int_H f\, d\lambda.$$

Τέλος, αν E είναι τυχόν μετρήσιμο υποσύνολο του $[a,b]$, μπορούμε να γράψουμε το E στη μορφή $E = H \setminus Z$ όπου H είναι G_δ υποσύνολο του $[a,b]$ και Z ξένο προς το E, με $\lambda(Z) = 0$. Τότε,

$$\int_E f\, d\lambda = \int_H f\, d\lambda - \int_Z f\, d\lambda = 0 - 0 = 0.$$

Αφού $\int_E f\,d\lambda = 0$ για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq [a,b]$, συμπεραίνουμε ότι $f = 0$ λ-σχεδόν παντού στο $[a,b]$ (αρκεί να θεωρήσουμε τα $E_1 = \{f > 0\}$ και $E_2 = \{f < 0\}$).

73. Ορίζουμε $E_m = E \cap [m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z}$. Κάθε E_m είναι Lebesgue μετρήσιμο, τα E_m είναι ξένα ανά δύο, και η ένωση τους είναι το E.

Θέτουμε $F_m = E_m - m = \{x - m : x \in E_m\}$. Παρατηρήστε ότι $F_m \subseteq [0,1)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $m \neq n$ στο $\mathbb{Z}$ ώστε $F_m \cap F_n \neq \emptyset$. Πράγματι, αν τα F_m ήταν ξένα ανά δύο, τότε θα είχαμε

$$1 = \lambda([0,1)) \geq \lambda\left(\cup_{m\in\mathbb{Z}} F_m\right) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(F_m).$$

Όμως, $\lambda(F_m) = \lambda(E_m)$ για κάθε m, και συνεπώς,

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(F_m) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda(E_m) = \lambda(E) > 1.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες καταλήγουμε σε άτοπο: $1 > 1$.

Υπάρχουν λοιπόν $m \neq n$ ώστε $(E_m - m) \cap (E_n - n) \neq \emptyset$. Δηλαδή, υπάρχουν $x \in E_m$ και $y \in E_n$ ώστε

$$x - m = y - n.$$

Με άλλα λόγια, υπάρχουν x, y στο E ώστε $x - y = m - n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

74. Θεωρούμε την $f = \sum_{i=1}^N \chi_{E_i}$. Αφού κάθε $x \in [0,1]$ ανήκει σε τουλάχιστον k από τα $E_1, \ldots, E_N$, έχουμε

$$f(x) = \sum_{i=1}^N \chi_{E_i}(x) \geq k$$

για κάθε $x \in [0,1]$. Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^N \lambda(E_i) = \sum_{i=1}^N \int_{[0,1]} \chi_{E_i}(x)\,d\lambda(x) = \int_{[0,1]} f\,d\lambda \geq k.$$

Έπεται ότι

$$\max_{1\leq i\leq N} \lambda(E_i) \geq \frac{k}{N}.$$

Δηλαδή, υπάρχει $i_0 \in \{1, \ldots, N\}$ με την ιδιότητα $\lambda(E_{i_0}) \geq \frac{k}{N}$.

75. Έστω $\alpha > 0$. Αφού η f είναι γνησίως θετική, αν θέσουμε $E_m = \{f > 1/m\}$ τότε $E_m \nearrow E$. Συνεπώς,

$$\lim_{m\to\infty} \lambda_k(E_m) = \lambda_k(E) < \infty.$$

Υπάρχει λοιπόν $m \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\lambda_k(E) - \lambda_k(E_m) < \frac{\alpha}{2}.$$

Έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του E με $\lambda_k(A) > \alpha$. Τότε,

$$\lambda_k(A \cap E_m) + \lambda_k(A \cap (E \setminus E_m)) = \lambda_k(A) > \alpha,$$

άρα

$$\lambda_k(A \cap E_m) > \alpha - \lambda_k(A \cap (E \setminus E_m)) \geq \alpha - \lambda_k(E \setminus E_m) > \alpha - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}.$$

Έπεται ότι

$$\int_A f\, d\lambda_k \geq \int_{A \cap E_m} f\, d\lambda_k \geq \frac{1}{m} \cdot \lambda_k(A \cap E_m) \geq \frac{\alpha}{2m}.$$

Άρα, το ζητούμενο ισχύει με $\delta = \alpha/(2m)$.

76. Η $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\alpha_n}{\sqrt{|x-q_n|}}$ είναι μετρήσιμη, και

$$\int_{[0,1]} |f_n| = |\alpha_n| \left(\int_0^{q_n} \frac{1}{\sqrt{q_n - x}} + \int_{q_n}^1 \frac{1}{\sqrt{x - q_n}} \right) = 2|\alpha_n| \left(\sqrt{q_n} + \sqrt{1 - q_n} \right) \leq 4|\alpha_n|.$$

Αφού

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{[0,1]} |f_n| \leq 4 \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n| < +\infty,$$

η

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{\sqrt{|x - q_n|}}$$

συγκλίνει απολύτως σχεδόν παντού στο $[0,1]$.

77. Τα ολοκληρώματα υπολογίζονται με στοιχειώδη τρόπο: θέτοντας $y = 1 + n^2x^2$, παίρνουμε

$$\int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2x^2}\, dx = \frac{1}{2n} \int_1^{1+n^2} \frac{dy}{y} = \frac{\ln(1 + n^2)}{2n} \to 0.$$

Τέλος,

$$\int_0^1 \frac{n^{3/2}x}{1 + n^2x^2}\, dx = \sqrt{n} \int_0^1 \frac{nx}{1 + n^2x^2}\, dx = \frac{\ln(1 + n^2)}{2\sqrt{n}} \to 0.$$

Θέματα Εξετάσεων

ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005-06)

2 Φεβρουαρίου 2006

1. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Δείξτε ότι: αν το B είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$, τότε το $f^{-1}(B)$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

2. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας πλήρης χώρος μέτρου. Δίνονται $A \in \mathcal{A}$ και $B \subseteq X$ για τα οποία $A \triangle B \in \mathcal{A}$ και $\mu(A \triangle B) = 0$. Δείξτε ότι $B \in \mathcal{A}$ και $\mu(B) = \mu(A)$.

3. Έστω E ένα Lebesgue μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι $\lambda((a, b) \setminus E) \geq \frac{b-a}{2}$ για κάθε ανοικτό διάστημα $(a, b) \subset \mathbb{R}$. Δείξτε ότι $\lambda(E) = 0$.

4. Θέτουμε $A = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$. Δείξτε ότι:

(α) Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ακολουθία $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ ανοικτών διαστημάτων ώστε: $A \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} R_j$ και $\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(R_j) < \varepsilon$.

(β) Αν $\{R_j\}_{j=1}^{m}$ είναι μια *πεπερασμένη* οικογένεια ανοικτών διαστημάτων ώστε $A \subseteq \cup_{j=1}^{m} R_j$, τότε $\sum_{j=1}^{m} \lambda(R_j) \geq 1$.

5. Δίνονται: ένας χώρος μέτρου $(X, \mathcal{A}, \mu)$, μια ακολουθία $\{E_n\}$ μετρήσιμων υποσυνόλων του X, και ένας φυσικός αριθμός k. Θεωρούμε το σύνολο B όλων των $x \in X$ που ανήκουν σε τουλάχιστον k από τα σύνολα E_n. Δείξτε ότι το B είναι μετρήσιμο και ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n) \geq k\, \mu(B).$$

Υπόδειξη: Θεωρήστε τη συνάρτηση $f = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{E_n}$.

6. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $f : X \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $A \in \mathcal{A}$ και $\mu(A) < \delta$, τότε $\int_A |f|\, d\mu < \varepsilon$.

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου, $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $A_n, A \in \mathcal{A}$. Υποθέτουμε ότι $f_n \to f$ κατά μέσο και ότι $\mu(A_n \triangle A) \to 0$. Δείξτε ότι

$$\int_{A_n} f_n\, d\mu \to \int_A f\, d\mu.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη Άσκηση, δείξτε πρώτα ότι

$$\int_{A_n} f\, d\mu \to \int_A f\, d\mu.$$

8. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου και έστω $f_n, f, g : X \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις. Αν $|f_n| \leq g$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\int_X g\, d\mu < \infty$ και $f_n \to f$ κατά μέτρο, δείξτε ότι οι f_n, f είναι ολοκληρώσιμες και

$$\int_X f_n\, d\mu \to \int_X f\, d\mu.$$

ΘΕΩΡΙΑ ΜΕΤΡΟΥ (2005-06)

19 Σεπτεμβρίου 2006

1. Για κάθε $E \subseteq \mathbb{N}$ ορίζουμε $\varphi(E) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \operatorname{card}(E \cap \{1,\dots,n\})$ (όπου $\operatorname{card}(A)$ είναι ο πληθάριθμος του A). Εξετάστε αν η φ είναι εξωτερικό μέτρο στο $\mathbb{N}$.

2. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων. Δείξτε ότι το σύνολο

$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{n\to\infty} f_n(x) = +\infty\}$$

είναι σύνολο Borel.

3. Έστω $\mathcal{F}$ μια άλγεβρα στο X και έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο στον $(X, \sigma(\mathcal{F}))$. Δείξτε ότι για κάθε $A \in \sigma(\mathcal{F})$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \in \mathcal{F}$ ώστε $\mu(A \triangle F) < \varepsilon$, όπου $A \triangle F = (A \setminus F) \cup (F \setminus A)$ είναι η συμμετρική διαφορά των A και F.

4. Θεωρούμε μια αρίθμηση $q_1, q_2, \dots, q_n, \dots$ των ρητών αριθμών. Δείξτε ότι σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}$ (ως προς το μέτρο Lebesgue) έχει την εξής ιδιότητα: υπάρχει $k = k(x) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq k$ να ισχύει $|x - q_n| \geq 1/n^2$.

5. Έστω $k \leq n$ και έστω $E_1, \dots, E_n$ Lebesgue μετρήσιμα υποσύνολα του $[0,1]$. Αν

$$\lambda(E_1) + \cdots + \lambda(E_n) \geq k,$$

δείξτε ότι υπάρχουν δείκτες $i_1 < \cdots < i_k$ στο $\{1, \dots, n\}$ ώστε

$$E_{i_1} \cap \cdots \cap E_{i_k} \neq \emptyset.$$

6. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lebesgue ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Δείξτε ότι:

(α) $\int_{\{x:|f(x)|\leq n\}} f\,d\lambda \to \int f\,d\lambda$ όταν $n \to \infty$.

(β) $\int_{\{x:|f(x)|>n\}} f\,d\lambda \to 0$ όταν $n \to \infty$.

(γ) $n \cdot \lambda(\{x : |f(x)| > n\}) \to 0$ όταν $n \to \infty$.

7. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου, και έστω $f, f_n : (X, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $f_n \to f$ $\mu - \sigma.\pi.$ Δείξτε ότι

$$\int_X |f_n - f|\,d\mu \to 0 \quad \text{αν και μόνο αν} \quad \int_X |f_n|\,d\mu \to \int_X |f|\,d\mu.$$