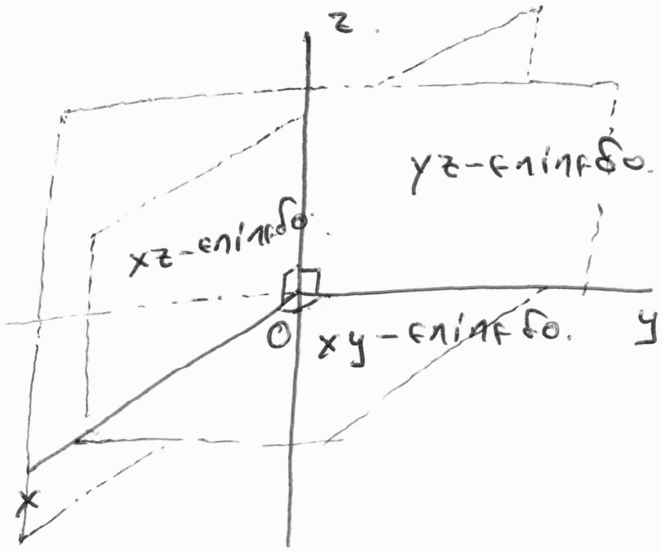
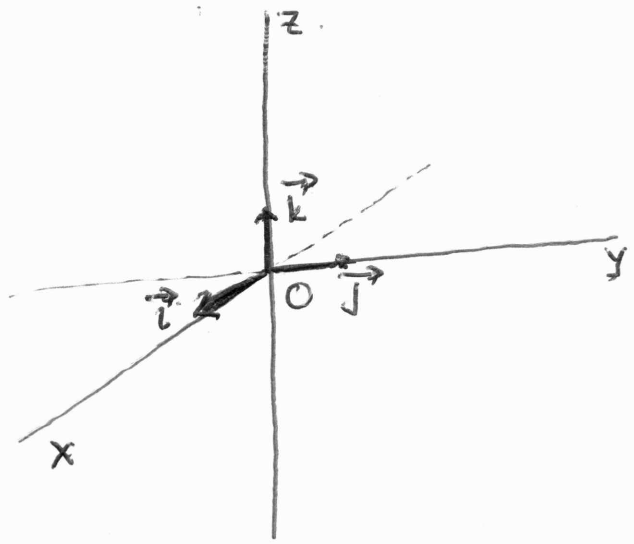
# Διανύσματα και συντεταγμένες στον χώρο.



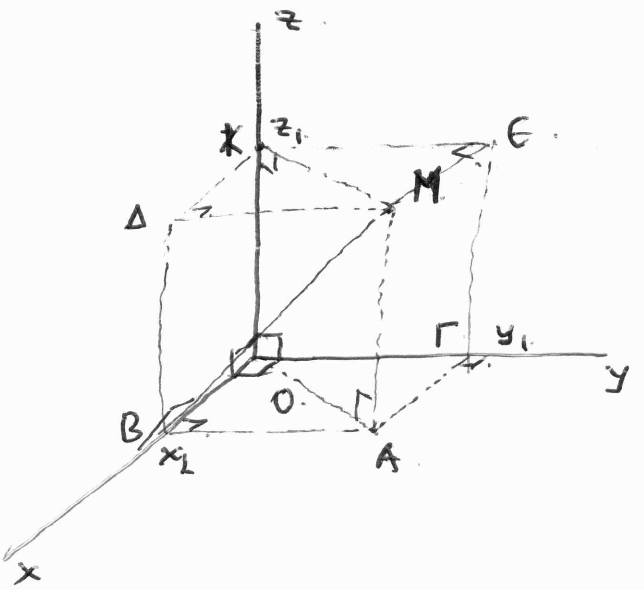

## Διανύσματα:




Κατα μήκος των θετικών ημιαξόνων έχουμε θεωρήσει τα διανύσματα $\vec{i}$, $\vec{j}$ και $\vec{k}$ με μοναδιαίο μήκος.

Η θέση ενός σημείου M του χώρου χαρακτηρίζεται από τις συντεταγμένες αυτού.

Πώς βρίσκουμε τις συντεταγμένες;




Προβάλλουμε το Μ σε ένα από τα τρία επίπεδα, π.χ. το $xOy$. Έστω Α η προβολή. Το Α καθορίζεται από την τετμημένη $x_1$ και την τεταγμένη $y_1$.
Ακολούθως φέρουμε κάθετη στον άξονα των z στο σημείο Κ. Η αντίστοιχη συντεταγμένη λέγεται <u>κατηγμένη</u> και έστω αυτή $z_1$.

Το Μ καθορίζεται από την τριάδα $M(x_1, y_1, z_1)$.

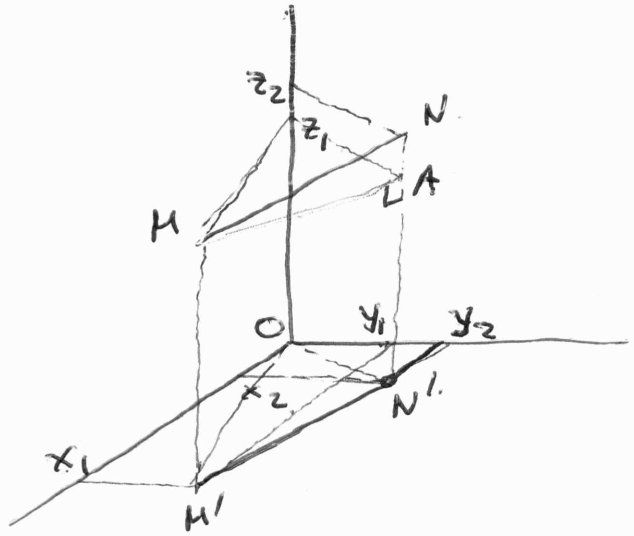
"Σημείωση": Θα μπορούσαμε να φέρουμε από το Μ κάθετη σ' άλλο επίπεδο, π.χ. στο $yOz$. Η προβολή είναι το Ε. Το Ε καθορίζεται από το $y_1$ και το $z_1$. Από το Μ φέρουμε κάθετη στον άξονα των x, στο σημείο Β με τετμημένη $x_1$. Άρα πάλι το Μ χαρακτηρίζεται από την τριάδα $(x_1, y_1, z_1)$.

Η απόσταση ΟΜ του Μ από την αρχή των αξόνων βρίσκεται ως εξής: Το τρίγωνο ΟΜΑ είναι ορθογώνιο στο Α και άρα $OM^2 = OA^2 + AM^2 = OA^2 + OK^2$.
Το τρίγωνο ΟΒΑ είναι ορθογώνιο στο Β, άρα $OA^2 = OB^2 + BA^2 = OB^2 + O\Gamma^2$.
Τελικώς $OM^2 = OB^2 + O\Gamma^2 + OK^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow OM = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$$

## Απόσταση δύο σημείων $M(x_1, y_1, z_1)$ και $N(x_2, y_2, z_2)$.

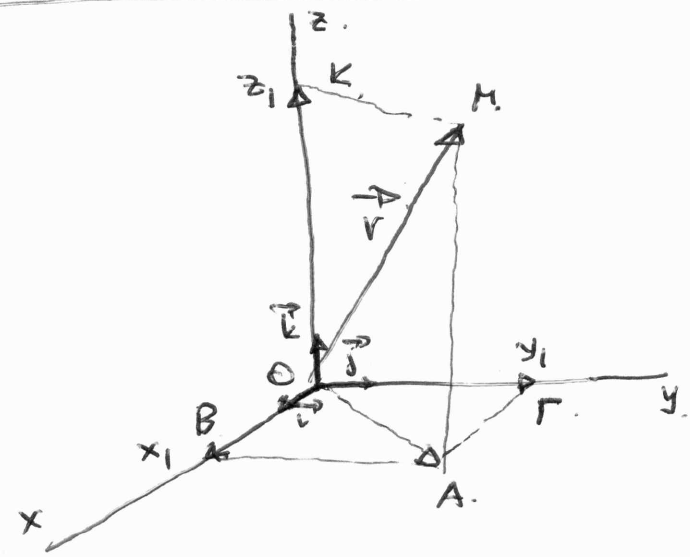





Προβάλλουμε τα M και N στο xOy επίπεδο και παίρνουμε τα σημεία $M'(x_1, y_1)$ και $N'(x_2, y_2)$.
Άρα $M'N'^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 = MA^2$, όπου MA η κάθετη στην $NN'$. Το τρίγωνο MAN είναι ορθογώνιο στο A, άρα $MN^2 = MA^2 + AN^2 = (x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2$.

Άρα $MN = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2}$

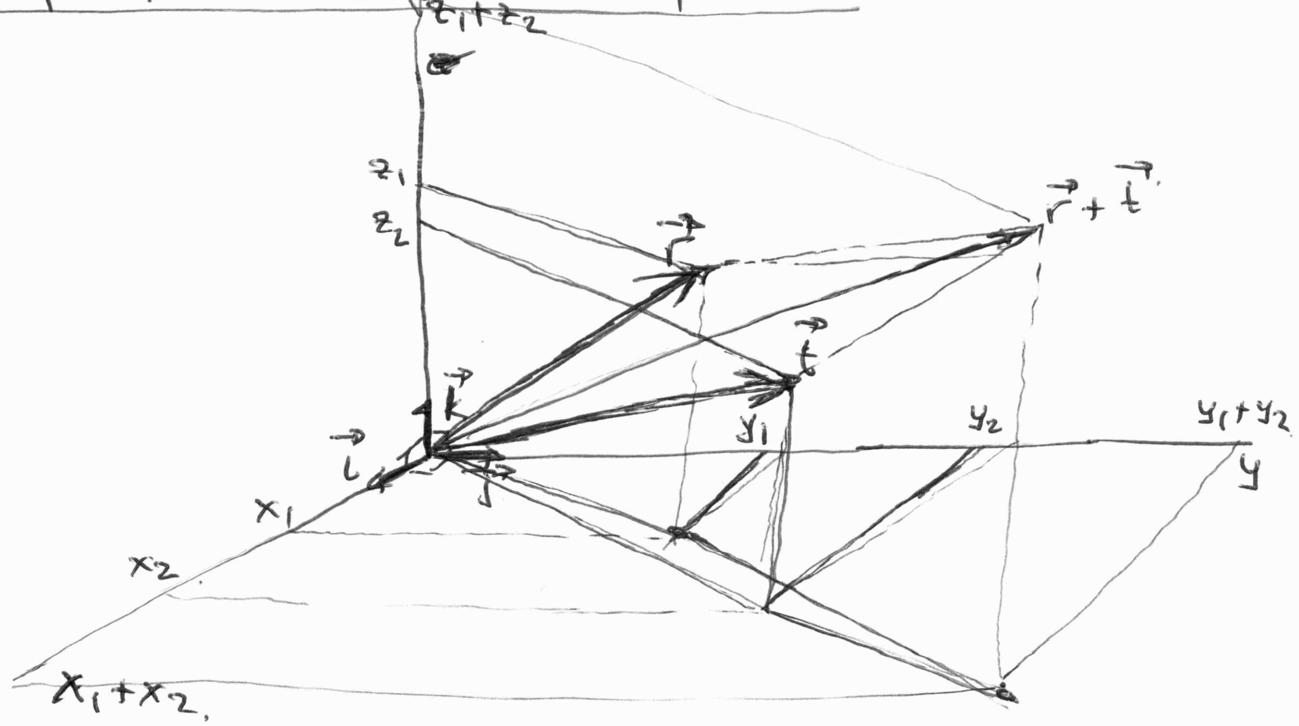
## Διάνυσμα θέσης - διανύσματα στον χώρο $\mathbb{R}^3$.




Το διάνυσμα θέσης $\vec{r} = \vec{OM}$ ενός σημείου $M(x_1, y_1, z_1)$ στον χώρο ισούται με το άθροισμα $\vec{OA} + \vec{OK}$.

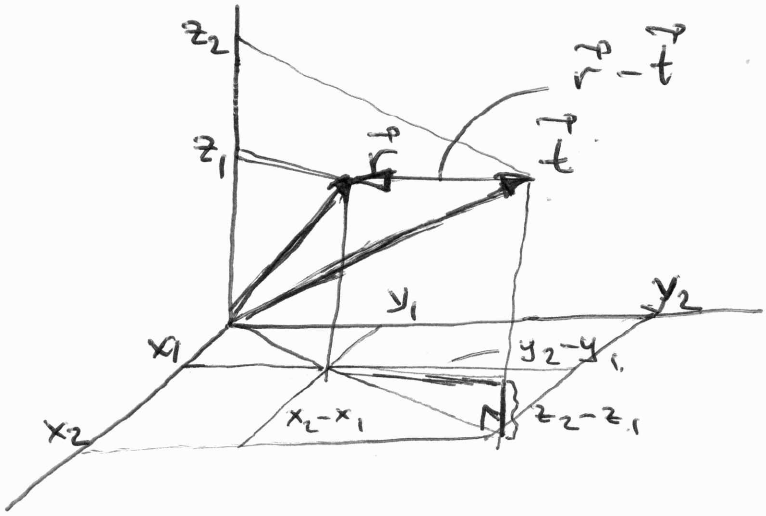
(Και στον χώρο τα διανύσματα ακολουθούν τον νόμο του ~~..~~ παραλληλογράμμου ως προς την πρόσθεση)
Αλλά στο xOy επίπεδο έχουμε $\vec{OA} = \vec{OB} + \vec{O\Gamma}$.
Άρα $\vec{r} = \vec{OM} = \vec{OB} + \vec{O\Gamma} + \vec{OK}$ και τα $\vec{OB}, \vec{O\Gamma}, \vec{OK}$ είναι οι προβολές του $\vec{OM} = \vec{r}$ στους άξονες Ox, Oy, Oz. Άρα $\vec{OB} = x_1\vec{i}$, $\vec{O\Gamma} = y_1\vec{j}$, $\vec{OK} = z_1\vec{k}$
Επομένως $\vec{r} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$
Η τριάδα $(x_1, y_1, z_1)$ είναι οι <u>συντεταγμένες του διανύσματος $\vec{r}$</u>.

## Άθροισμα – διαφορά διανυσμάτων




Έχουμε $\vec{r} + \vec{t} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} + x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k} =$
$= (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k}$

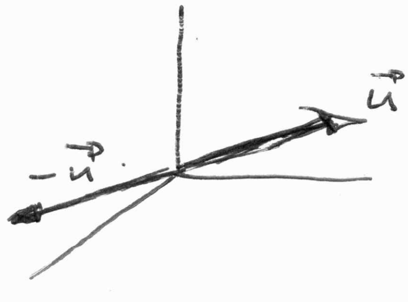
Η διαφορά $\vec{r} - \vec{t}$ ισούται με
$x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k} - x_2\vec{i} - y_2\vec{j} - z_2\vec{k} =$
$= (x_1 - x_2)\vec{i} + (y_1 - y_2)\vec{j} + (z_1 - z_2)\vec{k}$




Πολλές φορές αντί $\vec{r} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$ γράφουμε $\vec{r} = (x_1, y_1, z_1)$. Το μήκος του ισούται προφανώς με $\|\vec{r}\| = \sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}$

Ισχύουν τα εξής:

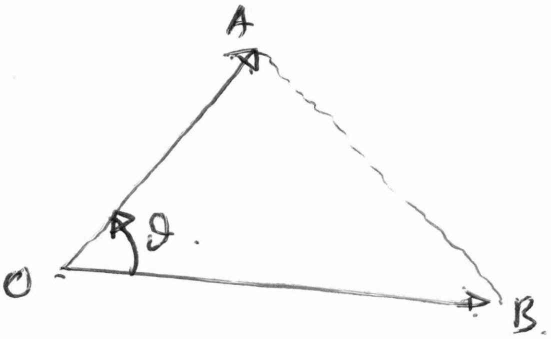
1) $\vec{u}+\vec{v} = \vec{v}+\vec{u}$ , (για διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ και $a, b \in \mathbb{R}$
2) $(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w} = \vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
3) $\vec{u}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{u} = \vec{u}$ , όπου $\vec{0}$ το μηδενικό διάνυσμα (αρχή και τέλος ταυτίζονται)
4) $\vec{u}+(-\vec{u}) = \vec{0}$




5) $a(b\vec{u}) = (ab)\vec{u}$
6) $a(\vec{u}+\vec{v}) = a\vec{u}+a\vec{v}$
7) $(a+b)\vec{u} = a\vec{u}+b\vec{u}$
8) $1\cdot\vec{u} = \vec{u}$
9) $\|a\vec{u}\| = |a|\,\|\vec{u}\|$.

Διευκρίνιση: Με το $a\cdot\vec{u}$, όπου $a\in\mathbb{R}$ και $\vec{u}$ διάνυσμα στον χώρο εννοούμε το διάνυσμα με μήκος $|a|\,\|\vec{u}\|$, διεύθυνση τη διεύθυνση του $\vec{u}$ και φορά τη φορά του $\vec{u}$ αν $a>0$ και αντίθετη φορά αν $a<0$. Αν $a=0$, τότε $0\cdot\vec{u} = \vec{0}$.

# Εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων.




Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{OA}=(x_1, y_1, z_1)=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ και $\vec{OB}=(x_2, y_2, z_2)=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$ ισούται με το γινόμενο των μηκών $\|\vec{OA}\|$ και $\|\vec{OB}\|$ των $\vec{OA}$ και $\vec{OB}$ αντίστοιχα επί το συνημίτονο της κυρτής γωνίας $\theta$ που σχηματίζουν τα διανύσματα.

Άρα $\vec{OA}\cdot\vec{OB}=\|\vec{OA}\|\cdot\|\vec{OB}\|\cos\theta$.

Από τον ~~γενίκευ~~νόμο των συνημιτόνων γνωρίζουμε (;;;) ότι στο τρίγωνο ΟΑΒ ισχύει:

$$AB^2=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{AB}\|^2=\|\vec{OA}\|^2+\|\vec{OB}\|^2-2\|\vec{OA}\|\cdot\|\vec{OB}\|\cdot\cos\theta.$$

Αλλά $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$

και άρα: $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=$

$$=x_1^2+y_1^2+z_1^2+x_2^2+y_2^2+z_2^2-2\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\,\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\cos\theta$$

$$\Leftrightarrow \cancel{x_2^2}+\cancel{x_1^2}-2x_1x_2+\cancel{y_2^2}+\cancel{y_1^2}-2y_1y_2+\cancel{z_2^2}+\cancel{z_1^2}-2z_1z_2=$$

$$=\cancel{x_1^2}+\cancel{y_1^2}+\cancel{z_1^2}+\cancel{x_2^2}+\cancel{y_2^2}+\cancel{z_2^2}-2\|\vec{OA}\|\|\vec{OB}\|\cos\theta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \|\vec{OA}\|\|\vec{OB}\|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

δηλαδή $\boxed{\vec{OA}\cdot\vec{OB}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}$

Δύο διανύσματα $\vec{u}, \vec{v}$ λέγονται κάθετα ή ορθογώνια αν η γωνία που σχηματίζουν είναι $\frac{\pi}{2} = 90°$. (7)

Αν $\vec{u} \neq \vec{0}$ και $\vec{v} \neq \vec{0}$ αυτό είναι ισοδύναμο με

$$\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\frac{\pi}{2} = 0 \iff \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Αν κάποιο από τα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε αυτό θεωρείται κάθετο σ' οποιοδήποτε διάνυσμα.

Άρα ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι κάθετα δύο διανύσματα είναι <u>το εσωτερικό γινόμενό τους να είναι μηδέν</u>.

Αν
$$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k} \quad \text{και}$$
$$\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k} \quad \text{και}$$
$$\vec{w} = (w_1, w_2, w_3) = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k} \quad \text{τότε}$$

από τον τύπο του εσωτερικού γινομένου προκύπτουν τα εξής:

1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$, 2) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

3) $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = u \cdot (\lambda\vec{v})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

4) $\vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{0}$, 5) $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

<u>Εφαρμογή 1:</u> Να βρεθεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{AB}$ και $\vec{A\Gamma}$, όπου $A(1,-2,3)$, $B(2,4,-6)$, $\Gamma(5,-3,2)$

<u>Λύση:</u> $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2-1, 4-(-2), -6-3) = (1, 6, -9)$

$\vec{A\Gamma} = \vec{O\Gamma} - \vec{OA} = (5-1, -3-(-2), 2-3) = (4, -1, -1)$

Άρα $\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma} = 1 \cdot 4 + 6 \cdot (-1) + (-9)(-1) = 4 - 6 + 9 = 7$

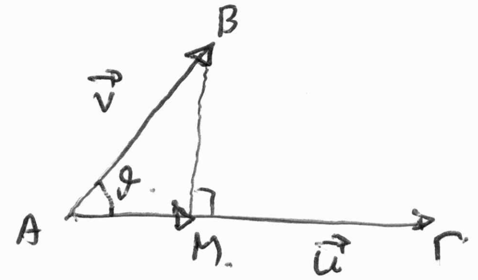
$\|\vec{AB}\|^2 = 1^2 + 6^2 + (-9)^2 = 1 + 36 + 81 = 88 \Rightarrow \|\vec{AB}\| = 2\sqrt{22}$

$\|\vec{A\Gamma}\|^2 = 4^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 18 \iff \|\vec{A\Gamma}\| = 3\sqrt{2}$.

$$\cos\theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{A\Gamma}}{\|\vec{AB}\| \cdot \|\vec{A\Gamma}\|} = \frac{7}{2\sqrt{22} \cdot 3\sqrt{2}} = \frac{7}{12\sqrt{11}} = \frac{7\sqrt{11}}{132}$$

Άρα $\theta \simeq \arccos(0,17588) \simeq 79,87° \simeq 1,394$ rad.

## Προβολή διανύσματος σε διάνυσμα:




Έστω $\vec{u} = \vec{A\Gamma} \neq \vec{0}$ και $\vec{v} = \vec{AB}$. Η προβολή του $\vec{v}$ επί του $\vec{u}$ είναι το διάνυσμα $\vec{AM}$ με $\vec{MB} \perp \vec{u} = \vec{A\Gamma}$. Αυτή συμβολίζεται με $\boxed{\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})}$

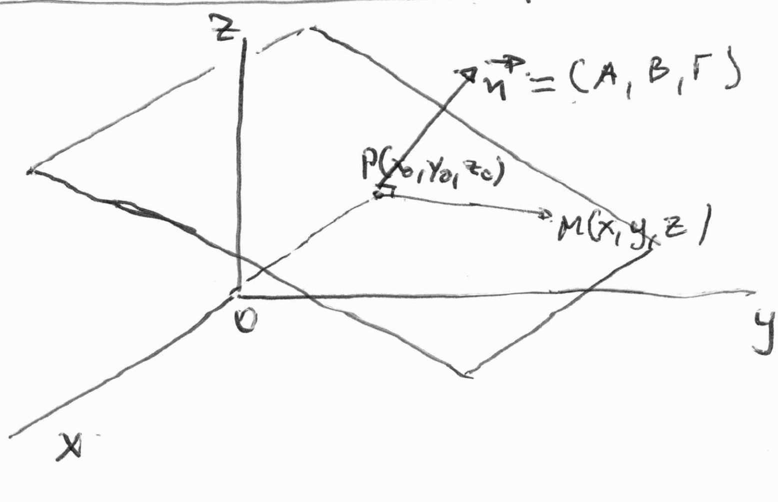
Προφανώς $\vec{AM} = \lambda \vec{u}$ και $\vec{MB} = \vec{AB} - \vec{AM} = \vec{v} - \lambda\vec{u}$.
Επειδή $\vec{MB} \perp \vec{u}$, θα έχουμε $(\vec{v} - \lambda\vec{u}) \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{u} = \lambda \|\vec{u}\|^2 \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2}$.

Άρα $\vec{AM} = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} = \mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{v})$

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}) \cdot \vec{u} = \left(\dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}\right) \cdot \vec{u} =$
$= \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} (\vec{u} \cdot \vec{u}) = \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \|\vec{u}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

Η κάθετη συνιστώσα $\vec{MB}$ ισούται με $\vec{AB} - \vec{AM} =$
$= \vec{v} - \dfrac{\vec{v} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u}$.

## Εξίσωση επιπέδου στον χώρο:



Θεωρούμε ένα σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ του χώρου και ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\vec{n}=(A, B, \Gamma)$ με σημείο εφαρμογής το P. Το σύνολο των σημείων $M(x, y, z)$ για τα οποία το διάνυσμα $\vec{PM}=(x-x_0, y-y_0, z-z_0)$ είναι κάθετο στο $\vec{n}=(A, B, \Gamma)$ αποτελούν το <u>επίπεδο</u> που διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο στο $\vec{n}$.

Άρα $\vec{PM}\cdot\vec{n}=0 \iff (x-x_0)\cdot A+(y-y_0)B+(z-z_0)\Gamma=0 \iff$

$\iff Ax+By+\Gamma z = Ax_0+By_0+\Gamma z_0 = \Delta$.

Άρα η εξίσωση ενός επιπέδου έχει τη μορφή

(1) $\boxed{Ax+By+\Gamma z=\Delta}$, όπου $|A|+|B|+|\Gamma|>0$.

(κάποιος από τους $A, B, \Gamma$ δεν είναι μηδέν).

Αντιστρόφως, αφού κάποιος από τους $A, B$ και $\Gamma$ δεν είναι μηδέν, τότε η εξίσωση $Ax+By+\Gamma z=\Delta$ έχει μια τουλάχιστον λύση. Π.χ. αν $A\neq 0$, τότε

$x=-\frac{By}{A}-\frac{\Gamma z}{A}+\frac{\Delta}{A}$ και στο $y$ και $z$ δίνουμε αυθαίρετες τιμές).

Έστω $(x_0, y_0, z_0)$ μια λύση της $Ax+By+\Gamma z=\Delta$, δηλαδή $Ax_0+By_0+\Gamma z_0=\Delta$. (2)

Τότε αφαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) παίρνουμε $A(x-x_0)+B(y-y_0)+\Gamma(z-z_0)=0 \iff$

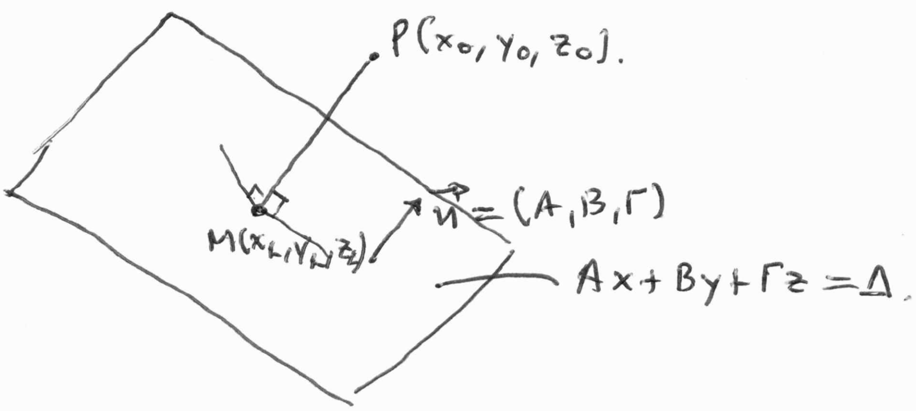
$\iff \vec{n}\cdot\vec{PM}=0$, όπου $\vec{n}=(A, B, \Gamma)$ και $P=(x_0, y_0, z_0)$ και $M(x, y, z)$ το τυχόν σημείο του επιπέδου.

<u>Παράδειγμα:</u> Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που περνάει από το σημείο $(5, 1, -2)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n}=(2, 4, 3)$.

<u>Λύση:</u> Έστω $P(5, 1, -2)$ και $M(x, y, z)$ το τυχόν σημείο του επιπέδου. Τότε $\vec{PM}\perp\vec{n} \iff$

$$(x-5)\cdot 2+(y-1)\cdot 4+(z+2)\cdot 3=0 \Leftrightarrow$$
$$2x+4y+3z=+10+4-6=8 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \boxed{2x+4y+3z=8.}$$

Απόσταση σημείου από επίπεδο:




Το διάνυσμα $\vec{n}=(A,B,\Gamma)$ είναι κάθετο στο επίπεδο $Ax+By+\Gamma z=\Delta$, όπως και το $\vec{PM}$, όπου $M(x_1,y_1,z_1)$ το σημείο του επιπέδου που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το $P(x_0,y_0,z_0)$. Άρα $\vec{PM} \parallel \vec{n}$ και κατά συνέπεια

$$\vec{PM}=(x_1-x_0,\ y_1-y_0,\ z_1-z_0)=\lambda\vec{n}=(\lambda A,\lambda B,\lambda\Gamma)$$

~~$\|\vec{PM}\|^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2=\lambda^2(A^2+B^2+\Gamma^2)$~~

~~$(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2=$~~

Άρα
$$x_1=\lambda A+x_0$$
$$y_1=\lambda B+y_0$$
$$z_1=\lambda\Gamma+z_0.$$

Αλλά $Ax_1+By_1+\Gamma z_1=\Delta \Leftrightarrow \lambda A^2+Ax_0+\lambda B^2+By_0+$
$+\lambda\Gamma^2+\Gamma z_0=\Delta \Leftrightarrow \lambda(A^2+B^2+\Gamma^2)=\Delta-(Ax_0+By_0+\Gamma z_0)$

$$\Leftrightarrow \lambda=\frac{\Delta-(Ax_0+By_0+\Gamma z_0)}{A^2+B^2+\Gamma^2}.$$

Επομένως $\|\vec{PM}\|=\|\lambda\vec{n}\|=|\lambda|\,\|\vec{n}\|=|\lambda|\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}=$

$$= \frac{|\Delta - (Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0)|}{A^2+B^2+\Gamma^2}\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + \Gamma z_0 - \Delta|}{\sqrt{A^2+B^2+\Gamma^2}}.$$

Παραδείγματα: 1) Να βρεθεί η απόσταση του σημείου $P(7, 5, 4)$ από το επίπεδο $2x+4y+3z=8$.

Λύση: Η ζητούμενη απόσταση είναι ίση με:

$$\frac{|2\cdot 7+4\cdot 5+3\cdot 4-8|}{\sqrt{2^2+4^2+3^2}} = \frac{38}{\sqrt{4+16+9}} = \frac{38}{\sqrt{29}}.$$

2) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα επίπεδα $2x+4y+3z=8$ και $3x-4y+7z=5$.

Λύση: Τα επίπεδα τέμνονται κατά μήκος της ευθείας, τα σημεία της οποίας είναι λύσεις του συστήματος.

$$\begin{cases} 2x+4y+3z=8 \\ 3x-4y+7z=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+4y=8-3z \\ 3x-4y=5-7z \end{cases}$$

Λύνουμε ως προς x και y.

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -8-12=-20, \quad D_x = \begin{vmatrix} 8-3z & 4 \\ 5-7z & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -32+12z-20+28z = -52+40z.$$

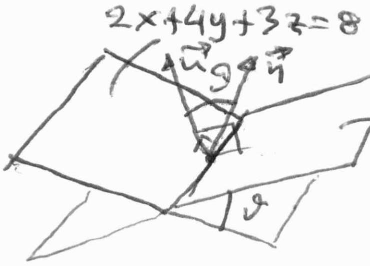
$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 8-3z \\ 3 & 5-7z \end{vmatrix} = 10-14z-24+9z = -14-5z.$$

Άρα $x = \dfrac{-52+40z}{-20} = \dfrac{52-40z}{20} = \dfrac{26-20z}{10} = \dfrac{13-10z}{5}$

και $y = \dfrac{-14-5z}{-20} = \dfrac{14+5z}{20}.$

Η τομή των επιπέδων είναι η ευθεία με σημεία

$$\left(\frac{13-10z}{5}, \frac{14+5z}{20}, z\right), \quad z \in \mathbb{R}.$$




Το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο $2x+4y+3z=8$ είναι το $\vec{n}=(2,4,3)$ και το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο $3x-4y+7z=5$ είναι το διάνυσμα $\vec{u}=(3,-4,7)$.
Το συνημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν τα κάθετα διανύσματα είναι

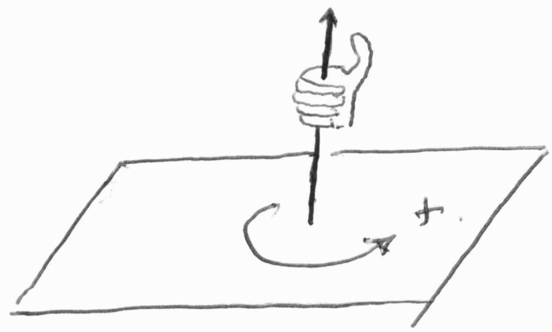
$$\cos\vartheta = \frac{\vec{n}\cdot\vec{u}}{\|\vec{n}\|\cdot\|\vec{u}\|} = \frac{2\cdot 3+4(-4)+3\cdot 7}{\sqrt{2^2+4^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+(-4)^2+7^2}} =$$

$$= \frac{6-16+21}{\sqrt{4+16+9}\ \sqrt{9+16+49}} = \frac{11}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{74}} \simeq 0,23745.$$

Άρα $\vartheta \simeq 1,3310564\ rad = 76,2639°$.
Αυτή είναι η μία (οξεία) γωνία που σχηματίζουν τα επίπεδα. Η άλλη είναι η παραπληρωματική της.

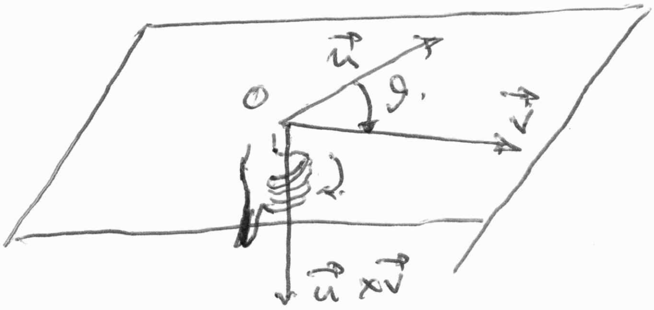
## Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων

α) Προσανατολισμός επιπέδου ως προς διάνυσμα κάθετο σ' αυτό και με αρχή πάνω στο επίπεδο




Πιάνουμε το διάνυσμα με το δεξί χέρι ώστε ο αντίχειρας να δείχνει προς τη φορά του διανύσματος.
Τα άλλα δάκτυλα στρέφονται γύρω από το διάνυσμα και ορίζουν τον θετικό προσανατολισμό του επιπέδου.

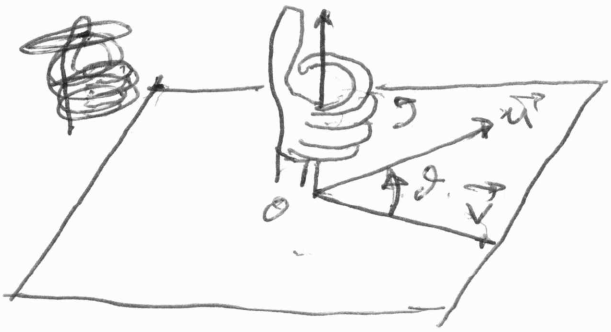
## β) Εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων




Στο επίπεδο που ορίζουν δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ με κοινή αρχή O θεωρούμε το κάθετο διάνυσμα $\vec{u}\times\vec{v}$ με μέτρο $\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|$ ημθ, όπου θ η γωνία των διανυσμάτων (κυρτή)

Αν πάρουμε το δεξί μας χέρι και στρέψουμε τα 4 δάκτυλα όπως η γωνία από το $\vec{u}$ στο $\vec{v}$, τότε ο αντίχειράς μας θα δείξει τη φορά του $\vec{u}\times\vec{v}$.

Αν πάρουμε τώρα το $\vec{v}\times\vec{u}$, το μέτρο δεν αλλάζει, αλλά αλλάζει η φορά

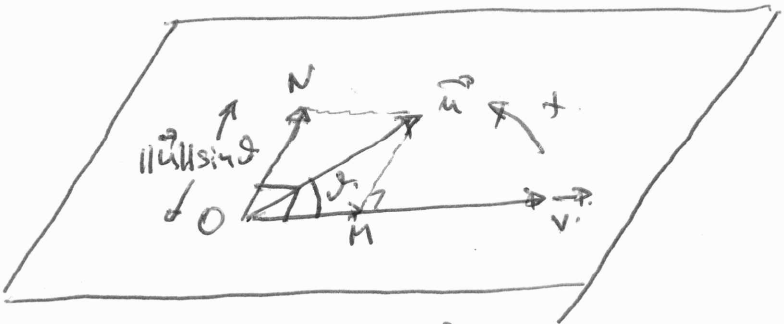



Άρα $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$. Αν τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ σχηματίζουν μηδενική γωνία ή γωνία π, ή $\vec{v}=\vec{0}$ ή $\vec{u}=\vec{0}$, τότε θέτουμε

$$\vec{u}\times\vec{v}=\vec{0}.$$

(Γιατί παίρνουμε το δεξί χέρι; Γιατί οι περισσότεροι άνθρωποι είναι δεξιόχειρες.).

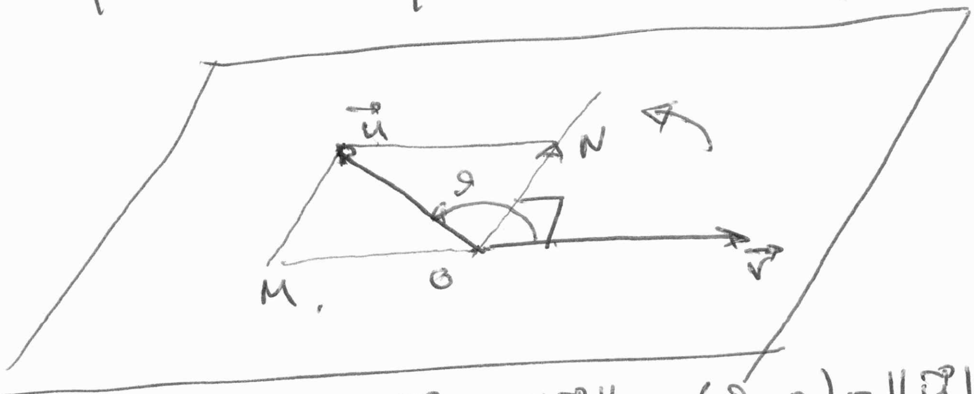
Αν γράψουμε τώρα το ένα διάνυσμα ως άθροισμα δύο καθέτων διανυσμάτων




Τότε $\vec v \times \vec u = \vec v \times \vec{ON}$.

α) Ο προσανατολισμός δεν αλλάζει, τα διανύσματα $\vec v$ και $\vec{ON}$ έχουν γωνία $\frac{\pi}{2}$ με $\sin\frac{\pi}{2}=1$ και το μήκος του $\vec{ON} = \|\vec u\|\sin\theta$. Άρα $\vec v \times \vec{ON} =$
$= \|\vec v\|\cdot\|\vec{ON}\|\sin\frac{\pi}{2} = \|\vec v\|\|\vec u\|\sin\theta\cdot 1 = \|\vec v \times \vec u\|$.

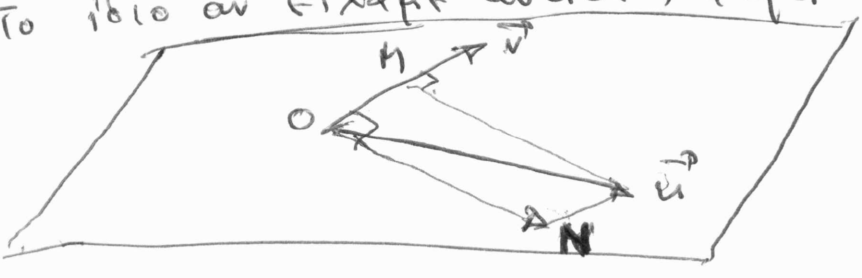
Ακόμα και αν η θ ήταν αμβλεία το ίδιο αποτέλεσμα θα είχαμε.



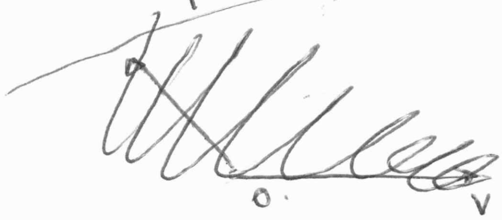

Εδώ έχουμε $\|\vec{ON}\| = \|\vec u\|\cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \|\vec u\|\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) =$
$= \|\vec u\|\sin\theta$ και πάλι ο προσανατολισμός δεν αλλάζει. Άρα $\|\vec v \times \vec{ON}\| = \|\vec v\|\,\|\vec{ON}\|\sin\frac{\pi}{2} =$
$= \|\vec v\|\,\|\vec{ON}\| = \|\vec v\|\,\|\vec u\|\sin\theta = \|\vec v \times \vec u\|$.

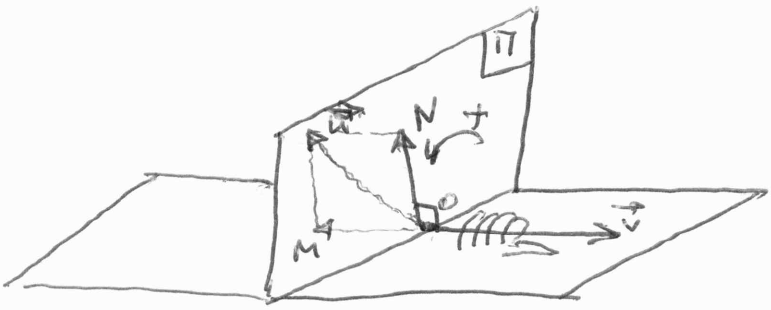
Επειδή δεν αλλάζει η φορά και το μέτρο το $\vec v \times \vec u$ ισούται με $\vec v \times \vec{ON} =$

Το ίδιο αν είχαμε αντίθετη φορά



β). Εφόσον το $\vec{ON}$ είναι κάθετο στο $\vec{v}$, τό $\vec{ON}$ θα ανήκει στο επίπεδο που περνά από το O και είναι κάθετο στο $\vec{v}$. Άρα το $\vec{ON}$ είναι η προβολή του $\vec{u}$ στο κάθετο προς το $\vec{u}$ επίπεδο.




Αν τώρα $\vec{v}\times\vec{u}=\vec{v}\times\vec{ON}$, τότε το $\vec{v}$ ορίζει στο Π έναν προσανατολισμό και περιστρέφει το $\vec{ON}$ κατά $\frac{\pi}{2}=90^\circ$ κατά τη θετική φορά, πολλαπλασιασμένο επί $\|\vec{v}\|$.

<u>Ερώτημα:</u> Αν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ και τα προβάλουμε στο κάθετο στο $\vec{v}$ επίπεδο το άθροισμα $\vec{u}_1+\vec{u}_2$ θα έχει σαν προβολή στο (Π) Το άθροισμα των προβολών των $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ στο (Π)

Η προβολή $\vec{ON}$ του $\vec{u}$ στο Π ισούται με

$$\vec{u}-\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u})=\vec{u}-\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.$$

Άρα $\vec{u}_1+\vec{u}_2-\mathrm{proj}_{\vec{v}}(\vec{u}_1+\vec{u}_2)=\vec{u}_1+\vec{u}_2-\frac{(\vec{u}_1+\vec{u}_2)\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\cdot\vec{v}=$

$$=\vec{u}_1+\vec{u}_2-\frac{\vec{u}_1\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}-\frac{\vec{u}_2\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}=$$

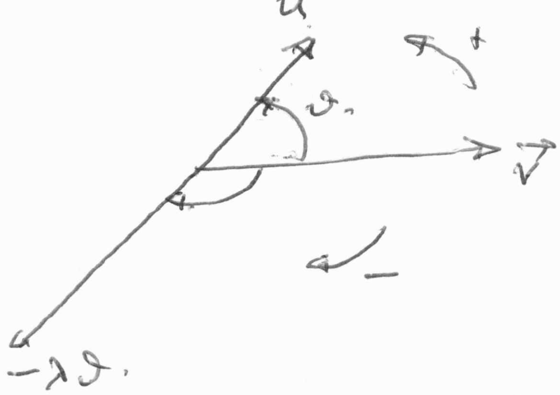
$$=\left(\vec{u}_1-\frac{\vec{u}_1\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right)+\left(\vec{u}_2-\frac{\vec{u}_2\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}\right)$$

Συνοψίζοντας, για να βρούμε το $\vec{v}\times(\vec{u}_1+\vec{u}_2)$, θα βρούμε την προβολή του $\vec{u}_1+\vec{u}_2$ στο επίπεδο που είναι κάθετο στο $\vec{v}$, δηλαδή το άθροισμα των προβολών του $\vec{u}_1$ και του $\vec{u}_2$ στο κάθετο αυτό επίπεδο και στη συνέχεια θα περιστρέψουμε το άθροισμα των προβολών κατά τη θετική φορά γύρω από το $\vec{v}$ κατά γωνία $90^\circ$ και θα πολλαπλασιάσουμε επί $\|\vec{v}\|$.
Η περιστροφή των προβολών των $\vec{u}_1$ και $\vec{u}_2$ δίνει άθροισμα την περιστροφή του αθροίσματος των προβολών αυτών, δηλαδή της προβολής του $\vec{u}_1+\vec{u}_2$ κατά $90^\circ$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\vec{v}\times(\vec{u}_1+\vec{u}_2)=\vec{v}\times\vec{u}_1+\vec{v}\times\vec{u}_2$$

Είναι σαφές ότι αν $\lambda>0$, τότε $\vec{v}\times(\lambda\vec{u})=\lambda(\vec{v}\times\vec{u})$
ενώ, αν $\lambda<0$, τότε

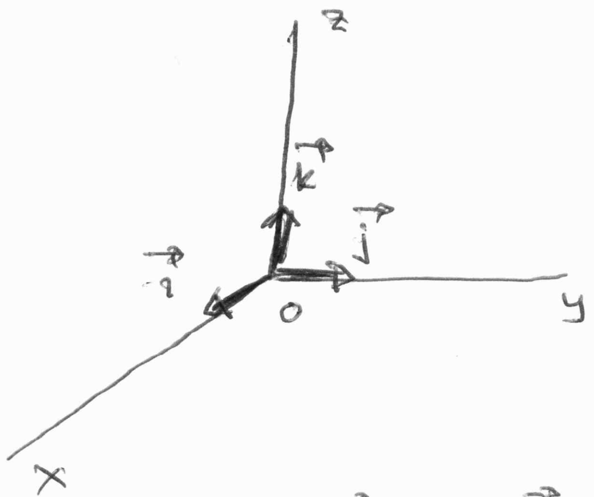



αλλάζει η φορά περιστροφής και το $\vec{v}\times(\lambda\vec{u})$ έχει μέτρο το $|\lambda|\,\|\vec{v}\times\vec{u}\|$, αλλά αντίθετη φορά.

Δηλαδή $\vec{v}\times(\lambda\vec{u})=-|\lambda|(\vec{v}\times\vec{u})=\lambda\cdot(\vec{v}\times\vec{u})$

Άρα το εξωτερικό γινόμενο είναι γραμμική συνάρτηση του $\vec{u}$. Επίσης είναι γραμμικό και ως προς $\vec{v}$ γιατί $\vec{v}\times\vec{u}=-\vec{u}\times\vec{v}$.

Τώρα στο ορθοκανονικό σύστημα xyz έχουμε για τα διανύσματα $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$.




$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$, $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}$, $\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$ και $\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=$
$=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$
$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k}$, $\vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i}$, $\vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}$.

Αν λοιπόν $\vec{v}=(a_1,a_2,a_3)=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$
και $\vec{u}=(b_1,b_2,b_3)=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, τότε

$$\vec{v}\times\vec{u}=(a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\times(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})=$$
$$=a_1b_1\vec{i}\times\vec{i}+a_1b_2\vec{i}\times\vec{j}+a_1b_3\vec{i}\times\vec{k}+$$
$$+a_2b_1\vec{j}\times\vec{i}+a_2b_2\vec{j}\times\vec{j}+a_2b_3\vec{j}\times\vec{k}+$$
$$+a_3b_1\vec{k}\times\vec{i}+a_3b_2\vec{k}\times\vec{j}+a_3b_3\vec{k}\times\vec{k}=$$
$$=a_1b_2\vec{k}-a_1b_3\vec{j}-a_2b_1\vec{k}+a_2b_3\vec{i}+a_3b_1\vec{j}-$$
$$-a_3b_2\vec{i}=(a_2b_3-a_3b_2)\vec{i}+(a_3b_1-a_1b_3)\vec{j}+$$
$$+(a_1b_2-a_2b_1)\vec{k}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+$$
$$+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}.$$