Αν η f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα Δ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \Delta$, τότε

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση με τύπο $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ είναι σύνθεση $g = h \circ f$, όπου $h(x) = \frac{1}{x}$, δηλαδή $g(x) = h(f(x)) = \frac{1}{f(x)}$.

Από τον κανόνα της αλυσίδας και το γεγονός ότι $h'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ παίρνουμε

$$\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = h'(f(x)) \cdot f'(x) = -\frac{1}{(f(x))^2} f'(x) =$$

$$= -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}.$$

Παραδείγματα: 1) $\left(\frac{1}{\cos x}\right)' = -\frac{(\cos x)'}{\cos^2 x} = -\frac{-\sin x}{\cos^2 x} =$

$$= \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

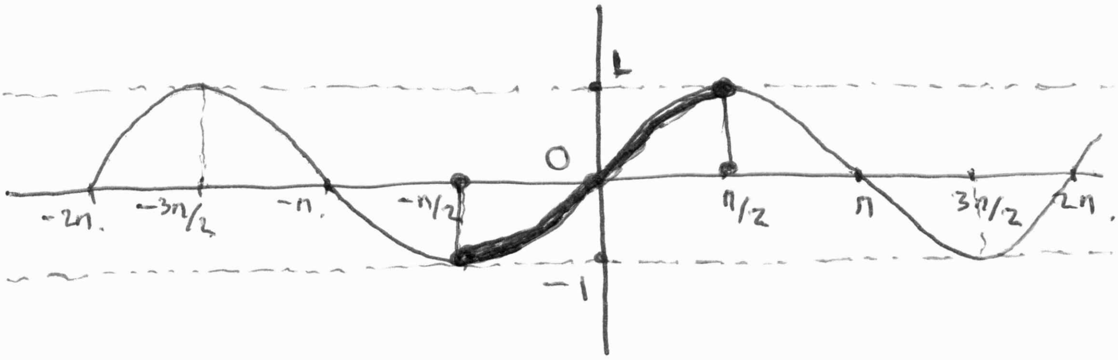
2) $\left(\frac{1}{\ln x}\right)' = -\frac{(\ln x)'}{(\ln x)^2} = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$

3) $\left(\frac{1}{x^2 - 2x + \tan x}\right)' = -\frac{(x^2 - 2x + \tan x)'}{(x^2 - 2x + \tan x)^2} =$

$$= -\frac{2x - 2 + \frac{1}{\cos^2 x}}{(x^2 - 2x + \tan x)^2}$$

Κυκλομετρικές συναρτήσεις (αντίστροφες τριγωνομετρικών).

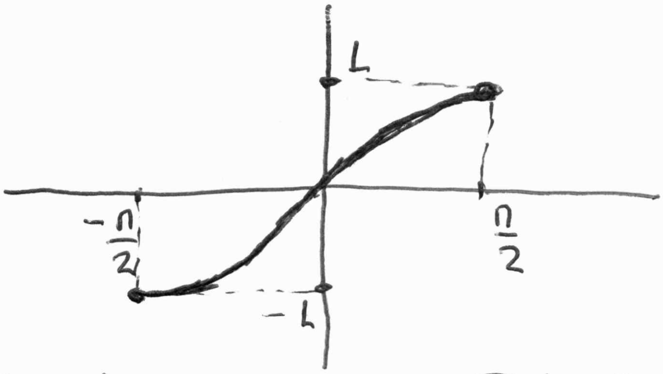
Θεωρούμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης του ημιτόνου (sin)



Η συνάρτηση του ημιτόνου δεν είναι 1-1 (αφού π.χ. $\sin 0=\sin\pi=\sin k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$).

Παρατηρούμε όμως ότι στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ (χοντρή γραμμή) είναι γνησίως αύξουσα.

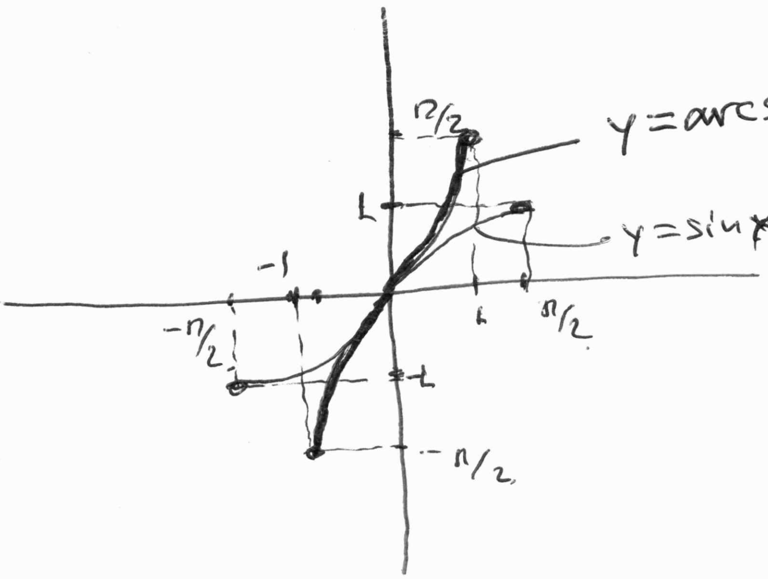
Αν λοιπόν θεωρήσουμε τον περιορισμό της στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ παίρνουμε μια νέα συνάρτηση $f:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to[-1,1]$, η οποία είναι 1-1 και επί. Η γραφική της παράσταση είναι η χοντρή γραμμή.



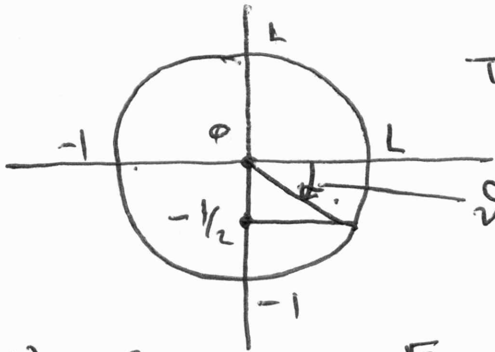
Η αντίστροφη της f, δηλαδή η f^{-1} συμβολίζεται με $\boxed{\text{arc sin}}$ (τόξο ημιτόνου

τόξο ημιτόνου

Η γραφική παράσταση της $\arcsin : [-1, 1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f.



Για να υπολογίσουμε την τιμή της arcsin σε ένα σημείο π.χ. $-\frac{1}{2}$ στο $[-1, 1]$ σκεφτόμαστε! Ποιά γωνία στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ έχει ημίτονο $-\frac{1}{2}$;

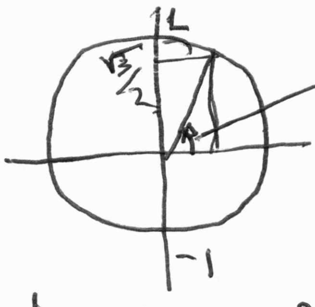


Τριγ. κύκλος

$\theta = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}$

Επίσης, $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$, $\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$ κ.τ.λ.

↓



$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}$.

Επειδή η $\arcsin = f^{-1}$, όπου f ο περιορισμός του ημιτόνου στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ θα έχουμε!

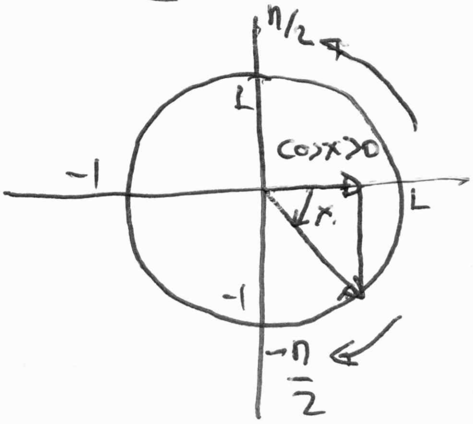
$\arcsin y = x \Leftrightarrow \boxed{y=\sin x}$

Από τον τύπο παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης

$$(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\sin' x} = \frac{1}{\cos x}$$

Αλλά $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ και επομένως $\cos x \geq 0$ και

$\cos x = 0$ για $x = \frac{\pi}{2}$ ή $x = -\frac{\pi}{2}$.



Άρα η $(\arcsin)'$ ορίζεται για κάθε $y \in (-1, 1)$

(γιατί $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(1) = \frac{\pi}{2}$)

Εφόσον $\cos x > 0$, για κάθε $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ τότε

έχουμε $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\Leftrightarrow$ $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$ (και όχι $-\sqrt{1-\sin^2 x}$)

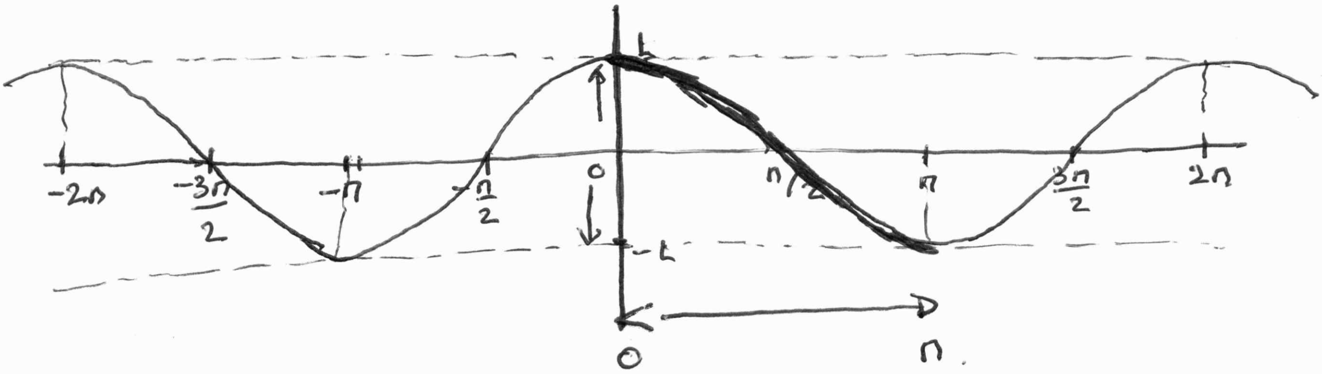
$\cos x > 0$.

Άρα $\boxed{(\arcsin)'(y) = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$

για κάθε $y \in (-1, 1)$. (Στα ± 1 μηδενίζεται ο παρονομαστής!

<u>Τόξο συνημιτόνου</u>

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης του συνημιτόνου είναι η ακόλουθη!



Στο διάστημα $[0,\pi]$ η συνάρτηση cos είναι γνησίως φθίνουσα, άρα ο περιορισμός της

$$f : [0,\pi] \longrightarrow [-1,1]$$

είναι 1-1 και είναι και επί.

Η αντίστροφη της f,

$$f^{-1} : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$

είναι επίσης γνησίως φθίνουσα και επί.

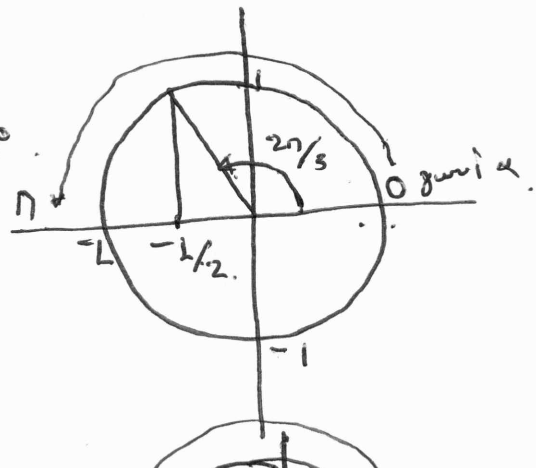
Αυτή συμβολίζεται με

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi].$$

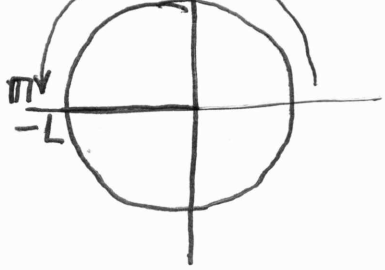
Για κάθε $y \in [-1,1]$ η $\arccos y$ ισούται με τη γωνία που ανήκει στο $[0,\pi]$ και έχει συνημίτονο το y.

Παραδείγματα:

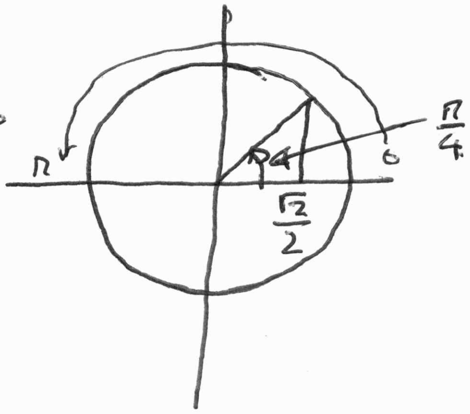
$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3} = 120°$.



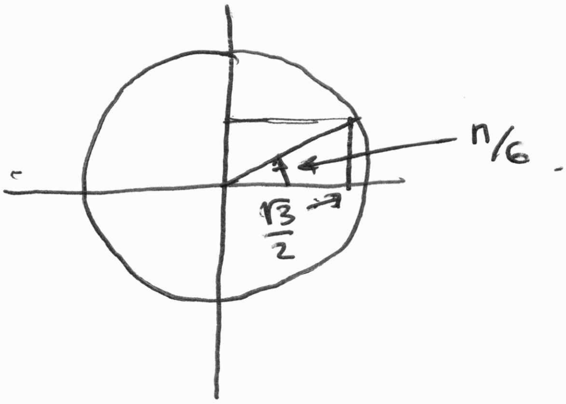
$\arccos(-1) = \pi$.



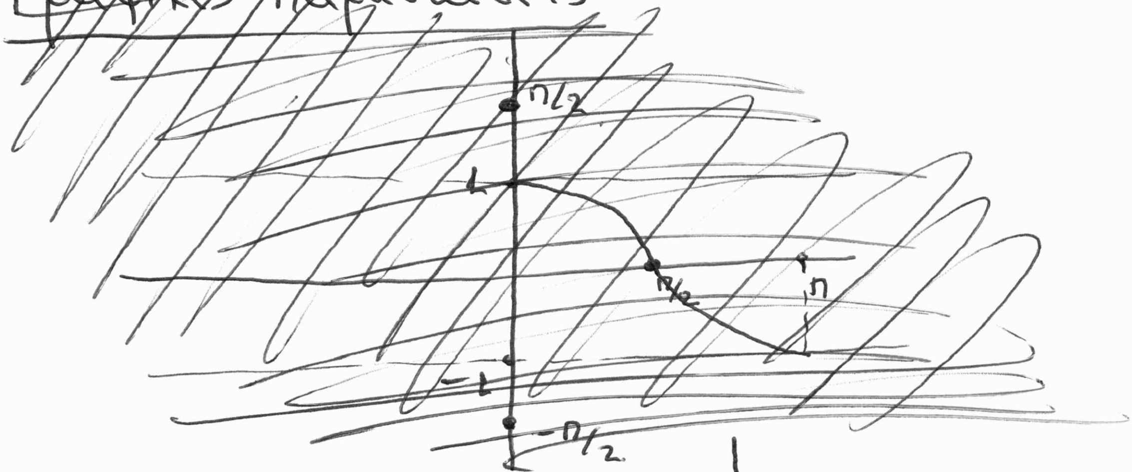
$\arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$



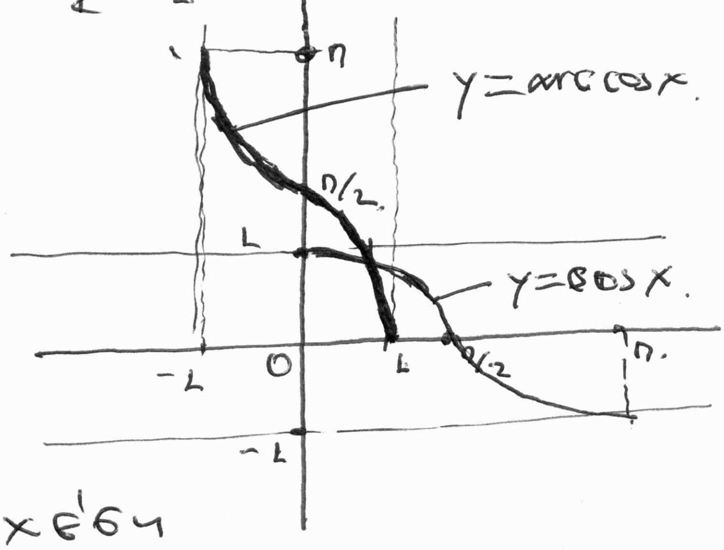
$\arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} = 30^\circ$



~~Γραφικές παραστάσεις~~



Γραφικές Παραστάσεις.

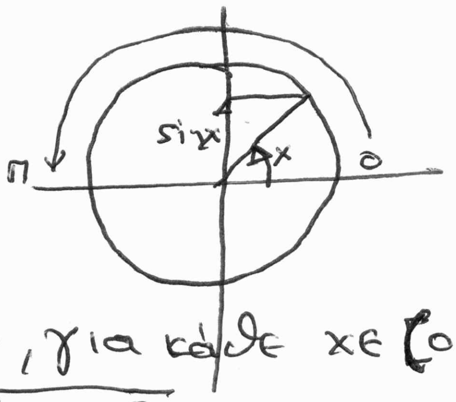


Ισχύει η σχέση

$$\boxed{x = \arccos y \iff y = \cos x}$$

Από τον τύπο παραγώγισης αντίστροφης συνάρτησης έχουμε:

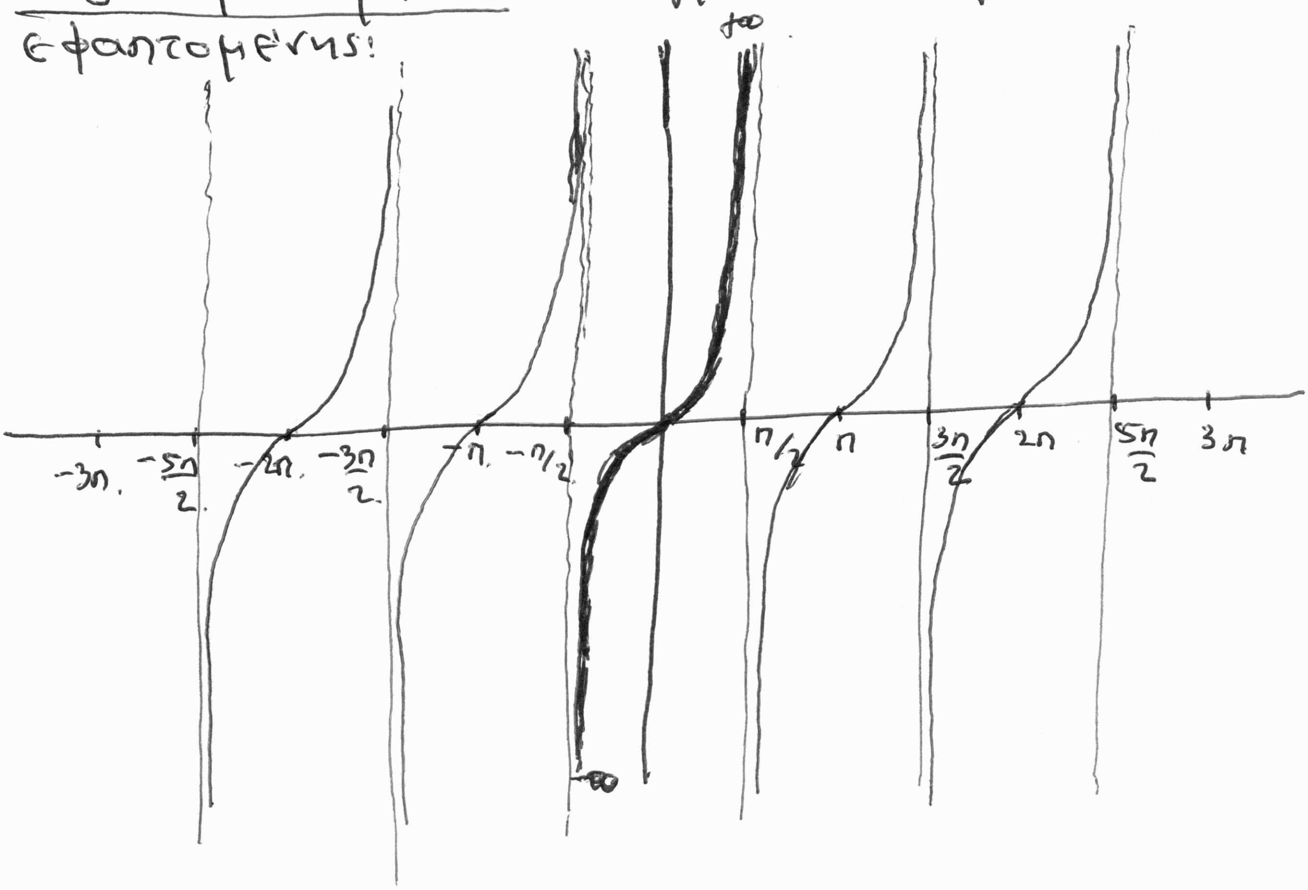
$$(\arccos)'(y) = \frac{1}{(\cos x)'} = -\frac{1}{\sin x}.$$



Αλλά $\sin x > 0$, για κάθε $x \in (0, \pi)$ και $\sin 0 = \sin \pi = 0$.
Άρα $\sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x}$.
Επομένως

$$\boxed{(\arccos)'(y) = -\frac{1}{\sin x} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 x}} \underset{y=\cos x}{=} -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.}$$

<u>Τόξο εφαπτομένης:</u> Η γραφική παράσταση της εφαπτομένης:

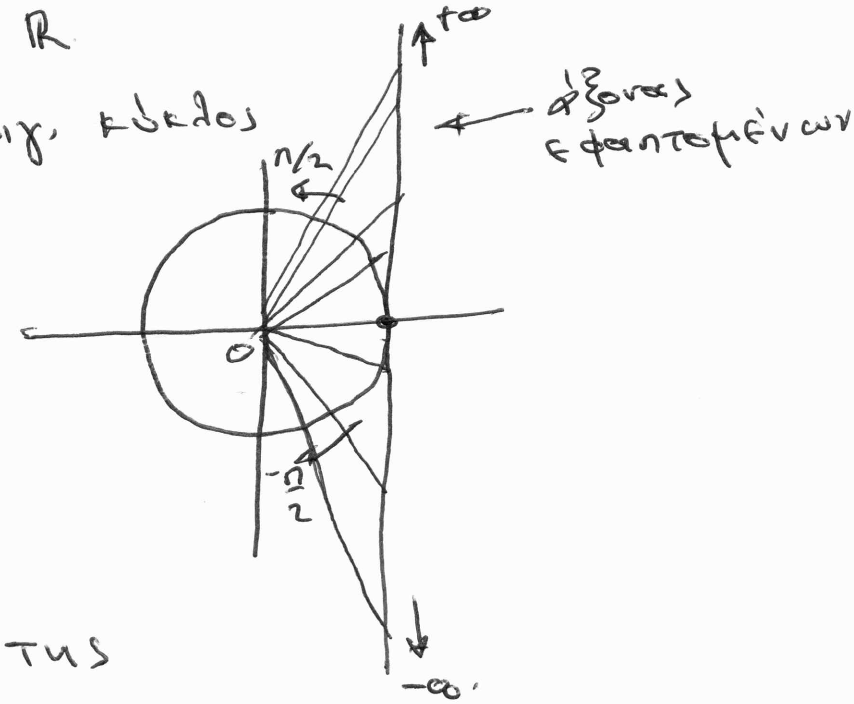


Η εφαπτομένη είναι περιοδική και επαναλαμβάνεται στα διαστήματα ..., $\left(-\frac{5\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ κτ.λ.

Επιλέγουμε ως $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ τον κεντρικό κλάδο που αντιστοιχεί στη χοντρή γραμμή.

Δηλαδή $f(x) = \tan x$, για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών όλο το $\mathbb{R}$.



Η αντίστροφη της $f: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \tan x$ συμβολίζεται με

$$f^{-1} = \arctan : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, γιατί $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.

$\arctan\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{\pi}{6}$, γιατί $\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$, γιατί $\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

Γενικά $\boxed{\arctan y = x \Leftrightarrow y = \tan x}$

Τύπος αντιστρόφου:

$$(\arctan)'(y) = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}}$$

Αλλά $\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \Rightarrow 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Επομένως $(\arctan)'(y) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2}$.

Τόξο συνεφαπτομένης

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται η συνάρτηση

$$\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \to (0, \pi)$$

μέσω της σχέσης

$$\operatorname{arccot} y = x \Leftrightarrow y = \cot x .$$

Παρόμοια, $(\operatorname{arccot})'(y) = -\frac{1}{1+y^2}$.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε: (όπου θέτουμε x αντί y)

$$\boxed{\begin{array}{l}
1)\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x \in (-1,1) \\
2)\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad x \in (-1,1) \\
3)\ (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},\quad x \in \mathbb{R} \\
4)\ (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2},\quad x \in \mathbb{R}
\end{array}}$$

Γραφικές παραστάσεις των arctan και arccot.