Διάλεξη 5

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \longrightarrow$$ δυναμοσειρά με κέντρο το x_0.

$$R = \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| , \quad R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Παραδείγματα

① Έστω η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$

$a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{2}$, ..., $a_n = \frac{1}{n}$, ... $x_0 = 0$

Η ακτίνα σύγκλισης είναι

$$R = \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_n \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_n \frac{n+1}{n} = 1$$

$$\frac{n+1}{n} = 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}$$

δηλ. $\forall x \in (-1, 1)$, η δυναμοσειρά συγκλίνει $\left(\underset{0}{x_0} - \underset{1}{R},\ \underset{0}{x_0} + \underset{1}{R}\right)$

Εξετάζουμε ξεχωριστά αν συγκλίνει στα άκρα του διαστήματος, εδώ $\{-1, 1\}$.

- για $x = 1$.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} x^n \overset{x=1}{=} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} = +\infty \quad \text{(δε συγκλίνει)}$$

αρμονική σειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n}\right)^p$, για $p=1$ (δε συγκλίνει).

- για $x = -1$.

Τότε $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}(-1)^n$, είναι εναλλάσσουσα, και συγκλίνει αφού $\frac{1}{n} \searrow 0$.

Άρα συμπεραίνουμε ότι το διάστημα σύγκλισης είναι το $[-1, 1)$.

2 Εξετάζουμε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$?

Έχουμε $a_n = \frac{2^n}{n^2}$. Εφαρμόζουμε το κριτήριο

$$R = \frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^2}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2^n} / \sqrt[n]{n^2}} = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

Συγκλίνει $\forall\, x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Στα άκρα: $x = -\frac{1}{2}$ ή $x = \frac{1}{2}$.

για $x = \frac{1}{2}$, $\sum_{n \geq 1} \frac{\cancel{2^n}}{n^2} \cdot \cancel{\left(\frac{1}{2}\right)^n} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} < +\infty$ $(p = 2)$.

•

για $x = -\frac{1}{2}$

$\downarrow$

$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \cdot \frac{1}{n^2}$ θα συγκλίνει.

$\searrow 0$

Τελικά το διάστημα σύγκλισης είναι το

$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

3 Η δυναμοσειρά $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} x^n$ συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$.

$$R = \lim_n \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_n \left|\frac{\frac{2^n}{n!}}{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}\right| = \lim_n \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{2^n}{2^{n+1}}$$

$$= \lim_n \frac{n+1}{2} = +\infty$$

. Τελικά συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$.

4 Αναζητούμε το διάστημα σύγκλισης της $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x+1)^n}{2^n}$

• Παρατηρούμε ότι είναι της μορφής.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-x_0)^n$$

εδώ $x_0 = -1 \longrightarrow$ το διάστημα.

$(-1-R, -1+R)$
? ?

Θέτοντας: $t = x+1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} t^n$$

$R = \lim_n \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_n \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = 2$ συγκλίνει για $|t| < 2$

• για $t = 2$

$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \longrightarrow$ αποκλίνει $\longrightarrow$ διότι $(-1)^n \not\to 0$

• για $t=-2$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}(-2)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(-1)(-2)}{2}\right]^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 = +\infty$$

Τελικά συγκλίνει $\forall\, t \in (-2,2) \Rightarrow$

η αρχική συγκλίνει $\forall\, x \in (-3,1)$

Παραγώγιση και Ολοκλήρωση Δυναμοσειρών

Οι δυναμοσειρές στο διάστημα σύγκλισής τους παραγωγίζονται & ολοκληρώνονται όρο προς όρο (σαν να είχαμε πεπερασμένα αθροίσματα).

$\boxed{\text{Θεώρημα}}$

Έστω $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n$,

με $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ όπου R, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς.

Τότε

(i) η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη $\forall x \in (x_0 - R, x_0 + R)$

και $f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n\right)'$ $\quad$ $\left((f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).\right)$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a_n (x - x_0)^n\right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}$$

(ii) η $f(x)$ είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του (x_0-R, x_0+R) και

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n\right)dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\alpha^\beta a_n(x-x_0)^n\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}\right]_\alpha^\beta =$$

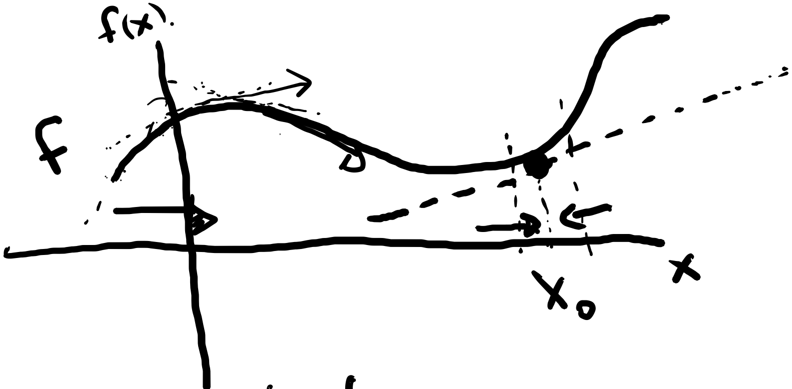
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\left[(\beta-x_0)^{n+1}-(\alpha-x_0)^{n+1}\right]$$

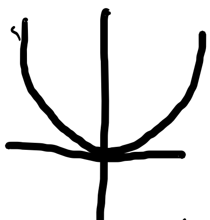
Παραγώγιση

$$(x^n)' = n\,x^{n-1}$$

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης της f πάνω στο σημείο $(x_0, f(x_0))$



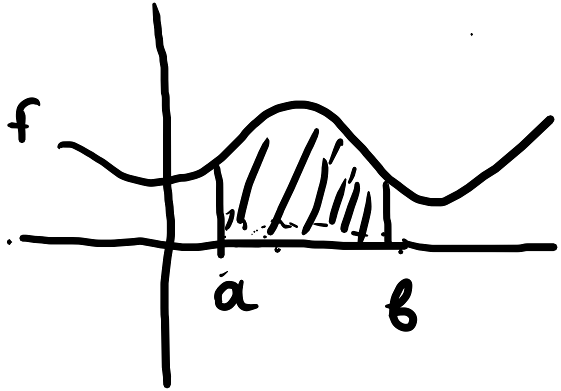


x^2

$$(x^2)' = 2x$$

$$\left((x-1)^2\right)' = 2(x-1)$$

$$\left[(x-x_0)^n\right]' = n(x-x_0)^{n-1}$$



$f(x) \geq 0.$

$$\int_{a}^{\beta} f(x)\,dx$$

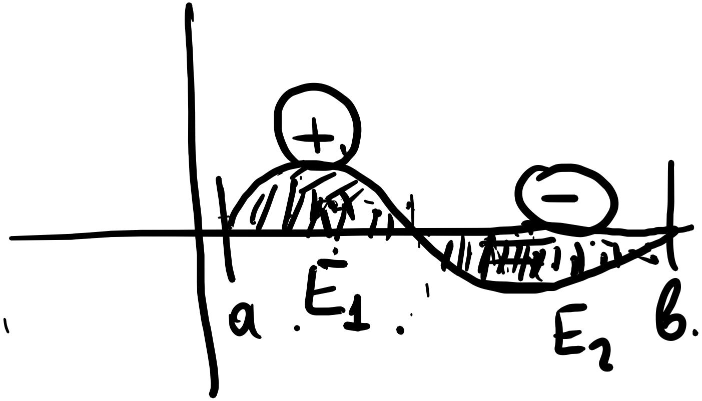
→ εμβαδον κάτω από την καμπυλη της f (για $y \geq 0$) απο τα α μεχρι το β.

$$\int_{a}^{\beta} x^{n}\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{a}^{\beta} = \frac{\beta^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

$$\int_{a}^{\beta} (x-x_0)^{n}\,dx = \left[\frac{(x-x_0)^{n+1}}{n+1}\right]_{a}^{\beta} = \frac{(\beta-x_0)^{n+1}}{n+1} - \frac{(a-x_0)^{n+1}}{n+1}.$$

Η παραγώγιση + ολοκλήρ. είναι αντίστροφες διαδικ-

$$\int_{a}^{\beta} f'(x)\,dx = [f(x)]_{a}^{\beta} = f(\beta) - f(a)$$



$$\int_a^b f(x)\,dx = E_1 - E_2$$

προσημασμένο εμβαδόν.

Παράδειγμα

Έστω $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Από αυτήν βρίσκουμε $f'(x)$?

~~ø~~ Κατ' αρχήν έχουμε βρεί ότι συγκλίνει η f

$\forall x \in [-1, 1)$ $[R=1]$.

Άρα ορίζεται $\forall x \in (-1, 1)$ και.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$\underset{x_0=0.}{\overset{\text{εδώ}}{=}} \sum_{n=1.}^{+\infty} n \cdot \frac{1}{n} \cdot (x^n)' = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad (1+x+x^2+\dots) \quad , \forall x \in (-1,1).$$

και μάλιστα αποκλίνει στα άκρα.

Επιπλέον, από τη σχέση $f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} x^n$ μπορούμε να βρούμε και συνάρτηση μέσω ολοκλήρωσης ...

$$\left[k = n-1, \quad n=1 \to k=0 \qquad \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right]$$

Συναρτήσεις (συνέχεια)

ορισμός συνάρτησης, "1-1", επί

Ορσ.

Για μια συνάρτηση $f: A \to B$ που είναι "1-1" + επί, τότε ορίζουμε ως αντίστροφη της f και τη συμβολίζουμε f^{-1} τη συνάρτηση $f^{-1}: B \longrightarrow A$ που επιστρέφει τα $y=f(x) \in B$ στο αντίστοιχο $x \in A$.

π.χ.

$\underline{y = x^3}$, $y = f(x)$ με

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Τότε.

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$$

είναι "$\underline{1-1}$". και $\underline{\text{επί}}$

$$y = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y} \text{ ή } y^{\frac{1}{3}}.$$

$\underline{\text{ακόμα}}$..

αν $f(x) = x^2$ $f : \underbrace{[0, +\infty)}_{} \longrightarrow [0, +\infty)$.

$$y = x^2 \iff x = \sqrt{y}$$

$$f^{-1}(y) = \sqrt{y}.$$

$$\sqrt[3]{-8} = -2.$$

$$(-2)^3 = -8 \checkmark$$

Σύνθεση συναρτήσεων

Έστω $f : A \to B$

$g : B \to C$

όπου $A, B, C \neq \emptyset$. Τότε μπορούμε να ορίσουμε τη σύνθεση $g \circ f : A \to C$ ως εξής.

$$g \circ f(x) = g(f(x)), \ \forall x \in A.$$

$$\underset{A}{\underset{\Uparrow}{x}} \longmapsto \underset{B}{\underset{\Cap}{f(x)}} \longmapsto g(f(x)).$$

Απαραίτητο προϋπόθ. $f(A) \subset B$ (γενικά).

π.χ.

$\cos(x^3)$, e^{x^2}

$f(x) = x^3$, $g(y) = \cos y$.

$g \circ f(x) = \cos x^3$

$f(x) = x^2$

$g(y) = e^y$.

$g \circ f(x) = e^{x^2}$.

$f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_1$ . . .

Σχόλια.

Αν $f : A \longrightarrow B$ που είναι "1-1" και επί, τότε είπαμε ότι υπάρχει

$f^{-1} : B \longrightarrow A$ και παρατηρούμε.

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

Άρα $f^{-1} \circ f = 1d_A$ ($1d \rightarrow$ 1dentity function.).

$f^{-1} \circ f : A \longrightarrow A$ $[\, f^{-1} \circ f(x) = x \,]$

$1d(x) = x$

Παρόμοια.

$f \circ f^{-1} : B \longrightarrow B$ $[\, f \circ f^{-1}(y) = y \,]$.

$f \circ f^{-1} = 1d_B$.

$$\boxed{y = f(x) \Longleftrightarrow x = f^{-1}(y)}$$

$$y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) \iff f(x) = f(f^{-1}(y)).$$

$$\underline{x} = f^{-1}(y) = (f^{-1} \circ f)(x) \iff y = f(x) = (f \circ f^{-1})(y).$$

$$x = \mathrm{Id}(x) = (f^{-1} \circ f)(x)$$

$$y = \mathrm{Id}(y) = (f \circ f^{-1})(y)$$

Σχόλιο

Έστω η συνάρτηση $f : A \longrightarrow B$

Θεωρούμε την εξίσωση

$$f(x) = y$$, με άγνωστο $x \in A$

και παράμετρο το $y \in B$.

Τότε:

(1) Η εξίσωση $f(x) = y$ έχει λύση για κάθε τιμή της παραμέτρου $y \in B \iff f$ είναι επί

[ύπαρξη λύσης της εξίσωσης $f(x) = y$]

(2) Αν επιπλέον η f είναι <u>1-1</u> τότε η λύση είναι <u>μοναδική</u>,

Η λύση τότε θα δίνεται από τη σχέση $x = f^{-1}(y)$.

Παραδειγμα

Εστω $A = [0,1]$, $B = [a,b]$ με $a<b$ και $f : A \longrightarrow B$ με

$$f(x) = a + (b-a)\cdot x \quad \forall x \in A.$$

Ν.δ.ο. η f είναι "1-1" + επί και να υπολογίσετε την f^{-1}.

Λύση. "1-1"

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \quad (\Longleftrightarrow)$$

$$\boxed{f(x_1) = f(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2}$$

έστω

$$\cancel{a} + (\underbrace{b-a}_{>0})x_1 = \cancel{a} + (\underbrace{b-a}_{>0})x_2 \Longrightarrow x_1 = x_2.$$

και έχουμε είναι "1-1".

Για να δείξουμε ότι είναι επί

Έστω y με $a \leq y \leq b$

και πρέπει ν.δ.ο. υπάρχει $x \in [0,1]$.

με $f(x) = y$.

Έστω $f(x) = a + (b-a)x$.

θέλουμε $y = a + (b-a)x \iff$

$$\boxed{\frac{y-a}{b-a} = x}$$

Είχαμε. $a \leq y \leq b \implies$.

$0 \leq \frac{y-a}{b-a} \leq 1$. άρα τελικά $x \in [0,1]$.

και καταλήγουμε ότι είναι $\underline{\underline{\text{επί}}}$..

Άρα η $f: [0,1] \longrightarrow [a,b]$ είναι "1-1" + επί

με αντίστροφη $f^{-1}: [a,b] \longrightarrow [0,1]$ $f^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$

Παράδ.

Έστω $f: [0,1] \longrightarrow [0,1]$:

με $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$.

Ν.δ.ο. η f είναι "1-1" και επί και να βρείτε την f^{-1}.

Λύση.

Έστω η εξίσωση.

$f(x) = y$ με $y \in [0,1]$

+ λύνουμε ως προς x.

$\dfrac{1-x}{1+x} = y \Leftrightarrow 1-x = y + xy \Leftrightarrow$

$x(y+1) = 1-y \Leftrightarrow x = \dfrac{1-y}{1+y}$

$$X = \frac{1-y}{1+y} \qquad (y \in [0,1])$$

$\Downarrow$

$\in [0,1]$?

$$0 \le \frac{1-y}{1+y} \le 1 \; ?$$

και να επαληθεύσουμε αυτές τις ανισότητες.

$$\frac{1-y}{1+y} \ge 0 \; \checkmark$$

διότι $y \le 1 \Rightarrow 1-y \ge 0$.

$1+y \ge 0$.

$1+y > 0$.

$$\frac{1-y}{1+y} \le 1 \iff 1-y \le 1+y$$

δηλ. $2y \ge 0$

$y \ge 0$ ✓

Τελικά το $x = \frac{1-y}{1+y} \in [0,1]$.

Ταυτόχρονα είναι "1-1" + "επί", διότι η λύση ήταν μοναδική.

Συμπεραίνουμε ότι $f = f^{-1}$

αφού $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ και

$$f^{-1}(y) = \frac{1-y}{1+y}$$

Ορσ.