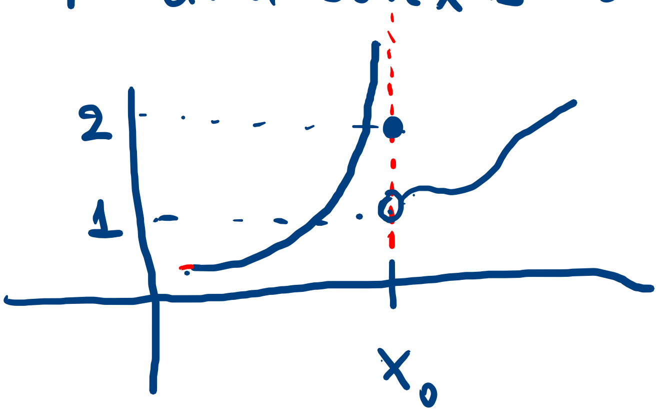
Διάλεξη 7

<u>Πρόταση</u>: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ που είναι και σ.σ. του A. Τότε

f είναι συνεχής στο $x_0 \iff \exists \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

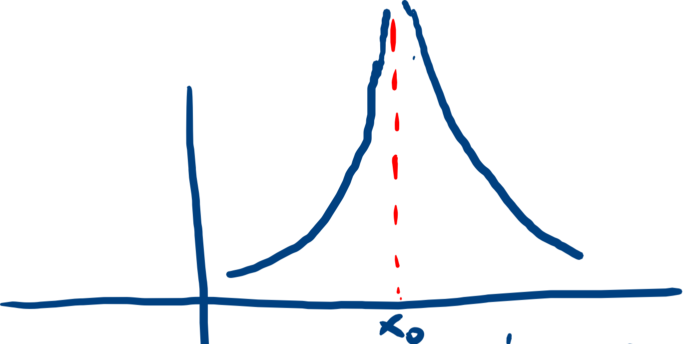


$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$

$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = 1$

$\Rightarrow$ και επιπλέον $f(x_0) = 2$ (ορίζεται σε αυτό).



Υποθέτουμε ότι δεν ορίζεται η f στο x_0.

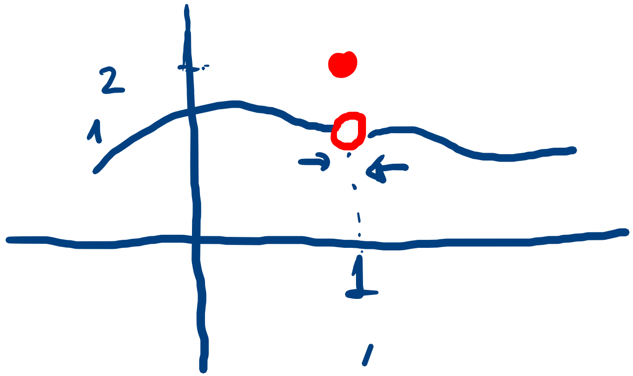
$\Downarrow$

δεν υπάρχει νόημα να εξετάσουμε τη συνέχεια της f, αφού δεν ορίζεται.

όμως $\lim_{x \to x_0} f(x)$

Το x_0 είναι σ.σ. του πεδίου ορισμού της f, άρα έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου.

Εδώ $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \underline{+\infty}$.



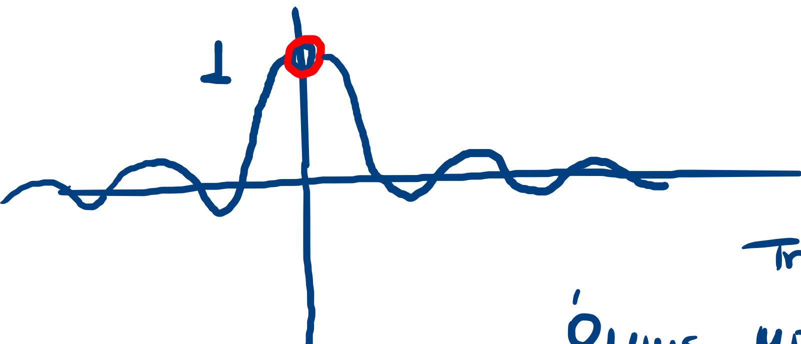
εδώ $\exists \lim\limits_{x \to 1} f(x) = 1$

όμως $f(1) = 2 \neq \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

Άρα η f δεν είναι συνεχής στο 1..

Παράδειγμα

Έστω η $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $x \neq 0$.



κατ' αρχήν το $0 \notin$ πεδίο ορισμού της συνάρτησης, άρα δε μιλάμε για συνέχεια της f στο 0.

Όμως μπορεί ν.δ.ο. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Παράδειγμα

$f(x) = \sin\frac{1}{x}$, $x \neq 0$.

- Είναι η f συνεχής στο 0 ?

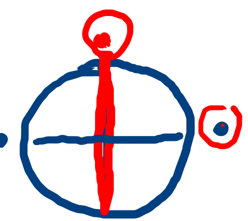
— Δεν έχει νόημα, διότι δεν ορίζεται στο 0.

- Υπάρχει το $\lim_{x\to 0} f(x)$?

Σύμφωνα με την αρχή της μεταφοράς για τα όρια, αν $\exists$, θα πρέπει για 2 οποιεσδ. ακολουθίες (x_n) και (y_n), με $x_n \to 0$, $y_n \to 0$, $x_n, y_n \neq 0$ να έχουμε $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n)$.

Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει το όριο.

Παίρνουμε $x_n = \frac{1}{2n\pi}$, $\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{4\pi}, \dots$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$.



Παρατηρούμε ότι.

$x_n \longrightarrow 0$, $y_n \longrightarrow 0$ και

$$\left.\begin{array}{l} f(x_n) = \sin(2n\pi) = 0 \longrightarrow 0, \text{ ενώ.} \\ f(y_n) = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \longrightarrow 1 \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

$$\nexists \lim_{x \to 0} f(x).$$

Παράδειγμα

Να δείξετε ότι η $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$, τείνει στο $+\infty$, όταν το x τείνει στο 0

Θέλουμε δηλ. ν.δ.ο. $\exists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

Απόδ.

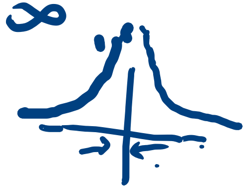
Έστω $M > 0$. Πρέπει να βρούμε κατάλληλο $\delta > 0$:

αν $0 < |x - 0| < \delta \Longrightarrow f(x) > M$.

$$\frac{1}{x^2} > M \iff x^2 < \frac{1}{M} \iff |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Έστω $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$, τότε από την παραπάνω σχέση έχουμε αν x: $0<|x|<\delta=\frac{1}{\sqrt{M}}$, τότε $f(x) > M$.

άρα δείξαμε ότι $\lim_{x\to 0} \underset{\frac{1}{x^2}}{\underset{\parallel}{f(x)}} = +\infty$



Παράδειγμα

Να εξεταστεί αν υπάρχει το $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$

π.χ. παίρνουμε $x_n = \frac{1}{n}$, $x_n \to 0^+$

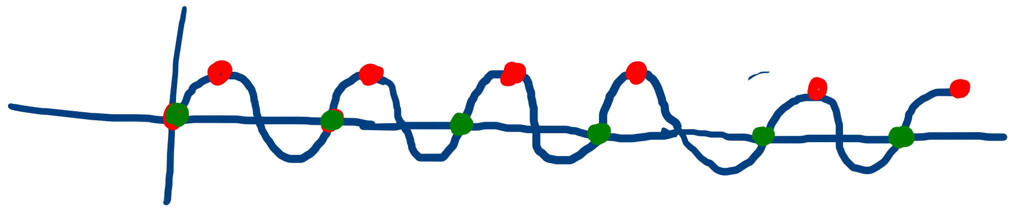
και $y_n = -\frac{1}{n}$, $y_n \to 0^-$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_n) = n \to +\infty, \\ f(y_n) = -n \to -\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim$$

7

Παράδειγμα: Να εξεταστεί αν υπάρχει το

$$\lim_{x\to+\infty} \sin x$$



$$x_n = 2n\pi \,, \quad n \geq 0.$$

$$y_n = 2n\pi + \frac{\pi}{2} \,, \quad n \geq 0.$$

Έχουμε

$$\sin x_n = \sin 2n\pi = 0 \longrightarrow 0$$

$$\sin y_n = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \longrightarrow 1$$

άρα $\nexists \lim_{x\to+\infty} \sin x$.

Ορσ: Έστω $f : A \to \mathbb{R}$ και x_0 ένα σ.σ. του A με $x_0 \in A$.

Θα λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, αν $\exists \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ και γράφουμε

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \mathbb{R}}$$

Επίσης το γράφουμε και ως εξής.

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}}.$$

(Υπάρχει και άλλη έκφραση $f'(x_0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ όταν υπάρχει μπορούμε να το υπολογίσουμε και έτσι.)

Πρόταση

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $x_0 \in A$, τότε είναι και συνεχής στο x_0.

Άρα παραγωγίσιμη $\Longrightarrow$ συνεχής,
ενώ συνεχής $\not\Longrightarrow$ παραγωγίσιμη.

Παρατήρηση.

Ορίζονται ανάλογα και πλευρικές παράγωγοι, πλευρική συνέχεια κτ.λ.

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

και έχουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη (10)

$\Longleftrightarrow$ $\exists\ f'_{+}(x_0)$ και $f'_{-}(x_0)$ και

$$f'_{+}(x_0) = f'_{-}(x_0).$$

Κανόνες Παραγώγισης

Όταν f, g παραγωγίσιμες στο x_0, τότε

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

$$(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) g(x_0) + f(x_0) g'(x_0)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) g(x_0) - f(x_0) g'(x_0)}{g^2(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0$$

$\boxed{\text{Παραδείγματα}}$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$

Γενικά $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$

$$(\sin x)' = \cos x$$

$$(\cos x)' = -\sin x$$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot x - x' \sin x}{x^2} = \frac{\cos x \cdot x - \sin x}{x^2}.$$

$$\tan x' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = \underline{e^{x \cdot \log a}} \qquad \left(a = e^{\log a}\right)$$

$\hookrightarrow \underline{a>0}$

Παράγωγος σύνθεσης 2 συναρτήσεων $(\log \equiv \ln)$

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'$$

$$e^{x \log a} = g \circ f \text{ , όπου } f(x) = x \cdot \log a \text{ , } g(x) = e^x$$

$$\left(e^{x \log a}\right)' = e^{x \log a} \cdot \log a \Rightarrow$$

$$(a^x)' = (\log a) \cdot a^x$$

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Μελέτη Συνάρτησης

Ορσ: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $f : [x_0, +\infty) \to \mathbb{R}$.

Μια <u>ευθεία</u> $\varepsilon(x) = \alpha x + \beta$ λέγεται <u>ασύμπτωτη της f στο $+\infty$</u>, αν υπάρχει $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha \in \mathbb{R}$ και $\exists \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \alpha x) = \beta \in \mathbb{R}$.

- Αν $\alpha = 0$, η $\varepsilon(x)$ λέγεται <u>οριζόντια ασύμπτωτη</u>
- Αν $\alpha \neq 0$, η $\varepsilon(x) = \alpha x + \beta$ λέγεται <u>πλάγια ασύμπτωτη</u>. Παρόμοια ορίζεται και <u>ασύμπτωτη στο $-\infty$</u>, αν $f : (-\infty, x_0]$

<u>Ορσ</u>: Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και
$f : (\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta) \longrightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση.
Λέμε ότι η κατακόρυφη ευθεία $x = x_0$
είναι <u>ασύμπτωτη της f στο x_0</u>, αν
υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$ ή
αν $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$.

- Για τη μελέτη συνάρτησης, κάνουμε τα εξής βήματα:

15

B1 Προσδιορίζουμε το μέγιστο δυνατό πεδίο ορισμού.

B2 Λύνουμε την εξίσωση $f(x)=0$ και προσδιορίζουμε το πρόσημο της f μεταξύ των ριζών.

B3 Αν $\exists$ η f', επαναλαμβάνουμε το B2 για την f'

B4 Αν $\exists$ η f'', επαναλ. το B2 για την f''

B5 Βρίσκουμε τί τιμές παίρνει η f στις ρίζες της f' (στάσιμα σημεία, π.χ ακρότατα) και τις ρίζες της f'' (σημεία καμπής).

B6 Εξετάζουμε αν υπάρχουν ασύμπτωτες

B7 Φτιάχνουμε πίνακα με περίληψη όλων των παραπάνω

B8 Κάνουμε γραφική παράσταση

Παράδειγμα 1

Να μελετηθεί η $f(x) = (x-1)(x+2)^2$

B1 <u>πεδίο ορισμού</u> : όλο το $\mathbb{R}$ ($\not\exists$ περιορισμός)

B2 Ρίζες της $f(x)$, $f(x)=0 \Leftrightarrow \boxed{x=1}$ ή $\boxed{x=-2}$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

B3 $$f'(x) = (x+2)^2 + 2(x-1)(x+2)$$
$$= (x+2)\left[x+\cancel{2}+2x-\cancel{2}\right]$$
$$= 3x(x+2)$$

$f'(x) = 0 \iff x = -2$ ή $x = 0$

και $f'(x) = 3\underset{\downarrow \atop 0}{x}\,\underset{\downarrow \atop -2}{(x+2)}$.

x		-2		0	
	$+$		$-$		$+$

Άρα $f'(x) < 0 \iff -2 < x < 0$.

B4 $f''(x) = 3(x+2) + 3x = 6x + 6$

$= 6(x+1)$, $f''(x) = 0 \iff x = -1$.

$f''(x) > 0 \iff x > -1$

B5

- $f(-2) = 0$ (ήταν ήδη ρίζα της f)
- $f(-1) = -2$
- $f(0) = -4$

(B6)

Εξέταση ασυμπτώτων

Η f ορίζεται σε όλο το IR, άρα δεν υπάρχουν κατακόρυφες ασύμπτωτοι.

Τι γίνεται για $x \to \pm\infty$?

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)(x+2)^2}{x}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left(1-\frac{1}{x}\right)(x+2)^2 = 1\cdot(+\infty) = \underline{+\infty}$$

$\underline{\text{Συμπέρασμα}}$: δεν υπάρχουν ούτε πλάγιες / οριζόντιες ασύμπτωτες

<u>Del'hospital</u>.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$, όταν $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ βγάλει απροσδιοριστία.

		-2		-1		0		1	
f	$-$	0	$-$		$-$		$-$	0	$+$
f'	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$
f''	$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$

ρίζα

τοπ. μεγ.

σ.κ.
(σημείο καμπής).

τοπ. ελαχ.

ρίζα

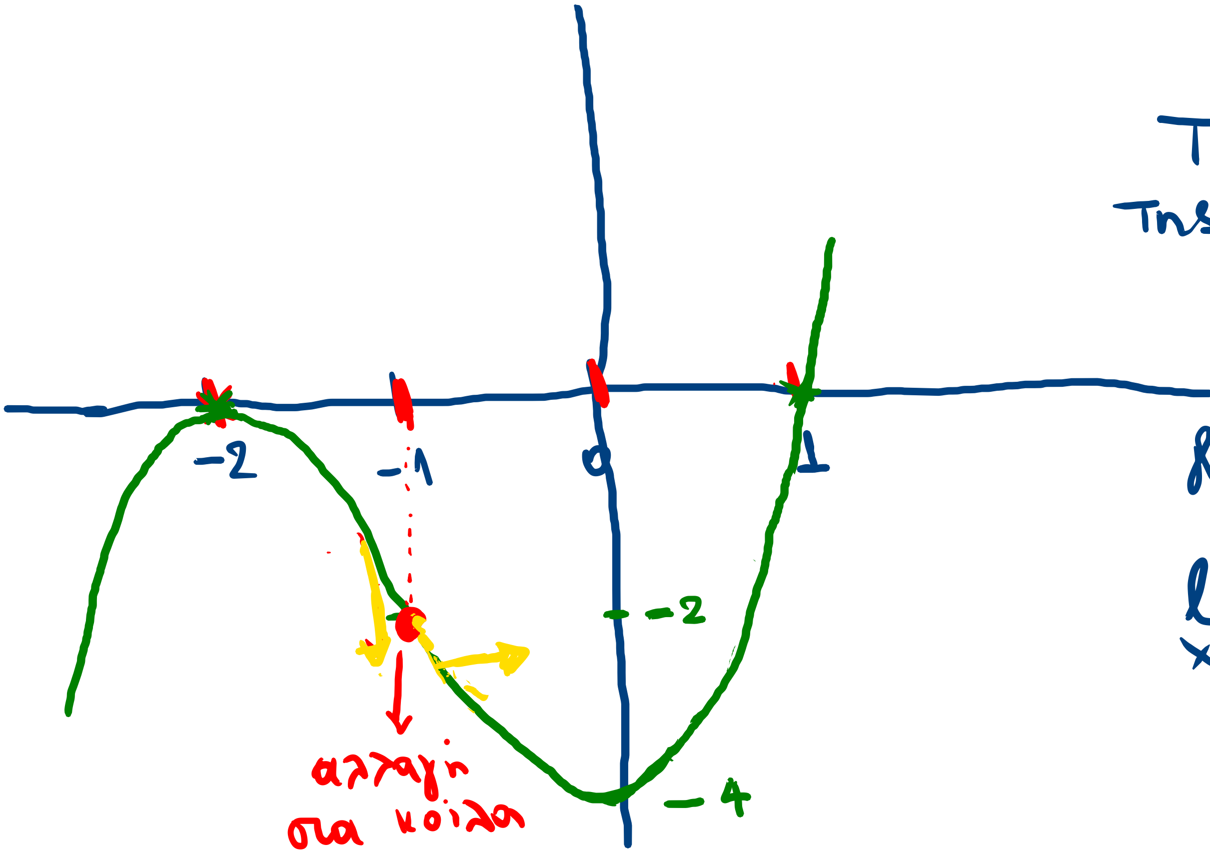
Θυμίζω.

$f''(x)>0 \rightarrow$ έχουμε τα κοίλα προς τα πάνω (κυρτότητα).

$f''(x)<0 \rightarrow$ έχουμε τα κοίλα προς τα κάτω (κοιλότητα)

σημείο καμπής $\rightarrow$ σημείο που αλλάζει τα κοίλα η συνάρτηση

8 Προσέγγιση (σκαρίφημα) της γραφικής παράστασης της f.



<u>Παρατήρηση</u>

Το σύνολο τιμών της f είναι όλο το IR, εφ' όσον είναι συνεχής & $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$