Διάλεξη 3

__Ορσ__ : Έστω (a_n) μία πραγμ. ακολουθία.

(i) Αν $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$, τότε η (a_n) θα λέγεται __συγκλίνουσα__ (για κάποιο a).

Αν $a_n \to 0$, τότε η ακολουθία λέγεται __μηδενική__

(ii) Η ακολουθία (a_n) λέγεται __αποκλίνουσα__, αν $\nexists\, a \in \mathbb{R} : a_n \to a$.

Πρόταση (μοναδικότητα του ορίου) 2

Αν $a_n \longrightarrow a$, για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, τότε αυτό είναι μοναδικό!

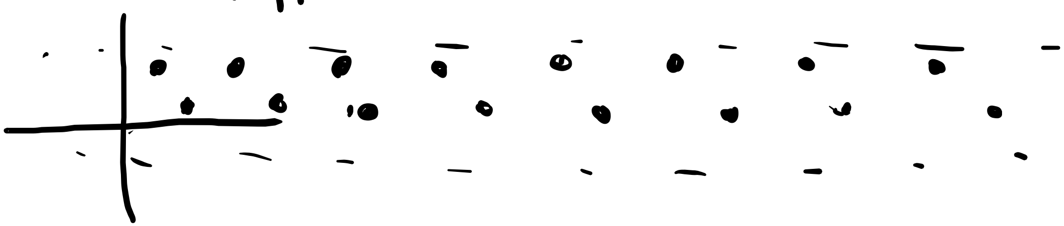
δηλ. αν $a_n \longrightarrow a$ και $a_n \longrightarrow b \Rightarrow a = b$.

Πρόταση (συγκλίνουσα $\Longrightarrow$ φραγμένη)

Κάθε συγκλίνουσα ακολουθία θα είναι φραγμένη.

(συγκεντρώνονται τελικά οι όροι σε κάποιο διάστημα ενός $a \in \mathbb{R}$ και οι υπόλοιποι είναι πεπερασμένοι το πλήθος)

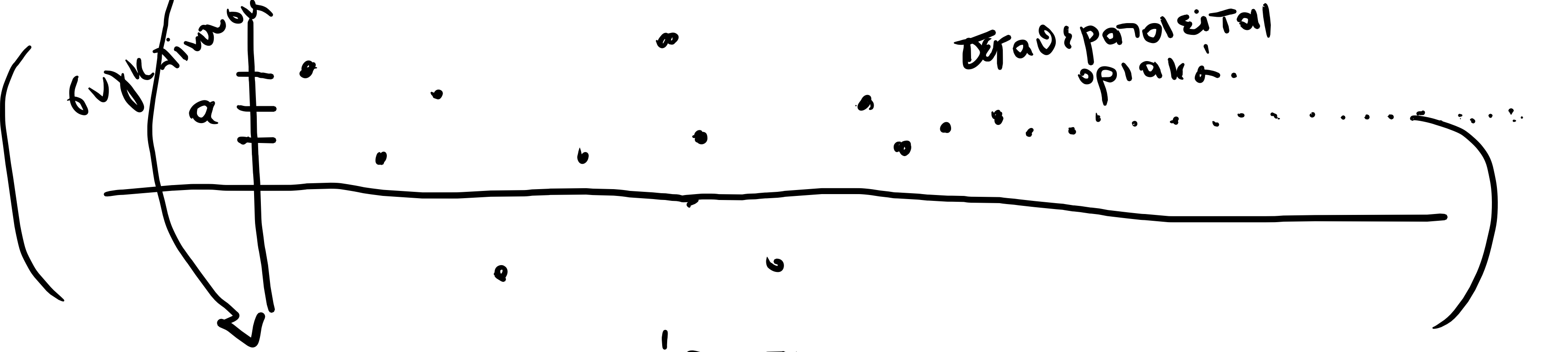
$\not\Longleftarrow$ (φραγμένη $\not\Longrightarrow$ συγκλίνουσα)



→ φραγμένη όχι συγκλίνουσα.

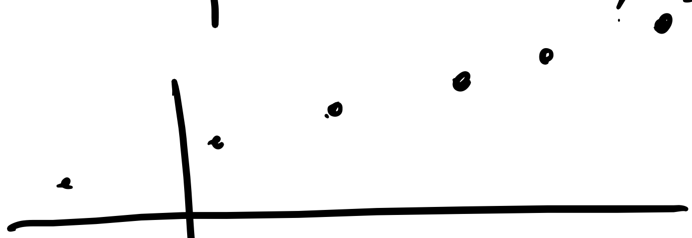
Πρόταση

Κάθε μονότονη + φραγμένη είναι συγκλίνουσα



μονότονη → αύξουσα / → φθίνουσα + φραγμένη ⇒ συγκλίνουσα.

Αν είναι μονότονη $\not\Rightarrow$ συγκλίνει

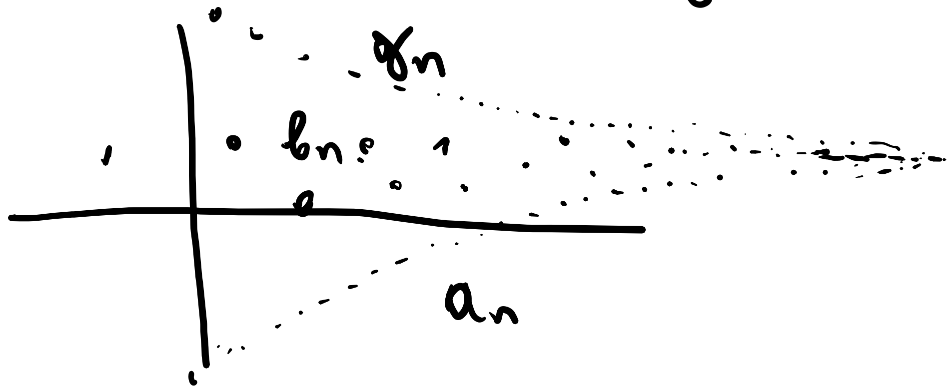


$\longrightarrow +\infty$.

$\boxed{\text{Πρόταση}}$ $\boxed{\text{Ισοσυγκλίνουσες ακολουθίες}}$

Αν έχουμε $\underset{\sim}{a_n} \leq \underset{\sim}{b_n} \leq \underset{\sim}{\gamma_n}$ (sandwich)

Αν $a_n \longrightarrow x$ και $\gamma_n \longrightarrow x \Longrightarrow b_n \longrightarrow x$



Πρόταση (Διατήρηση ανισοτήτων)

αν $a_n \le b_n$, $\forall n$ και

$a_n \to a$ και $b_n \to b$ τότε $\underline{a \le b}$

Πρόταση

$\lim(\lambda a_n) = \lambda \lim a_n$

$(\lambda \cdot a_n)$ συγκλ. και

Αν $\left.\begin{array}{l} a_n \to a \\ b_n \to b \end{array}\right\} \Longrightarrow$ $\lambda \cdot a_n \to \lambda \cdot a$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$a_n \cdot b_n \to a \cdot b$

Αν επιπλέον $b_n \neq 0$ και $b \neq 0$

$\lim_n (a_n b_n) = (\lim a_n) \cdot (\lim b_n)$

Τότε $\dfrac{a_n}{b_n} \to \dfrac{a}{b}$. $\lim_n \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$.

Πρόταση

Αν $a_n \to a$, τότε:

$\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$ ή $|a_n| \to |a|$ ή $a_n^2 \to a^2$.

(αργότερα όταν θα έχουμε f συνεχής
$f(a_n) \to f(a)$)
→ αρχή της μεταφοράς.

Ιδιαιτέρως $a_n \to 0 \iff |a_n| \to 0$.

[$a_n \to 0 \iff \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - 0| < \varepsilon$, $\forall n \geq n_0$]

Πρόταση

Αν $a_n \to a$, τότε και οποιαδήποτε.

$b_n = a_{n+k} \to a$ για οποιοδ. $k \geq 1$.

$a_{n+1} \to a$, $a_{n+2} \to a$, ... $a_{n+1.000.000} \to a$.

Η σύγκλιση έχει να κάνει με την τελική συμπεριφορά της ακολουθίας, και μπορούμε να αγνοήσουμε οποιοδήποτε αρχικό της τμήμα.

$a_1, a_2, \ldots, a_k$.

$$a_n \to a \iff a_{n+k} \to a$$

Πρόταση (μηδενική × φραγμένη ⇒ μηδενική)

Έστω $a_n \to 0$ και (b_n) φραγμένη.

Τότε $a_n b_n \to 0$

Προσοχή

Αυτό δεν ισχύει για $a \neq 0$,

$a_n \to a$ και (b_n) φραγμένη $\not\Rightarrow$ $a_n b_n \to a$

$a_n = 1 \longrightarrow 1 \quad n\to\infty \quad (a=1)$

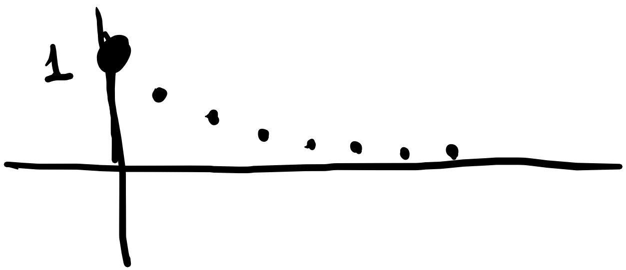
$b_n = (-1)^n$ φραγμένη

$a_n b_n = (-1)^n$ δε συγκλίνει.

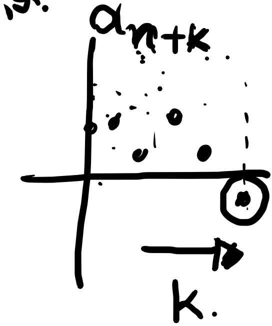
Παραδείγματα

1. Αν $0<\theta<1$, $a_n = \theta^n \longrightarrow$ γεωμετρική ακολουθία.

τότε $a_n \longrightarrow 0$.



αn.



διαφορά φάσης (μετατόπιση)

Ενδεικτική απόδειξη

ανισότητα του Bernoulli. $\forall \alpha > 0$

Ισχύει ότι $(1+\alpha)^n \geq 1 + n\alpha$

(άσκηση επαγωγικά).

$0 < \theta < 1 \Longrightarrow \frac{1}{\theta} > 1 \Longrightarrow \frac{1}{\theta} = 1 + \alpha$, $\alpha > 0$ κάτι θετικό.

Άρα. $\left(\frac{1}{\theta}\right)^n = (1+\alpha)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n\cdot\alpha > n\alpha \Longrightarrow$

$0 \leq \theta^n \leq \frac{1}{n\alpha} \longrightarrow 0 \overset{\text{sandwich}}{\Longrightarrow} \theta^n \longrightarrow 0.$

10

$$\frac{1}{n\alpha} \xrightarrow{?} 0$$

Είχαμε δείξει ότι $\frac{1}{n} \longrightarrow 0$.

άρα $\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow \frac{1}{\alpha} \cdot 0 = 0$.

2 Αν $0 < \theta < 1$ και

$S_n = 1 + \theta + \dots + \theta^n$ (άθροισμα όροι γεωμετρ. προόδου)

↳ ακολουθία μερικών αθροισμάτων.

Τότε $S_n \longrightarrow \frac{1}{1-\theta}$.

Έχουμε

$$S_n = \frac{1-\theta^{n+1}}{1-\theta}$$

$1 - \theta^{n+1} = (1-\theta)(1+\theta+\dots+\theta^n)$

$$S_n = \frac{1-\theta^{n+1}}{1-\theta}.$$

Δείξαμε $\theta^n \longrightarrow 0 \Longrightarrow \theta^{n+1} \longrightarrow 0.$

$$\left.\begin{array}{l} 1-\theta^{n+1} \longrightarrow 1-0 = 1. \\ 1-\theta \longrightarrow 1-\theta \end{array}\right\} \Longrightarrow.$$

$$\frac{1-\theta^{n+1}}{1-\theta} \longrightarrow \frac{1}{1-\theta}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots \quad (n \longrightarrow \infty)$

3 $\forall a > 0$, $\sqrt[n]{a} \to 1$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$ (n-οστή ρίζα του a)

Είναι ο αριθμός που ικανοποιεί $x^n = a$

$a > 1$, $\sqrt{a} = \sqrt[2]{a} = a^{\frac{1}{2}}$ μικραίνει $\sqrt[3]{a}$ μικραίνει κι άλλο.

$x^2 = 2$. π.χ. $x^3 = 2$

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$. $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2} \sqrt[3]{2} = 2$, ... $\sqrt[n]{a} \downarrow$, $n \uparrow$

Διακρίνουμε περιπτώσεις

(i) $a > 1$. $\sqrt[n]{a} > 1$, $\forall n$.

$\exists (\delta_n) > 0$: $\qquad (\sqrt{a} > 1 \Rightarrow \exists \delta : \sqrt{a} = 1 + \delta)$

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n \quad (1) \quad \forall n. \qquad \left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a\right).$$

$$\Rightarrow a = (1+\delta_n)^n \overset{\text{Bernoulli}}{\geq} 1 + n \cdot \delta_n > n\delta_n$$

$$\Rightarrow 0 \leq \delta_n \leq \frac{a}{n} \to 0. \Rightarrow \delta_n \to 0. \quad (2)$$

Απο την (1).

$$\sqrt[n]{a} = 1 + \delta_n \xrightarrow{(2)} 1 + 0 = 1$$

14

(ii) $a=1$, $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{1}=1\longrightarrow 1.$ ✓

(iii) αν $0<a<1 \Longrightarrow \left(\frac{1}{a}>1\right)$

$\frac{1}{a}>1 \Longrightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{a}} \xrightarrow{\text{(αποδείχθηκε στο (i))}} 1 \Longrightarrow$

$\frac{1}{\sqrt[n]{a}} \longrightarrow \frac{1}{1}=1 \Longrightarrow \sqrt[n]{a}\longrightarrow 1$

(4) $\sqrt[n]{n}\longrightarrow 1.$

<u>Αποδ.</u>

$\forall n>1$, έχουμε $\sqrt[n]{n}>1 \Longrightarrow \exists(\delta_n):$ → επεκτείνει Bernoulli (απαγωγή)

$\sqrt[n]{n}=1+\delta_n \overset{\wedge}{\Longrightarrow} n=(1+\delta_n)^n \geqslant 1+n\delta_n+\frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2$

$$\Rightarrow n > \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2 \Rightarrow$$

$$0 < \delta_n^2 < \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}(n-1)} = \frac{2}{n-1} \longrightarrow 0.$$

$$\Rightarrow \delta_n^2 \longrightarrow 0 \Rightarrow \sqrt{\delta_n^2} = \delta_n \longrightarrow 0.$$

Είχαμε πεί $\sqrt[n]{n} = 1 + \delta_n$ Άρα.

επειδή $\delta_n \longrightarrow 0$, έχουμε $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1 + 0 = 1$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k \, b^{n-k} .$$

↳ διωνυμικός συντελεστής.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

↳ με πόσους τρόπους μπορούμε να επιλέξουμε k στοιχεία από ένα σύνολο n στοιχεία, χωρίς να με ενδιαφέρει η σειρά επιλογής και χωρίς να έχουμε επανάληψη ενός στοιχείου

π.χ. $\{1\,2\,3\}$ → να επιλέξουμε 2. $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,1!} = \frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot 3}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}}$

$\{1\,2\}$ $\{1\,3\}$ $\{2\,3\}$.

17

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = 1 \cdot a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4.$$

$$(a+b)^4 = \underset{1}{(a+b)}\underset{2}{(a+b)}\underset{3}{(a+b)}\underset{4}{(a+b)} - a^k b^{n-k}.$$

$k = 4, 3, 2, 1, 0,$

$$1 \cdot a^4 + \binom{4}{1} a^3 b + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a b^3 + \binom{4}{4} b^4$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

18

Τρίγωνο Pascal

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \longrightarrow (a+b)^0 = 1. \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \longrightarrow a+b. \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \longrightarrow (a+b)^2. \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \longrightarrow (a+b)^3. \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \longrightarrow (a+b)^4. \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1. \longrightarrow (a+b)^5.
\end{array}
$$

$$(1+\delta_n)^n \overset{\text{διων. νεύτ. } n.}{=} 1 + \binom{n}{1} 1^{n-1}\delta_n^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2}\delta_n^2 + \dots$$

$$\geq 1 + n\delta_n + \frac{n(n-1)}{2}\delta_n^2$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{\cancel{(n-2)!}(n-1)n}{\cancel{(n-2)!}\cdot 2}$$

$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (νι-παραγοντικό).

$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$.

$\left((1+a)^n \geq 1 + na \quad , \forall \underline{a > 0} \right)$

$0! = 1 \longrightarrow$ ορίζεται.

$\binom{n}{0} = \frac{\cancel{n!}}{0!\,\cancel{n!}} = 1$.

$\binom{n}{k} = \binom{n}{\underbrace{n-k}}$

$\{1, 2, 3\}$ → $\{1, 2\}$ $\{1\}$
→ $\{1, 3\}$ $\{2\}$
→ $\{2, 3\}$ $\{1\}$

$\binom{3}{2} = \binom{3}{1}$

$\{1\ 2\ 3\}$ → θέλουμε να επιλέξουμε 2 στοιχεία που να μας ενδιαφ. η σειρά χωρίς επανάληψη.

με πόσους τρόπους.

$a_1 \cdot a_2$

? $3 \times 2 = \underline{\underline{6}}$

διατάξεων των n ανά k.

των 3 ανά 2.

$\{1, 2, \ldots, n\}$

τρόπων επιλογής k στοιχείων από n με τη σειρά να με ενδιαφέρει, χωρίς επανάλ

$1 \le k \le n$

$a_1\ a_2 \ldots a_k$

$$n \times (n-1) \cdots \times (n-k+1)$$

$-(k-1)$

14

\# διατάξεων των $\underline{n}$ ανά $\underline{k}$

$$= n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

\# συνδυασμών των n ανά k. ? $\binom{n}{k}$

\# διατάξεων των n ανά k

123 → μετ

$3 \times 2 \times 1 = 3!$

$$= (\#\text{ συνδυασμός των } n \text{ ανά } k) \times k!$$

μετάθεση → ειδική περίπτ. διάταξης των k ανά k.

15

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)\underbrace{(n-k)\cdots 1}}{k!\,(n-k)\cdots 1}$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

$\{1,2,3\}$. $\to$ (3)

$\{1,2\} \xrightarrow{\times 2}$ 12, 21

$\{1,3\} \to$ 13, 31

$\{2,3\} \to$ 23, 32

(5)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e$$ (βάση νεπέριου λογαρίθμου) (16)

$n=1 \longrightarrow 2^1 = 2$

$n=2 \;,\; \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = 2{,}25$

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 > 2{,}25$$

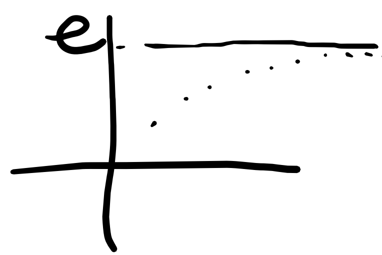
$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \uparrow$ αύξουσα $\rightarrow$

$+$ φραγμένη

$\Longrightarrow$ κάθε αύξουσα $+$ φραγμένη

$\Downarrow$

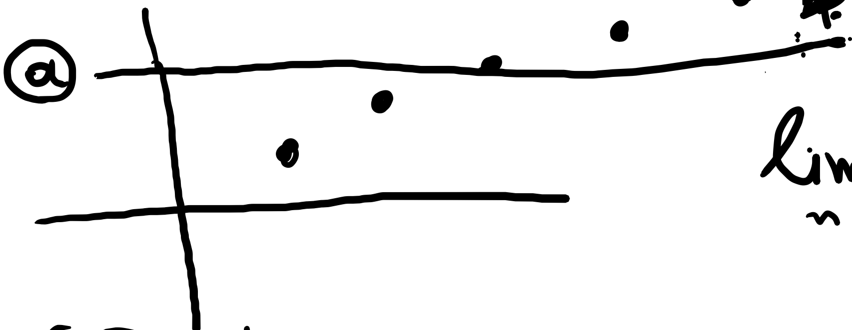
συγκλίνει



Ορσ

(i) Η ακολ. (a_n) τείνει στο $+\infty \iff$

$\forall a > 0 \,,\; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \,,\; a_n > a$



$\lim_n a_n = +\infty$ ή $a_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.

(ii) Η ακολ. (a_n) τείνει στο $-\infty$. $\iff$

$\forall a > 0 \,,\; \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 \,,\; a_n < -a$

Θα γράφουμε $\lim_n a_n = -\infty$ ή $a_n \xrightarrow[(n \to \infty)]{} -\infty$

Σχόλιο

Αν $a_n \to +\infty$ ή $a_n \to -\infty$

αλλά συνήθως λέμε ότι αποκλίνουν ✓

στο $+\infty$ ή στο $-\infty$ αντίστοιχα.

Πρόταση

Αν (a_n) με $a_n > 0$, τότε.

αν $a_n \to +\infty$, τότε $\frac{1}{a_n} \to 0$

Σχόλια • Αν a_n με $a_n > 0$: $a_n \to 0$, τότε

ναι $\frac{1}{a_n} \to +\infty$.

Όμως δεν ισχύει ότι $a_n \to 0 \;\cancel{\Rightarrow}\; \frac{1}{a_n} \to +\infty$

Πρόταση (κριτήριο).

Έστω (a_n) με $a_n > 0$ και ας υποθέσουμε ότι $\exists \lim_n \frac{a_{n+1}}{a_n} = a$

(i) αν $a < 1$, τότε $a_n \longrightarrow 0$

(ii) αν $a > 1$, τότε $a_n \longrightarrow +\infty$

(στην περίπτωση πα $a = 1$ δεν μπορούμε να αποφανθούμε)

Παραδείγματα

1. Να βρεθεί το όριο της (a_n)

με $a_n = \frac{n!}{n^n}$ $\left(\frac{1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n}{\underbrace{n \cdot n \cdots n}_{n-\text{φορές}}} \right.$

Κατ' αρχήν $a_n > 0$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \frac{(n+1)!}{\cancel{n!}}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

$$(n+1)!\ = (n+1)\cdot \cancel{n!}$$

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$

$$= \frac{\cancel{n+1}}{\cancel{n+1}} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$$

, διότι $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \longrightarrow e > 1$.

$\Longrightarrow a_n \longrightarrow 0$ (σύμφωνα με το κριτήριο.)

2 Να υπολογιστεί το όριο της $a_n = \dfrac{\lambda^n}{n^k}$, όπου $\lambda > 1$ και $k \geq 1$ (φυσικος).

→ Λύση.

$a_n > 0$, $\forall n \geq 1$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\dfrac{\lambda^{n+1}}{(n+1)^k}}{\dfrac{\lambda^n}{n^k}} = \lambda \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^k} =$$

$$\lambda \cdot \frac{1}{\left(\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{\downarrow\ 1}\right)^{k \to \text{σταθερο}}} \longrightarrow \lambda \cdot 1 = \lambda > 1$$

$\frac{1}{n} \to 0$

$1 + \frac{1}{n} \to 1 + 0 = 1$

και άρα $a_n \longrightarrow +\infty$.

Αναδρομικές Ακολουθίες

Σε τέτοιες περιπτώσεις ακολουθιών δίνεται ο πρώτος όρος $a_1 = a$ και ο $(n+1)$-όρος της ακολουθίας ορίζεται επαγωγικά (με τη βοήθεια του προηγούμενου)

$$a_{n+1} = f(a_n) \quad , \forall n \in \mathbb{N}.$$

Πολλές φορές για να δείξουμε ότι μία ακολουθία που ορίζεται αναδρομικά συγκλίνει, δείχναμε ότι είναι μονότονη και φραγμένη και το όριο βρίσκεται μέσα από τη σχέση.

$$x = f(x)$$

↳ συνεχής.

Παραδ.

1. (a_n) με $a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{3}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

και $a_1 = 2$.

Ν.δ.ο. η (a_n) συγκλίνει και να βρεθεί το όριο.

Λύση

$$a_2 \overset{(n=1)}{=} \frac{2a_1+1}{3} = \frac{5}{3} < 2.$$

Ίσως η (a_n) είναι φθίνουσα.

Θ.δ.ο. η $(a_n) \downarrow$ μέσω επαγωγής.

Για $n=1$ ισχύει αφού $a_2 < a_1$. ✓.

Έστω ότι ισχύει για $n-1$, δηλ. $a_n < a_{n-1}$.

Θ.δ.ο. $a_{n+1} < a_n$.

$$a_n < a_{n-1} \Longrightarrow 2a_n < 2a_{n-1}$$

$$\Longrightarrow 2a_n+1 < 2a_{n-1}+1 \Longrightarrow$$

$$\frac{2a_n+1}{3} < \frac{2a_{n-1}+1}{3} \Longrightarrow a_{n+1} < a_n$$

Άρα η $(a_n) \downarrow$. $\Longrightarrow$ είναι άνω φραγμένη από το a_1.

Επίσης $\underline{a_1 > 0}$.

θ.δ.ο. $a_n > 0$, $\underline{\forall n}$. (είναι κάτω φραγμένη)

πράγματι για $n=1$ ισχύει.

αν υποθ. ότι ισχύει για n, δηλ ότι $\underline{a_n > 0}$.

θ.δ.ο. $a_{n+1} > 0$.

$$a_n > 0 \Longrightarrow 2a_n > 0 \Longrightarrow 2a_n+1 > 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{2a_n+1}{3} > 0 \Longrightarrow a_{n+1} > 0.$$

Επαγωγικά έχουμε ότι.

είναι ~~γν~~ γνησίως φθίνουσα + κάτω φραγμένη από το 0.

$\Longrightarrow$ η (a_n) συγκλίνει και αν a είναι το όριο. $(a_n \to a)$.

$$a_{n+1} = \frac{2a_n+1}{3} = f(a_n) \xRightarrow{\text{όριο } n\to\infty}$$

$a_{n+1} \to a$ και $\frac{2a_n+1}{3} \to \frac{2a+1}{3}$.

Άρα $a = \frac{2a+1}{3} \Longleftrightarrow 3a = 2a+1$

$\Longleftrightarrow \boxed{a=1}$

Συμπεραίνουμε ότι.

$a_n \to 1$

αν $a_n \to a$, $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$

τότε $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \to \dfrac{a}{a} = 1$ ($a_n \neq 0$ τελικά $\forall n$)

$\forall n$

$a_{n+1} = \dfrac{2a_n + 1}{3}$

$a = \dfrac{2a+1}{3}$.

$a_n = n^2$.

$a_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} =$$

$$1 + \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \to 1$$