Διάλεξη 5

(1)

<u>Ορσ</u>: Έστω $A, B \subset \mathbb{R}$ και $f, g : A \to B$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Ορίζουμε το

(i) άθροισμα των f και g:

$f+g : A \to \mathbb{R}$ με $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$

(ii) γινόμενο των f και g:

$fg : A \to \mathbb{R}$ $(fg)(x) = f(x)g(x)$

(iii) γινόμενο λf

$\lambda f : A \to \mathbb{R}$ $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$

(iv) αν $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$

$f/g : A \to \mathbb{R}$, $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (το πηλίκο της f δια την g)

σχέση μερικής διάταξης

f είναι <u>μικρότερη</u> της g αν $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in A$ και θα γράφουμε

<u>$f \leq g$</u>

Ορσ : Έστω $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ (μη κενό) και $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Λέμε ότι η f είναι

(i) <u>αύξουσα</u> : $\forall x, y \in A$ με $x<y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$

και γράφουμε $f \nearrow$

(ii) <u>γνησίως αύξουσα</u> : $\forall x, y \in A$, με $x<y \Rightarrow f(x) < f(y)$

και γράφουμε $f \nearrow_{\text{γν}}$

(iii) <u>φθίνουσα</u> : $\forall x, y \in A$ με $x<y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$

και γράφουμε $f \searrow$

(iv) <u>γνησίως φθίνουσα</u> , $\forall x, y \in A$ με $x<y \Longrightarrow f(x) > f(y)$

και γράφουμε $f \searrow_{\text{γν}}$

(v) <u>μονότονη</u> : $f \nearrow$ ή $f \searrow$

(vi) <u>γνησίως μονότονη</u> : $f \nearrow_{\text{γν}}$ ή $f \searrow_{\text{γν}}$

<u>Ορσ</u>: Έστω $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$.

Η f λέγεται

(i) <u>άνω φραγμένη</u>, αν $\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leq M$, $\forall x \in A$.

(ii) <u>κάτω φραγμένη</u>, αν $\exists m \in \mathbb{R} : f(x) \geq m$, $\forall x \in A$

(iii) <u>φραγμένη</u>, αν είναι άνω & κάτω φραγμένη.

(δηλ. $\exists m, M \in \mathbb{R} : m \leq f(x) \leq M$)

<u>Σχόλια</u>

Η f είναι φραγμένη $\iff \exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M$

<u>Ορσ</u>: Μια $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται <u>άρτια</u>, αν

$$f(x) = f(-x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Μια $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, λέγεται <u>περιττή</u>, αν

$$f(-x) = -f(x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

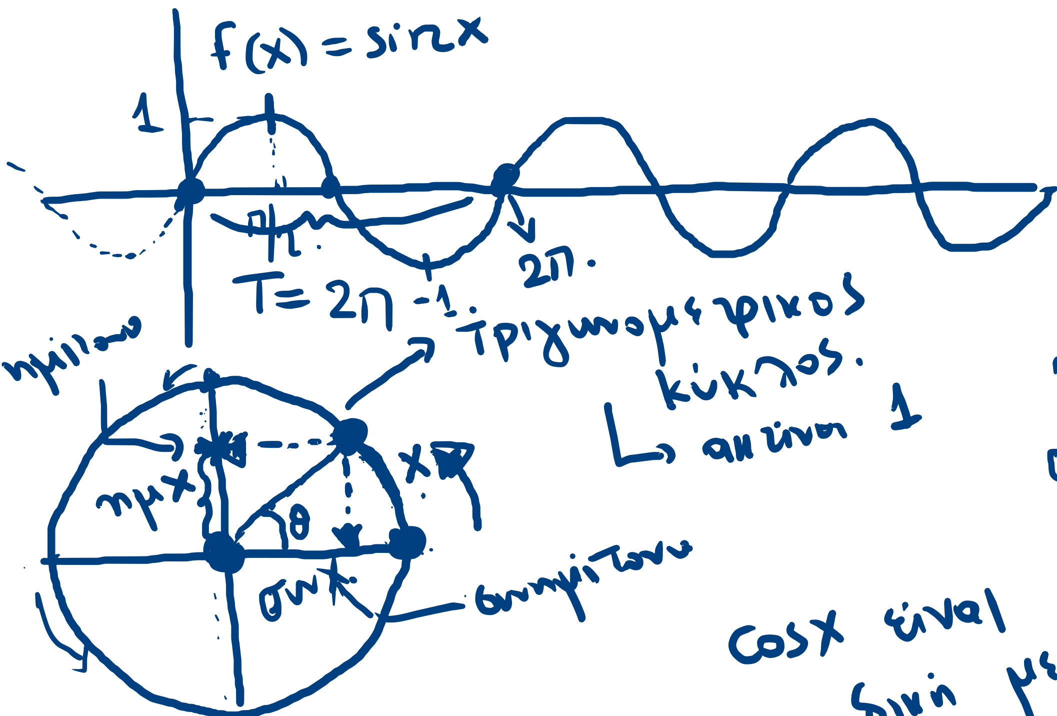
π.χ. x^2, $\cos x$, $|x|$, x^{2k}, $k \geq 1$ είναι <u>άρτιες</u>

x, x^3, x^{2k+1}, $k \geq 0$, $\sin x$, είναι <u>περιττές</u>

Ορσ: Μια $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται περιοδική (με περίοδο T), αν $\exists T > 0$:

$$f(x+T) = f(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$$

π.χ.



Τριγωνομετρικός κύκλος.
↳ ακτίνα 1

ημx = sinx → ημίτονο.
συνx = cosx → συνημίτονο.

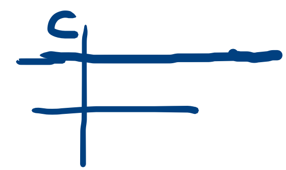
cosx είναι περιοδική με περίοδο 2π

ΟΡΙΑ & ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Ορσ: Έστω $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in A$. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0

$\overset{\text{ορσ.}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$: $\forall x \in A$ με $|x - x_0| < \delta$, να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Παραδείγματα



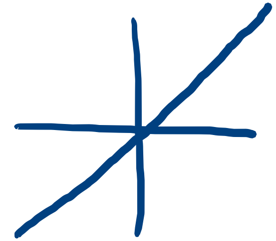
(1): $f(x) = c \to$ σταθερό, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Η f είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$. Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$, και έστω $\varepsilon > 0$. Όποιο $\delta > 0$ και να πάρουμε, π.χ. $\delta = 1$, έχουμε αν $|x - x_0| < 1$, τότε

$$|\underbrace{f(x)}_{c} - \underbrace{f(x_0)}_{c}| = 0 < \varepsilon,$$

άρα πράγματι η f είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

(2) Έστω $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$



Είναι συνεχής $\forall x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$.

Θέλουμε $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ (, όταν $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.) για κάποιο $\delta > 0$.

$$\iff |x - x_0| < \varepsilon$$

Για $\delta = \varepsilon$, έχουμε $|x - x_0| < \delta \overset{=\varepsilon}{\Longrightarrow} |x - x_0| = |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(3) Έστω $f(x) = 3x - 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, είναι συνεχής.

Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$.

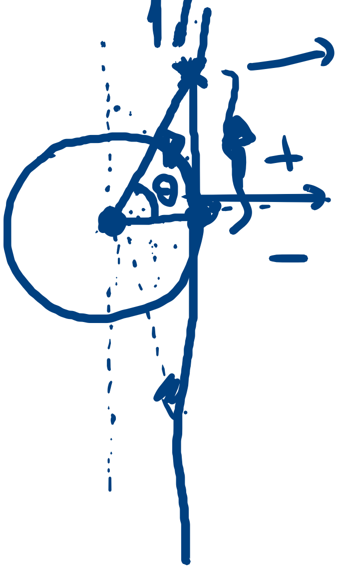
$$|f(x) - f(x_0)| = |3x - 1 - (3x_0 - 1)| = 3|x - x_0|$$

Θέλουμε $|f(x) - f(x_0)| = 3|x - x_0| < \varepsilon \iff |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{3}$

άρα για $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ πετυχαίνουμε αυτό που θέλαμε.

(4) Οι συναρτήσεις $\cos x$, $\sin x$, x^{α}, α^{x} $(\alpha>0)$ είναι συνεχείς.

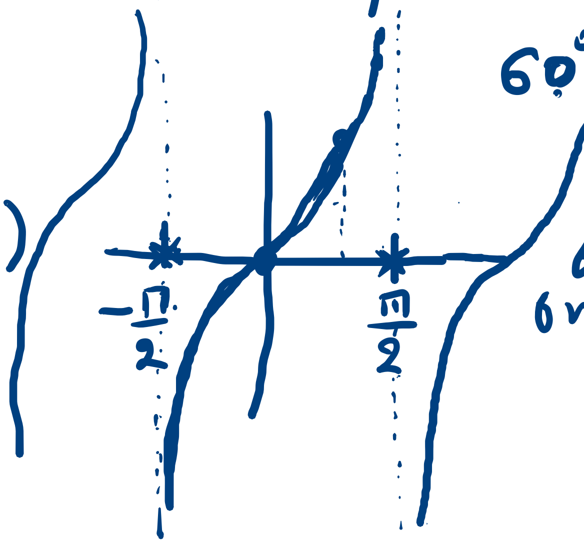
Η συνάρτηση $\log x$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$



άξονας των εφαπτομένων

$\theta = \frac{\pi}{3}$

$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}\right)$



$60^{\circ} = \frac{\pi}{3}$

η $\tan(x)$ είναι συνεχής στα σημεία που ορίζεται.

Θεώρημα (αρχή της μεταφοράς)

Η f είναι συνεχής στο $x_0 \Longleftrightarrow$ για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in A$ και $x_n \to x_0$, ισχύει ότι $f(x_n) \to f(x_0)$.

χρήσιμο. (για την απόδειξη της μη συνέχειας σε ένα σημείο).
Η f δεν είναι συνεχής στο x_0, αν υπάρχει μία ακολουθία (x_n) με $x_n \to x_0$ και $f(x_n) \not\to f(x_0)$

Πρόταση 1.

Έστω $f, g : A \to \mathbb{R}$ με f, g συνεχείς στο $x_0 \in A$, $\lambda \in \mathbb{R}$
τότε
(i) $f+g$, λf και $f \cdot g$ συνεχείς στο x_0
(ii) αν $g(x) \neq 0$, $\forall x \in A$, τότε f/g είναι συνεχής στο x_0

π.χ.

δείξαμε ότι η $f(x)=x$, $g(x)=\sin x$, είναι συνεχείς

άρα $x+\sin x$, $x\sin x$ είναι συνεχείς

επίσης x^n, $n\geq 1$ είναι συνεχείς συναρτ.

$$\underbrace{x\cdot x\cdot \ldots \cdot x}_{n-\text{φορές}}, \quad \underbrace{a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\ldots+a_n x^n}_{\text{κάθε πολυώνυμο του } x \text{ είναι συνεχής}}$$

Πρόταση (συνέχεια της σύνθεσης συναρτήσεων)

Έστω $f: A \to B \subset \mathbb{R}$, συνεχής στο $x_0 \in \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ συνεχής στο $f(x_0)$. Τότε η $g\circ f: A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο x_0.

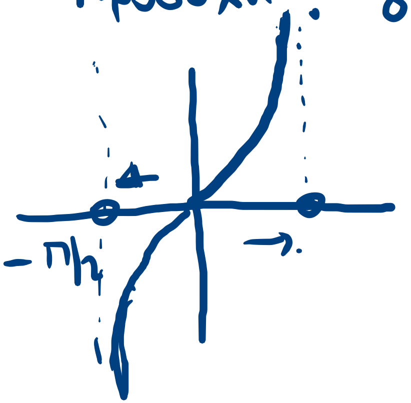
<u>Θεώρημα</u> : Έστω $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής

$\Longrightarrow$ f φραγμένη

δηλ. $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$: $m \leq f(x) \leq M$,

$\forall\, x \in [\alpha, \beta]$.

Προσοχή! δεν ισχύει για μη κλειστό διάστημα



$f(x) = \tan x$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

η f είναι ανοικτό διάστημα.

συνεχής στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ όμως

<u>δεν είναι φραγμένη</u>.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, Τότε η f παίρνει <u>μέγιστη</u> & <u>ελάχιστη</u> τιμή, δηλ. $\xi_1, \xi_2 \in [a, b]$:

$$f(\xi_1) \leq f(x) \leq f(\xi_2)$$

[πριν λέγαμε $m \leq f(x) \leq M$]

$\longrightarrow$ δε σημαίνει ότι ισχύει η ισότητα για κάποιο x.

Όμως το Θεώρημα αυτό μας λέει ότι $\exists\, m, M$ τα οποία μπορούμε να τα πετύχουμε με τιμές της f.

12

<u>Θεώρημα</u>. Αν $f:[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ξ_1, ξ_2 όπως στο προηγ. Θεώρημα, τότε η f παίρνει όλες τις τιμές ανάμεσα στα $f(\xi_1)$ και $f(\xi_2)$, δηλ. αν $f(\xi_1) \leq y \leq f(\xi_2)$, τότε ~~θα~~ υπάρχει $x \in [a,b]$ με $y = f(x)$.

ή διαφορετικά
$$f([a,b]) = \{f(x) : x \in [a,b]\} = [f(\xi_1), f(\xi_2)].$$

<u>Πόρισμα</u>

Αν $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(a), f(b)$ ετερόσημα τότε $\exists\, \xi \in [a,b] : f(\xi) = 0$. (Διαφορετικό πρόσημο) δηλ. η εξίσωση $f(x) = 0$, έχει λύση στο $[a,b]$.

<u>Πόρισμα</u>: Κάθε πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μία πραγμ. ρίζα.

<u>Ορσ</u>: Έστω $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Λέμε ότι το x_0 είναι <u>σημείο συσσώρευσης</u> (σ.σ.) του A, αν $\forall \delta > 0$, $\exists x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$.

δηλ. υπάρχει ένα στοιχείο $x \in A$, που είναι θα είναι διαφορετικό από το x_0, $\forall \delta > 0$.

Αν το x_0 <u>δεν είναι σημείο συσσώρευσης</u> και $x_0 \in A$ τότε λέγεται <u>μεμονωμένο σημείο</u>.

Παραδείγματα

① $A = [0,1]$.

Τότε τα σ.σ. του A είναι όλα τα σημεία του και κανένα άλλο.

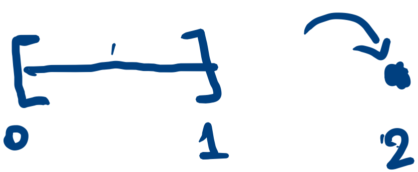
αν $x_0 \in (0,1)$ είναι σ.σ. του A.

Το ίδιο και για το 0 και 1.

$\forall x \notin [0,1]$ έχουμε το x δεν είναι σ.σ. του A.

Δεν έχει και μεμονωμένα σημεία.

$[0,1] \cup \{2\}$



είναι μεμ. σημείο του A. (απομακρυσμένο από τα υπόλοιπα)

(2) $B=(0,1)$ έχει σ.σ.

όλα τα σημεία του $[0,1]$

και δεν έχει μεμον. σημεία.

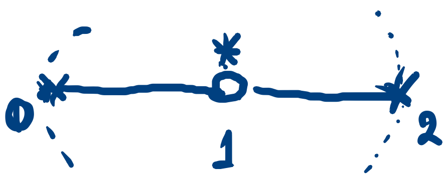
$0 \notin B$, $1 \notin B$,

παρ' όλα αυτά είναι σ.σ. του B.

(3) $C = (0,1) \cup (1,2)$

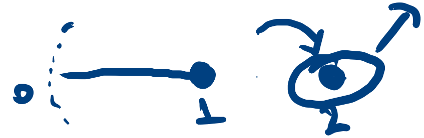
έχει σ.σ. το $[0,2]$

και δεν έχει μεμ. σημεία



(4) $D = (0,1] \cup \{2\}$ και ένα μεμ. σημείο

σ.σ. του $D \to [0,1]$



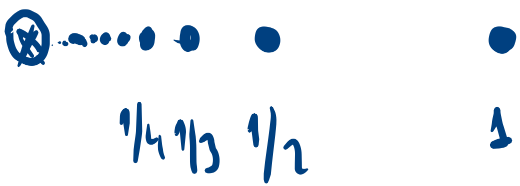
μεμ. σημείο.

(5) $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Το $\mathbb{N}^*$ δεν έχει κανένα σημείο συσσώρευσης, αλλά όλα τα στοιχεία τα είναι μεμονωμένα σημεία.

(6)

$$R = \left\{ \frac{1}{n} : n \geq 1 \right\} = \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots \right\}.$$



κάθε στοιχείο του R είναι μεμονωμένο σημείο

0 είναι σημείο συσσώρευσης του R.

$$\frac{1}{n} \longrightarrow 0$$

Ορσ: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 σ.σ. του A, λέμε ότι το όριο της f, όταν το x τείνει στο x_0, υπάρχει και ισούται με $\ell \in \mathbb{R}$, αν:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \text{ με } 0 < |x - x_0| < \delta$$

να ισχύει ότι $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

• Επίσης, αν το όριο υπάρχει, τότε είναι μοναδικό και γράφουμε $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$

Ακόμα ορίζεται $\ell \in \{-\infty, +\infty\}$ και έχουμε τον εξής ορισμό

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, αν

$\forall M > 0 , \exists \delta > 0 : \forall x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$

να ισχύει $f(x) > M$

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, αν

$\forall M > 0 , \exists \delta > 0 : \forall x \in A$ με $0 < |x - x_0| < \delta$

να ισχύει $f(x) < -M$

- η $f(x)$ τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, καθώς το x τείνει στο x_0 αντίστοιχα.

19

Ορίζονται επίσης και πλευρικά όρια μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0.

Έχουμε $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$, όταν περιορίζουμε το x, μόνο για $x < x_0$ $(-\infty, x_0)$

* $\forall \varepsilon > 0, \; \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$
$[(\Leftrightarrow) \; 0 < x_0 - x < \delta]$

να ισχύει, $|f(x) - \ell| < \varepsilon$.

Το όριο από τα αριστερά

Αντίστοιχα ορίζεται και το όριο από τα δεξιά

$\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

<u>Ορσ</u> : Έστω $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$.

Θα λέμε ότι το <u>$+\infty$</u> είναι σ.σ. του A αν <u>$\forall M > 0$</u>, $\exists x \in A$ με $x > M$.

Αντίστοιχα, θα λέμε ότι το <u>$-\infty$</u> είναι σ.σ. του A, αν $\forall M > 0$, $\exists x \in A$: $x < -M$

π.χ. στο $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ το $+\infty$ είναι σ.σ. του $\mathbb{N}^*$.

<u>Ορσ</u>: Έστω $f: A \to \mathbb{R}$, όπου το $+\infty$ είναι σ.σ. του A. Λέμε ότι

(i) Το <u>όριο της f</u>, <u>καθώς το x τείνει στο $+\infty$</u> υπάρχει και είναι $\ell \in \mathbb{R}$, αν

$\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0 : \forall x \in A$ με $x > M$,

να ισχύει $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

και συμβολιζ. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

(ii) η <u>f τείνει στο $+\infty$</u>, όταν το x <u>τείνει στο $+\infty$</u>,

αν $\forall M_1 > 0, \exists M_2 > 0 : \forall x \in A$ με $x > M_2$, ισχύει $f(x) > M_1$.

Θα συμβολ. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

(iii) η f τείνει στο $-\infty$, όταν το x τείνει στο $+\infty$

αν $\forall M_1 > 0,\ \exists M_2 > 0 : \forall x \in A$ με $x > M_2$

να ισχύει $f(x) < -M_1$

και το συμβ. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

Δοκιμάστε εσείς να γράψετε όλα τα

δυνατά όρια για $x \to -\infty$.

$\begin{pmatrix} \ell \\ +\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$

Θεώρημα (αρχή της μεταφοράς για το όριο) 23

Έστω $f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 σ.σ. του A.

Τότε $\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff$

για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \in A$

και $x_n \neq x_0$, και $x_n \to x_0$,

να ισχύει $f(x_n) \to \ell$

Πόρισμα

$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq \ell$, αν $\exists$ ακολ. (x_n), με $x_n \to x_0$

όπου $x_n \neq x_0$, και $x_n \in A$:

$f(x_n) \not\to \ell$.

Προσοχή!

Για να μιλάμε για συνέχεια της $f: A \to \mathbb{R}$ σε ένα σημείο x_0, πρέπει $x_0 \in A$,
ενώ για να εξετάζουμε το όριο της f σε κάποιο x_0, πρέπει το x_0 να είναι σημείο συσσώρευσης του πεδίου ορισμού της
(μπορεί να ανήκει ή να μην ανήκει στο πεδίο ορισμού της f)

Ειδικά όταν το x_0 είναι μεμονωμένο σημείο του A, τότε η f είναι συνεχής στο x_0,
ενώ το όριο της f στο x_0 δεν ορίζεται.

Παράδειγμα

$$f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad x \neq 0$$

Το 0 δεν ανήκει στο π.ο. της f, άρα δεν έχει νόημα να εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο 0.

Όμως το 0 είναι σ.σ. της f και αποδεικν. ότι

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Παράδ

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad x \neq 0$$

Δεν έχει νόημα η συνέχεια της f στο 0 $(0 \notin A)$

Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή της μεταφοράς για να δείξουμε τη μη ύπαρξη του ορίου.

Επιλέγουμε $x_n = \frac{1}{n\pi}$, $y_n = \frac{1}{2n\pi + \frac{\pi}{2}}$.

Τότε $\sin\frac{1}{x_n} = \sin(n\pi) = 0 \longrightarrow 0$

$\sin\frac{1}{y_n} = \sin\left(2n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \longrightarrow 1$

Τελικά $\nexists \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ (από την αρχή της της μεταφοράς).