Διαλεξη - Επανάληψη

Επαγωγή.

1 Ν.δ.ο:

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$n \to n+1$.

Λύση

- θ.δ.ο. ισχύει για $n=1$.

$$1^2 = \frac{6}{6} = 1 \quad ✓$$

- Υποθέτουμε ότι ισχύει για n και θα το δείξουμε για $n+1$.

Άρα $\underbrace{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}_{\text{επαγ. υπόθ. (ισχύει για } n)} + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$$= \frac{n+1}{6}\left[n(2n+1) + 6(n+1)\right] = \frac{n+1}{6}\left(2n^2 + 7n + 6\right)$$

2

Θέλουμε να φτάσουμε στο ότι

$$1^2+2^2+\dots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)\overbrace{(n+2)(2n+3)}}{6}$$

Άρα αρκεί ν.δ.ο. $(n+2)(2n+3)=2n^2+7n+6$.

Πράγματι, $(n+2)(2n+3)=2n^2+3n+4n+6$

$$=2n^2+7n+6 \quad ✓$$

* → Έλεγχος Μονοτονίας.

$(n\geq 0)$ $\quad$ $\left[\,a_{n+1}-a_n \;;\; \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \text{ για } a_n>0\,\right]$

2 $\quad a_n=e^n-n$. Να μελετηθεί η μονοτονία της.

→ Ελέγχουμε $a_{n+1}-a_n$ $\quad\left[a_{n+1}=e^{n+1}-(n+1)\right]$.

$$a_{n+1}-a_n=e^{n+1}-(n+1)-(e^n-n)=e^{n+1}-e^n-\cancel{n}-1+\cancel{n}$$

$$= e^{n+1} - e^n - 1 .$$

$$= e^n(e-1) - 1$$

Έχουμε $a_{n+1} - a_n > 0 \iff$

$$e^n \underbrace{(e-1)}_{\cong 2.7} > 1 \iff$$

$$2.7 \cdot \underbrace{e^n}_{\geq 1} > 1 \checkmark$$

Έχουμε $e^n \geq e^0 = 1$,

Εδώ λοιπόν η $(a_n) \nearrow$ γνησίως αύξουσα.

4

έστω $b_n = \frac{e^n}{n}$ $(n \geq 1)$.

να εξεταστεί η μονοτονία της για $n \geq 1$.

→ πάμε με το λόγο $\frac{b_{n+1}}{b_n}$

[γενικά αν δεν προσδιορίζεται ακριβώς για ποια n μιλάμε, τότε παίρνουμε όλα εκείνα που έχει νόημα, εννοείται φυσικούς αριθμούς, $n = 0, 1, 2, \ldots$].

$$b_{n+1} = \frac{e^{n+1}}{n+1}.$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{\frac{e^{n+1}}{n+1}}{\frac{e^n}{n}} = \frac{e^{n+1}}{e^n} \cdot \frac{n}{n+1}$$

- $\geq 1 \rightarrow$ αύξουσα
- $> 1 \rightarrow$ γνησ. αύξ.
- $< 1 \rightarrow$ γνησ. φθίν.
- $\leq 1 \rightarrow$ φθίνουσα

5

$$= e \cdot \frac{n}{n+1}$$

Έχουμε $\frac{b_{n+1}}{b_n} > 1 \iff e \cdot \frac{n}{n+1} > 1.$

$$\iff e > \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n} \iff$$

$$\underbrace{e-1}_{\approx 1.7} > \frac{1}{n}$$

[προφανώς. διότι $\frac{1}{n} \searrow$. με $n=1 \longrightarrow 1$].

$$\frac{1}{n} \leq 1 < 1.7$$

Εναλλακτικά

Μελετήσαμε $a_n = e^n - n$, για $n \geq 0$.

είδαμε $a_n \nearrow$.

Θα μπορούσαμε να αντικαταστήσουμε

$n \longrightarrow x$; $a_n \longrightarrow f(x) = e^x - x$, $x \geq 0$

$a(n)$

Αν βγάλαμε ότι η $f(x) \nearrow$ για $x \geq 0$,

Τότε $a_n \nearrow$ για $n = 0, 1, 2, \ldots$

$f'(x) = e^x - 1$ και έτσι

$f'(x) > 0 \iff e^x - 1 > 0 \overset{(x>0)}{\iff} e^x > 1 = e^0$, για $x > 0$.

Συμπεραίνουμε ότι $f(x) \nearrow$ για $x \geq 0$ (7)

$(f'(0) = 0)$ και άρα $a_n \nearrow$.

$\rightarrow$ $b_n = \dfrac{e^n}{n}$, $\underline{n \geq 1}$

Θέτουμε $g(x) = \dfrac{e^x}{x}$, $x \geq 1$.

$$g'(x) = \frac{(e^x)' \cdot x - e^x \cdot x'}{x^2} =$$

$$\frac{x \cdot e^x - e^x}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2} > 0 \text{, για } x > 1$$

και $g'(x) = 0$, για $x = 1$ $\Big\} \Rightarrow g \nearrow$.

→ Φραγμένες ακολουθίες

8

(3) N.δ.ο. η $a_n = 3\cdot\cos(2n) + (-1)^n \cdot \sin(\pi+n)$

είναι φραγμένη.

→ Λύση. φραγμένη $\Leftrightarrow \exists M \geq 0 : |a_n| \leq M.$

Εδώ. αν β και γ είναι πραγμ. αριθμ.

Τότε $|\beta+\gamma| \leq |\beta| + |\gamma|$

και έχουμε

$$|a_n| = \left|3\cos(2n) + (-1)^n \cdot \sin(\pi+n)\right| \leq$$

$$|3\cos(2n)| + \left|(-1)^n \cdot \sin(\pi+n)\right|$$

$$= 3\,|\cos(2n)| + |(-1)^n| \cdot |\sin(\pi+n)| \leq \underbrace{3\cdot 1 + 1\cdot 1}_{=4}$$

και άρα η (a_n) είναι φραγμένη.

- $\boxed{\text{Σύγκλιση Ακολουθιών Πραγμ. Αριθμών}}$

$$a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$$

$a_n \to a$, $b_n \to b$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$a_n + b_n \to a + b$,

$a_n b_n \to a \cdot b$.

$\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$, $b \neq 0$. (τελικά $\forall n$).

f συνεχής και $a_n \to a$, τότε

$$f(a_n) \to f(a).$$

[π.χ. $e^{a_n} \to e^{a}$ διότι e^x συνεχής]

Σειρές πραγματικών αριθμών.

$(a_n) \longrightarrow \sum_n a_n$? $(n \geq 0,\ n \geq 1, \dots, n \geq k)$.

$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$

[μία σειρά συγκλίνει $\Longleftrightarrow$ συγκλίνει η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων]

πολύ σημαντικές σειρές.

- γεωμετρική $\sum_{n \geq 0}^{+\infty} \theta^n = \dfrac{1}{1-\theta}$, αν $\underline{|\theta| < 1}$.
- αρμονική $\sum_{n \geq 1} \left(\dfrac{1}{n}\right)^p \longrightarrow$ συγκλίνει για $p > 1$
  αποκλίνει για $0 < p \leq 1$
- εναλλάσσουσα.
  $\sum_{n \geq 0}^{n} (-1)^n \cdot a_n = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \longrightarrow a_n \searrow$ και $a_n \to 0$, συγκλίνει.

- αν $\sum_n a_n$ συγκλίνει $\Longrightarrow$ $a_n \to 0$

$\not\Longleftarrow$

- $\sum_{k\geq n} a_k = a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$

αν $\sum_{n\geq 0} a_n$ συγκλίνει, τότε:

- $\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} a_k} + \underbrace{\sum_{k\geq n} a_k} = \sum_{n\geq 0} a_n$

παίρνοντας όριο καθώς $n \to \infty$ $\Longrightarrow$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \sum_{k\geq n} a_k = 0}$$

→ κριτήρια σύγκλισης σειρών $\sum_n a_n$ (λόγου). (12)

- αν $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right| \longrightarrow a < 1$, τότε σύγκλιση σειράς

$\longrightarrow a > 1$, τότε απόκλιση σειράς.

- (η-οστή ρίζα). $\sqrt[n]{|a_n|}$ πάλι αντίστοιχα.

→ σύγκλιση δυναμοσειρών. $\sum a_n(x-x_0)^n$

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad \text{ή} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

R ↓ ακτίνα σύγκλισης: και η δυναμοσειρά συγκλίνει

$\forall x \in (x_0-R, x_0+R)$ και εξετάζαμε $\{x_0-R, x_0+R\}$

Συναρτήσεις.

πεδίο ορισμού, σύνολο τιμών, 1-1, επί,
όριο συνάρτησης σε σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$, αλλά και $\{-\infty, +\infty\}$
συνέχεια και παραγωγισιμότητα (κυρίως πρώτη και δεύτερη παράγωγος)
+ μελέτη συνάρτησης (εικόνα της συμπεριφοράς).
+ εύρεση ελαχίστου + μεγίστου + ριζών

Σημαντικό Θεώρημα

- Ενδιάμεσης τιμής

(ύπαρξη ελαχ. & μεγ. τιμής)

$f: \underbrace{[a, b]}_{\text{παραγ.}} \to \mathbb{R}$, $f([a,b]) = [m, M]$ είναι διάστημα.

$m < y < M$, τότε $\exists x \in [a,b]: f(x) = y$

$y = 0 \to$ ύπαρξη ρίζας.

Κανόνες παραγώγισης

$$(f+g)' = f' + g'$$

$$(\lambda f)' = \lambda \cdot f'$$

$$(f \cdot g)' = f' g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' g - f \cdot g'}{g^2}.$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

Παρατ.

Η έννοιες όριο, συνέχεια, παράγωγος είναι ΤΟΠΙΚΕΣ (σημείο, σημείο).

Παράδειγμα ερώτησης πολλαπλής επιλογής.

1 Δίνεται μια ακολουθία $(a_n)_{n\geq 1}$ θετικών όρων και έστω $S = \sum_{n\geq 1} a_n$. Τότε.

(A) $S \in \mathbb{R}$ ✗ $(a_n = 1)$ ↳ $\sum_{n\geq 1} 1 = +\infty$

(B) $S = 5 \Rightarrow a_n \to 0$ ✓

$(\mathbb{R} = (-\infty, +\infty))$

(Γ) $a_n \to 0 \Rightarrow S \in \mathbb{R}$ ✗ ↳ π.χ. $\left(\frac{1}{n}\right)$.

$\frac{1}{n} \to 0$, αλλά $\sum \frac{1}{n} = +\infty$.

(Δ) $S = +\infty$ ✗

π.χ. $\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \pi^2/6$. (δεν είναι $+\infty$).

16

2 Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$. ($\exists f'(x), \forall x \in \mathbb{R}$)

Τότε;

(A) η f είναι συνεχής ✓

(B) υπάρχει και η f'' ✗

(Γ) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$ ✓

(Δ) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{h} = f'(x)$ ✗

$$\frac{2h}{h} \to 2f'(x)$$