Περί Διαφορικών εξισώσεων

Μια διαφορική εξίσωση είναι μια σχέση στην οποία εμπλέκεται μια άγνωστη συνάρτηση και οι παράγωγοί της.
Εμείς καλούμαστε να βρούμε ποια ή ποιές συναρτήσεις πληρούν τη σχέση αυτή. Αυτές οι συναρτήσεις λέγονται λύσεις της διαφορικής εξίσωσης.

Παραδείγματα διαφορικών εξισώσεων:

1) $\frac{dy}{dx} = 3x + x^2$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + 3x^2 \frac{dy}{dx} + y = 0.$

3) $\ln x \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \cos 2x \frac{d^2y}{dx^2} + \sin 3x \frac{dy}{dx} + xy = 0.$

4) $\frac{d^2y}{dx^2} \cdot yx = x^2 + \frac{dy}{dx}$

Η τάξη μιας διαφορικής εξίσωσης είναι η μεγαλύτερη τάξη παραγώγου της άγνωστης συνάρτησης $y=f(x)$ που ψάχνουμε να βρούμε.

Οι πιο απλές διαφορικές εξισώσεις είναι οι Διαφορικές εξισώσεις χωριζομένων μεταβλητών.

Αυτές έχουν τη μορφή.

$$\boxed{g(y)\frac{dy}{dx} + h(x) = 0}$$ ή αλλιώς

$$\boxed{g(y)\, y' + h(x) = 0.}$$

Μέθοδος λύσης διαφορικών εξισώσεων χωριζομένων μεταβλητών.

Η σχέση $g(y)\frac{dy}{dx}+h(x)=0$ γράφεται ισοδύναμα

$$g(y)\,dy=-h(x)\,dx. \quad (1)$$

Το πρώτο μέλος της (1) ολοκληρώνεται ως προς y.
Το δεύτερο μέλος της (1) ολοκληρώνεται ως προς x.
Άρα προκύπτει

$$\int g(y)\,dy=-\int h(x)\,dx+C \qquad (2)$$

όπου στα ολοκληρώματα παίρνουμε αρχικές συναρτήσεις και η διαφορά των σταθερών μεταφέρεται στο 2ο μέλος και είναι μια σταθερά επίσης. Αυτή τη λέμε C. Αν μας δώσουν επιπλέον περιορισμούς για τις λύσεις μπορούμε να βρούμε τη σταθερά C.

Παραδείγματα: 1) Να λυθεί η δ.ε. $\boxed{x-y^2y'=0}$

Λύση: $-y^2y'+x=0 \Leftrightarrow -y^2\frac{dy}{dx}+x=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -y^2dy+xdx=0.$

Άρα $-\int y^2dy+\int x\,dx=C$ (Η σταθερά εμφανίζεται σε όποιο μέλος θέλουμε, συνήθως στο 2ο)

Επομένως $-\frac{y^3}{3}+\frac{x^2}{2}=c \Leftrightarrow \frac{y^3}{3}=\frac{x^2}{2}-c \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^3=\frac{3x^2}{2}-3c$. Επειδή το 3 είναι περιττός, παίρνουμε $y=y(x)=\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2}+c'}$, όπου $c'=-3c$ είναι μια σταθερά επίσης. (Αυτό για λόγους συντομογραφίας)

Εάν στην παραπάνω διαφορική εξίσωση μας δώσουν τον περιορισμό $y(-1)=0$, τότε θα πρέπει

$$0=y(-1)=\sqrt[3]{\frac{3(-1)^2}{2}+c'} \Leftrightarrow \frac{3}{2}+c'=0 \Leftrightarrow$$

$c'=-\frac{3}{2}$. Άρα μοναδική λύση είναι τότε η συνάρτηση

$$y(x)=\sqrt[3]{\frac{3x^2}{2}-\frac{3}{2}}$$ με πεδίο ορισμού τέτοιο ώστε

$$\frac{3x^2}{2}\geq\frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2\geq 1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,-1]\cup[1,+\infty).$$

Αλλά το $y=y(x)$ μπορεί να είναι αρνητικό αν $\frac{3x^2}{2}+c'\leq 0$

Τότε $y=-\sqrt[3]{\left|\frac{3x^2}{2}+c'\right|}$ και αυτή είναι μια λύση.

Αν $y(-1)=0$, τότε $0=\left|\frac{3(-1)^2}{2}+c'\right| \Leftrightarrow c'+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow c'=-\frac{3}{2}$

Εδώ $\frac{3x^2}{2}+c'=\frac{3x^2}{2}-\frac{3}{2}\leq 0 \Leftrightarrow x^2\leq 1 \Leftrightarrow x\in[-1,1]$.

Άρα $y=-\sqrt[3]{\left|\frac{3x^2}{2}+c'\right|}=-\sqrt[3]{\left|\frac{3x^2}{2}-\frac{3}{2}\right|}=-\sqrt[3]{\frac{3}{2}-\frac{3x^2}{2}}$, $x\in[-1,1]$

2). $y'=y^2x^3$. Παρατηρούμε ότι η σταθερή συνάρτηση $y=0$ είναι λύση αυτής.

Έστω $y\neq 0$. Τότε $\frac{dy}{dx}=y^2x^3 \Leftrightarrow \frac{dy}{y^2}=x^3dx \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \int\frac{dy}{y^2}=\int x^3dx+C \Leftrightarrow -\frac{1}{y}=\frac{x^4}{4}+C \Leftrightarrow y=-\frac{1}{\frac{x^4}{4}+C}=$$

$=-\frac{4}{x^4+4C}$. Θέτουμε $k=4C$ για την καινούργια σταθερά. Άρα $\boxed{y=-\frac{4}{x^4+k}}$

3). $y'=\frac{x+1}{y^4+1} \Leftrightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{x+1}{y^4+1} \Leftrightarrow (y^4+1)dy=(x+1)dx$

Άρα $\int(y^4+1)dy=\int(x+1)dx+C \Leftrightarrow \boxed{\frac{y^5}{5}+y=\frac{x^2}{2}+x+C}$

Στην τελευταία σχέση δεν μπορούμε να λύσουμε

ως προς y γιατί είναι $5^{\text{ου}}$ βαθμού. Απλώς έχουμε εξαφανίσει τις παραγώγους.
Σ' αυτή την περίπτωση λέμε ότι η συνάρτηση $y=y(x)$ εκφράζεται πεπλεγμένα:

4). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$e^x dx - y dy = 0, \quad y(0)=1$$

Λύση: Ως πρόβλημα αρχικών τιμών εννοούμε τον προσδιορισμό της σταθεράς c που θα προκύψει.

Έχουμε: $\int e^x dx - \int y dy = c \Leftrightarrow e^x - \frac{y^2}{2} = c$

$y(0)=1 \Leftrightarrow e^0 - \frac{1^2}{2} = c \Leftrightarrow c = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Άρα $e^x - \frac{y^2}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x - y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 = 2e^x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \sqrt{2e^x - 1}$ ή $y = -\sqrt{2e^x-1}$. (Δύο λύσεις)

5). Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών.

$$x\cos x\, dx + (1-6y^5)\, dy = 0, \quad y(\pi)=0.$$

Λύση: $\int x\cos x\, dx + \int (1-6y^5)\, dy = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int x(\sin x)' dx + y - y^6 = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{x\sin x - \int x\cos x\, dx}\ x\sin x - \int (x)'\sin x\, dx + y - y^6 = c$

$\Leftrightarrow x\sin x - \int \sin x\, dx + y - y^6 = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{x\sin x + \cos x + y - y^6 = c}$.

Και αυτή μας δίνει την $y(x)$ πεπλεγμένα.
Θέτουμε $x=\pi$ και $y=0$.

$$\pi \underbrace{\sin\pi}_{0} + \underbrace{\cos\pi}_{-1} + 0 - 0^6 = c \Leftrightarrow -1 = c.$$

Άρα $\boxed{x\sin x + \cos x + y - y^6 = -1}$

6). $(x^2+1)dx + (y^2+y)dy = 0$

Λύση: $\int(x^2+1)dx + \int(y^2+y)dy = c \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} + x + \frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} = c$

7). $(x^2+1)y' + y = 0$.

Λύση: $(x^2+1)\frac{dy}{dx} = -y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x^2+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x^2+1} + c \Leftrightarrow \ln|y| = -\arctan x + c$

(Προφανώς και η σταθερή συνάρτηση $y=0$ την επαληθεύει)

Άρα $|y| = e^{-\arctan x} e^c \Leftrightarrow y = \pm e^c \cdot e^{-\arctan x}$.

Θέτουμε $k = \pm e^c$.

Άρα λύση: $\boxed{y = k e^{-\arctan x}}$ που περιέχει και τη μηδενική, αν λάβουμε $k=0$.

8). $x e^{x^2} dx + (y^5 - 1)dy = 0$, $y(0) = 0$.

Λύση: $\int x e^{x^2} dx + \int (y^5 - 1)dy = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2} dx + \frac{y^6}{6} - y = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int (e^{x^2})' dx + \frac{y^6}{6} - y = c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{y^6}{6} - y + \frac{e^{x^2}}{2} = c$. Θέτουμε $x=0$ και $y=0$

Άρα $\frac{0^6}{6} - 0 + \frac{e^0}{2} = c \Leftrightarrow c = \frac{1}{2}$.

Συνεπώς $\boxed{\frac{y^6}{6} - y + \frac{e^{x^2}}{2} = \frac{1}{2}}$

9). $(x^2+1)dx + \frac{1}{y}dy = 0$, $y(-1) = 1$.

Λύση: $\int(x^2+1)dx + \int \frac{dy}{y} = c \Leftrightarrow \frac{x^3}{3} + x + \ln|y| = c$

$\Leftrightarrow \ln|y| = c - \frac{x^3}{3} - x \Leftrightarrow |y| = e^c \cdot e^{-x^3/3 - x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \pm e^c e^{-x^3/3 - x}$. Θέτουμε $k = \pm e^c$.

Άρα $\boxed{y = k e^{-x^3/3 - x}}$. Τώρα $y(-1) = 1$. Άρα

$$1 = ke^{-(-1)^3/3-(-1)} = ke^{\frac{1}{3}+1} = ke^{\frac{4}{3}} \Rightarrow k = e^{-4/3}$$

Επομένως $\boxed{y = e^{-\frac{4}{3}} e^{-\frac{x^3}{3}-x} = e^{-\frac{1}{3}(x^3+3x+4)}}$

Ομογενείς διαφορικές εξισώσεις πρώτης τάξης:

Γενική μορφή: $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$,

όπου $f(tx,ty) = f(x,y)$ $\forall\, t \in \mathbb{R}$.

Μέθοδος λύσης:

Θέτουμε $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux$. Άρα $dy = u\,dx + x\,du$.

Κατά συνέπεια $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$.

Επίσης, $f(x,y) = f(x,ux) = f(1,u)$, λόγω της ιδιότητας της f.

Άρα η εξίσωση $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ γίνεται:

$$u + x\frac{du}{dx} = f(1,u) \equiv g(u) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = g(u) - u \Leftrightarrow \frac{du}{g(u)-u} = \frac{dx}{x}$$ που

είναι χωριζομένων μεταβλητών.

Τη λύνουμε και μετά αντικαθιστούμε το u με $\frac{y}{x}$.

Παραδείγματα: 1) Να λυθεί η $y' = \frac{y+x}{x} \left(= f(x,y)\right)$

Λύση: Παρατηρούμε ότι $\frac{ty+tx}{tx} = \frac{y+x}{x}$.

Θέτουμε $u = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \Rightarrow dy = x\,du + u\,dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x} \Leftrightarrow \frac{x\,du + u\,dx}{dx} = \frac{ux+x}{x} = u+1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\,du + \cancel{u\,dx} = (u+1)\,dx = \cancel{u\,dx} + dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x\,du = dx \Leftrightarrow du = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow u = \int \frac{dx}{x} + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u = \ln|x| + c \Leftrightarrow \frac{y}{x} = \ln|x| + c \Leftrightarrow \boxed{y = x\ln|x| + cx}$$

2). Να λυθεί η δ.ε. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^4 + x^4}{x y^3}$.

$u = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y = xu$. Άρα $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{u\,dx + x\,du}{dx} = u + x\dfrac{du}{dx}$.

και $\dfrac{2y^4+x^4}{xy^3} = \dfrac{2u^4x^4 + x^4}{u^3x^4} = \dfrac{2u^4+1}{u^3}$

Άρα $u + x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2u^4+1}{u^3} \Leftrightarrow x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{2u^4+1}{u^3} - u =$

$= \dfrac{2u^4+1-u^4}{u^3} = \dfrac{u^4+1}{u^3}$. Επομένως $x\dfrac{du}{dx} = \dfrac{u^4+1}{u^3} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{u^3}{u^4+1}\,du = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{u^3\,du}{u^4+1} = \ln|x| + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}\int \frac{d(u^4+1)}{u^4+1} = \ln|x| + c \Leftrightarrow \frac{1}{4}\ln(u^4+1) = \ln|x| + c$$

$$\Leftrightarrow \ln(u^4+1) = 4\ln|x| + 4c = \ln(|x|^4) + 4c = \ln(x^4) + k,$$

όπου $k = 4c$. Άρα, αν $k = \ln\lambda$, $\lambda \in (0, +\infty)$, τότε

$$\ln(u^4+1) = \ln(x^4) + \ln\lambda = \ln(\lambda x^4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u^4 + 1 = \lambda x^4 \Leftrightarrow \frac{y^4}{x^4} + 1 = \lambda x^4 \Leftrightarrow \boxed{y^4 = \lambda x^8 - x^4}$$

3) Να λυθεί η δ.ε. $y' = \dfrac{2xy\,e^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}}$

Λύση: Κατ' αρχάς αν $f(x,y) = \dfrac{2xy\,e^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}}$

τότε $f(tx,ty) = \dfrac{2tx\,ty\,e^{(tx/(ty))^2}}{t^2y^2 + t^2y^2 e^{(tx/(ty))^2} + 2t^2x^2 e^{(tx/ty)^2}} =$

$$= \frac{2\cancel{t^2}xy\,e^{(x/y)^2}}{\cancel{t^2}\left(y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}\right)} = \frac{2xy\,e^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2e^{(x/y)^2} + 2x^2e^{(x/y)^2}} =$$

$= f(x,y)$

Άρα είναι μια ομογενής διαφορική εξίσωση
Επειδή στον εκθέτη εμφανίζεται ο λόγος $\frac{x}{y}$, θέτουμε
$u = \frac{x}{y}$ και όχι $u = \frac{y}{x}$

Άρα $u = \frac{x}{y} \Leftrightarrow x = uy \Leftrightarrow$ Το δεύτερο μέλος γίνεται:
$\Leftrightarrow y = \frac{x}{u}$

$$\frac{2xy\,e^{(x/y)^2}}{y^2 + y^2 e^{(x/y)^2} + 2x^2 e^{(x/y)^2}} = \frac{2uy^2 e^{u^2}}{y^2 + y^2 e^{u^2} + 2u^2 y^2 e^{u^2}} =$$

$$= \frac{2u e^{u^2}}{1 + e^{u^2} + 2u^2 e^{u^2}} = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d(uy)} = \frac{dy}{y\,du + u\,dy} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + e^{u^2} + 2u^2 e^{u^2}}{2u e^{u^2}} = \frac{y\,du + u\,dy}{dy} = y\frac{du}{dy} + u \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + e^{u^2} + \cancel{2u^2 e^{u^2}} - \cancel{2u^2 e^{u^2}}}{2u e^{u^2}} = y\frac{du}{dy} \Leftrightarrow \frac{1 + e^{u^2}}{2u e^{u^2}} = y\frac{du}{dy}$$

$$\Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{2u e^{u^2}}{1 + e^{u^2}}\,du \Leftrightarrow \int \frac{dy}{y} = \int \frac{2u e^{u^2}}{1 + e^{u^2}}\,du + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln|y| = \int \frac{(1 + e^{u^2})'\,du}{1 + e^{u^2}} + c \Leftrightarrow \ln|y| = \ln(1 + e^{u^2}) + c$$

Αν $c = \ln k$, τότε $\ln|y| = \ln\left(k \cdot (1 + e^{u^2})\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |y| = k(1 + e^{u^2}) \Leftrightarrow y = \pm k(1 + e^{u^2})$.
Θέτουμε $\lambda = \pm k$ και παίρνουμε $y = \lambda(1 + e^{u^2}) \underset{u = \frac{x}{y}}{=}$

$= \lambda(1 + e^{x^2/y^2})$. Άρα $y = \lambda(1 + e^{x^2/y^2})$ και η συνάρτηση εκφράζεται πεπλεγμένως.

4). $y' = \dfrac{2x^2+y^2}{2xy}$

Λύση: Κατά τα γνωστά $u = \dfrac{y}{x} \Leftrightarrow y = ux \Rightarrow$

$\Rightarrow dy = x\,du + u\,dx$

Άρα $x\dfrac{du}{dx} + u = \dfrac{2x^2+u^2x^2}{2ux^2} = \dfrac{2+u^2}{2u} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x\frac{du}{dx} = \frac{2+u^2}{2u} - u = \frac{2+u^2-2u^2}{2u} = \frac{2-u^2}{2u} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{2u\,du}{2-u^2} = \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{2u\,du}{2-u^2} = \ln|x| + c \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\int \frac{(2-u^2)'\,du}{2-u^2} = \ln|x| + c \Leftrightarrow -\ln|2-u^2| = \ln|x| + c$$

$\Leftrightarrow \ln|x| + \ln|2-u^2| + c = 0$. Θέτουμε $c = \ln k$, $k > 0$

και παίρνουμε $\ln(k|x(2-u^2)|) = 0 \Leftrightarrow k|x(2-u^2)| = 1$

$\Leftrightarrow x\left(2 - \dfrac{y^2}{x^2}\right) = \pm\dfrac{1}{k}$. Αν $\lambda = \pm\dfrac{1}{k}$, τότε

$$2x - \frac{y^2}{x} = \lambda \Leftrightarrow 2x^2 - y^2 = \lambda x \Leftrightarrow y^2 = 2x^2 - \lambda x.$$

Άρα $y = \sqrt{2x^2-\lambda x}$ ή $y = -\sqrt{2x^2-\lambda x}$.

Η Γενική Γραμμική Διαφορική εξίσωση $1^{ης}$ τάξης

$$y' + p(x)y = g(x), \quad \text{όπου } p(x), g(x)$$

συναρτήσεις του x.

Μέθοδος λύσης: Υπολογίζουμε μια αρχική συνάρτηση της $p(x)$, $\int p(x)dx$.

Πολλαπλασιάζουμε με $e^{\int p(x)dx}$ και παίρνουμε:

$$y' e^{\int p(x)dx} + p(x)\,y\,e^{\int p(x)dx} = g(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Το $1^{ο}$ μέλος είναι η παράγωγος της συνάρτησης

$y e^{\int p(x)dx}$.

Πράγματι, $\left(y e^{\int p(x)dx}\right)' = y' e^{\int p(x)dx} +$
$+ y \left(e^{\int p(x)dx}\right)' = y' e^{\int p(x)dx} + y e^{\int p(x)dx} \left(\int p(x)dx\right)' =$
$= y' e^{\int p(x)dx} + y e^{\int p(x)dx} \cdot p(x)$.

Άρα $\left(y e^{\int p(x)dx}\right)' = q(x) e^{\int p(x)dx} \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow y e^{\int p(x)dx} = \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{y = e^{-\int p(x)dx} \int q(x) e^{\int p(x)dx} dx + c e^{-\int p(x)dx}}$$

Ασκήσεις: 1) Να λυθεί η δ.ε. $y' - 2xy = x$.

Λύση: Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα

$$\int (-2x)dx = -\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}} = -x^2 \quad (\text{δεν βάζουμε } +c)$$

Πολλαπλασιάζουμε με e^{-x^2} και παίρνουμε

$$y' e^{-x^2} - 2xy e^{-x^2} = x e^{-x^2} \Longleftrightarrow \left(y e^{-x^2}\right)' = x e^{-x^2}.$$

Τώρα $y e^{-x^2} = \int x e^{-x^2} dx + c = -\frac{1}{2} \int (-x^2)' e^{-x^2} dx +$
$+ c = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c$.

Άρα $y e^{-x^2} = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + c \Longleftrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{2} + c e^{x^2}}$

2). $y' + \frac{4}{x} y = x^4$.

Λύση: $\int \frac{4}{x} dx = 4 \ln|x| = \ln(|x|^4) = \ln(x^4)$

Άρα $e^{\ln(x^4)} = x^4$. Πολλαπλασιάζουμε με x^4

και παίρνουμε: $y' x^4 + 4x^3 y = x^8 \Longleftrightarrow (y x^4)' = x^8$.

$$yx^4 = \int x^8 dx + c = \frac{x^9}{9} + c \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{x^5}{9} + \frac{c}{x^4}}$$

~~Άρα~~ $\cancel{\boxed{y = \frac{x^5}{9} + \frac{c}{x^4}}}$

3) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$y' + y = \sin x, \quad y(\pi) = 1.$$

<u>Λύση:</u> $\int 1 dx = x$. Πολλαπλασιάζουμε επί e^x και παίρνουμε $y'e^x + ye^x = e^x \sin x \Leftrightarrow (ye^x)' = e^x \sin x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow ye^x = \int e^x \sin x \, dx + c.$$

Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα:

$$I = \int e^x \sin x \, dx = \int (e^x)' \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x (\sin x)' dx =$$

$$= e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx = e^x \sin x - \int (e^x)' \cos x \, dx =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x + \int e^x (\cos x)' dx =$$

$$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx = e^x (\sin x - \cos x) - I.$$

Άρα $2I = e^x(\sin x - \cos x) \Leftrightarrow I = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2}$.

Επομένως $ye^x = \dfrac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = \frac{\sin x - \cos x}{2} + ce^{-x}. \quad \text{Τώρα } y(\pi) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 = \frac{\sin \pi - \cos \pi}{2} + ce^{-\pi} = \frac{0 - (-1)}{2} + ce^{-\pi} = \frac{1}{2} + ce^{-\pi}.$$

Άρα $ce^{-\pi} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow c = \dfrac{e^{\pi}}{2}$.

Επομένως $y = \dfrac{\sin x - \cos x}{2} + \dfrac{e^{\pi} e^{-x}}{2} = \boxed{\dfrac{\sin x - \cos x + e^{\pi - x}}{2}}$

4). Να λυθεί η δ.ε. $y' - \frac{3}{x^2}y = \frac{1}{x^2}$

Λύση:

Υπολογίζουμε το $\int\left(-\frac{3}{x^2}\right)dx = \frac{3}{x}$

Πολλαπλασιάζουμε επί $e^{3/x}$ και παίρνουμε

$$y'e^{3/x} - \frac{3}{x^2}ye^{3/x} = \frac{1}{x^2}e^{3/x} \Leftrightarrow \left(ye^{3/x}\right)' = \frac{e^{3/x}}{x^2}$$

$$\Leftrightarrow ye^{3/x} = \int \frac{1}{x^2}e^{3/x}dx + c = -\frac{1}{3}\int\left(\frac{3}{x}\right)'e^{3/x}dx + c =$$

$$= -\frac{1}{3}\int\left(e^{3/x}\right)'dx + c = -\frac{e^{3/x}}{3} + c$$

Άρα $ye^{3/x} = -\frac{e^{3/x}}{3} + c \Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{3} + ce^{-3/x}}$

Παραλλαγή της γραμμικής διαφορικής εξίσωσης 1ης τάξης είναι η διαφορική εξίσωση του Bernoulli

Γενική μορφή: $\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{1\}}$

Κάνουμε τον μετασχηματισμό $\boxed{z = y^{1-\alpha}}$

~~Επομένως~~ (Σχόλιο: Αν $a=1$, τότε $y' + p(x)y = q(x)y$
$\Leftrightarrow y' + (p(x) - q(x))y = 0$, γραμμική ομογενής δ.ε. 1ης τάξης)

Έχουμε $z = y^{1-\alpha} \Leftrightarrow y = z^{\frac{1}{1-\alpha}} \Rightarrow y' = \left(z^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)' =$

$$= \frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{1}{1-\alpha}-1}z' = \frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{1-1+\alpha}{1-\alpha}}z' = \frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}z'$$

Επομένως $\frac{1}{1-\alpha}z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}z' + p(x)z^{\frac{1}{1-\alpha}} = q(x)z^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}z' + p(x)z^{\frac{1}{1-\alpha}-\frac{\alpha}{1-\alpha}} = q(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1-\alpha}z' + p(x)z^{\frac{1-\alpha}{1-\alpha}} = q(x) \Leftrightarrow \boxed{z' + (1-\alpha)p(x)z = (1-\alpha)q(x)}$$

η οποία είναι γραμμική $1^{ης}$ τάξης:

<u>Παράδειγμα 1:</u> $y' + xy = xy^3$.

Θέτουμε $z = y^{1-3} = \frac{1}{y^2} \Rightarrow z' = -\frac{2}{y^3} y'$.

Άρα $-\frac{2}{y^3} y' - x\frac{2y}{y^3} = -\frac{2}{\cancel{y^3}} x \cancel{y^3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{2y'}{y^3} - 2x\frac{1}{y^2} = -2x \Leftrightarrow \boxed{z' - 2xz = -2x}$

που είναι γραμμική $1^{ης}$ τάξης.

$\int (-2x)\,dx = -x^2$, $\quad z' e^{-x^2} - 2x e^{-x^2} z = -2x e^{-x^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z e^{-x^2})' = (e^{-x^2})' \Leftrightarrow z e^{-x^2} = e^{-x^2} + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z = 1 + ce^{x^2} \underset{z=\frac{1}{y^2}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{y^2} = 1 + ce^{x^2} \Leftrightarrow y^2 = \frac{1}{1+ce^{x^2}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{\sqrt{1+ce^{x^2}}}$.

<u>Παράδειγμα 2:</u> $y' - \frac{3}{x} y = x^4 y^{1/3}$.

<u>Λύση:</u> $a = \frac{1}{3}$. $\quad z = y^{1-\frac{1}{3}} = y^{2/3} = \sqrt[3]{y^2} \Rightarrow z' = \frac{2}{3} y^{\frac{2}{3}-1} y' =$

$= \frac{2}{3} y^{-1/3} y' = \frac{2y'}{3y^{1/3}}$

Πολλαπλασιάζουμε με $\frac{2}{3y^{1/3}}$ και παίρνουμε:

$\frac{2y'}{3y^{1/3}} - \frac{3}{x}\frac{2}{3y^{1/3}} y = x^4 \frac{2}{3\cancel{y^{1/3}}} \cancel{y^{1/3}} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z' - \frac{2}{x} \underbrace{y^{1-\frac{1}{3}}}_{z} = \frac{2x^4}{3} \Leftrightarrow z' - \frac{2}{x} z = \frac{2x^4}{3}$.

$\int \left(-\frac{2}{x}\right) dx = -2\ln|x| = -\ln(x^2) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$.

$e^{\ln\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x^2}$. Πολλαπλασιάζουμε με $\frac{1}{x^2}$ και παίρνουμε:

$$\frac{z'}{x^2} - \frac{2}{x^3} z = \frac{2x^2}{3} \Leftrightarrow \left(\frac{z}{x^2}\right)' = \frac{2x^2}{3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{z}{x^2} = \frac{2}{3}\int x^2 dx + c = \frac{2}{3}\,\frac{x^3}{3} + c = \frac{2x^3}{9} + c$$

Άρα $z = \frac{2x^5}{9} + cx^2 \Leftrightarrow y^{2/3} = \frac{2x^5}{9} + cx^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = \left(\frac{2x^5}{9} + cx^2\right)^{3/2}$ (Αν θέλουμε μόνο τη θετική λύση)

Γενικά έχουμε $\sqrt[3]{y^2} = \frac{2x^5}{9} + cx^2 \Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{2x^5}{9} + cx^2\right)^3 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow y = \pm\sqrt{\left(\frac{2x^5}{9} + cx^2\right)^3} = \boxed{\pm\left(\frac{2x^5}{9} + cx^2\right)^{3/2}}$$