i) $y' = y^2$, $y(0)=1$

1^{η}) $y=0\ \forall t$, $y'=0$ τότε η $y=0$ λύση όμως $y(0)=1$ άρα απορ.

2^{η}) $y\neq 0\ \forall t$ τότε $\frac{dy}{y^2} = dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dt + c_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -\frac{1}{y} = t + c_1 \Rightarrow y = \frac{-1}{t+c_1} \overset{y(0)=1}{\Rightarrow} 1 = \frac{-1}{c_1} \Leftrightarrow c_1 = -1$

Άρα $\left(y = \frac{-1}{t-1} = \frac{1}{1-t} \quad \text{για } t \in (-\infty, 1) \right)$

ii) $y' = y^2$, $y(1)=0$

1^{η}) $y=0\ \forall t$ λύση και ισχύει πως $y(1)=0$. Άρα $y=0$

iii) $y' = -y^2$, $y(1)=a$

1^{η}) $y(t)=0$ λύση όμως $y(1)=a$. Άρα η $y(t)=0$ λύση αν $a=0$

2^{η}) $y\neq 0\ \forall t$ τότε $\frac{dy}{-y^2} = dt \Rightarrow \int \frac{dy}{-y^2} = \int dt + c \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{y} = t + c \Leftrightarrow y = \frac{1}{t+c} \overset{y(1)=a}{\Rightarrow} a = \frac{1}{1+c} \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} 1+c = \frac{1}{a} \Leftrightarrow c = \frac{1}{a} - 1$

Άρα $y = \frac{1}{t+\frac{1}{a}-1}$ με $t - \frac{1}{a} - 1 \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 1 + \frac{1}{\alpha}$

Τελικά αν $\left(\begin{array}{lll} a=0 \text{ τότε} & y=0 & \forall t \\ a\neq 0 & y = \frac{1}{t+\frac{1}{a}-1} & t \neq 1+\frac{1}{\alpha} \end{array} \right)$

$\boxed{y' + y = \int_0^2 y\,dt} = c_0$

$y(0) = 1$

$e^t y' + e^t y = e^t c_0 \Leftrightarrow$

$\Rightarrow (e^t y)' = (c_0 e^t)' \Rightarrow$

$\Rightarrow e^t y = c_0 e^t + c_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y = c_0 + \dfrac{c_1}{e^t}$ $t \in \mathbb{R}$, $c_0, c_1 \in \mathbb{R}$

Αν $y = 0$ τότε $\int_0^2 0\,dt = \cancel{0}$ ~~ά..~~

απορ αφού $y(0) = 1$

Λύση: $\boxed{y = 1 - e^2 + e^2 e^{-t} \quad \forall t}$

$t = 0 \Rightarrow y = 1 = c_0 + c_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow c_1 = 1 - c_0$

Άρα $y = c_0 + \dfrac{1 - c_0}{e^t} \quad \forall t$

$\int_0^2 y\,dt = \int_0^2 c_0 + \dfrac{1 - c_0}{e^t}\,dt = c_0 \Leftrightarrow$

$((c_0 - 1)e^{-t})' = (c_0 - 1)e^{-t}(-1)$

$\Leftrightarrow c_0 = [t c_0]_0^2 + [(c_0 - 1)e^{-t}]_0^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c_0 = 2c_0 + \dfrac{c_0 - 1}{e^2} - \dfrac{c_0 - 1}{e^0} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cancel{c_0} = \cancel{c_0} + 1 + \dfrac{c_0 - 1}{e^2} \Leftrightarrow \dfrac{1 - c_0}{e^2} = 1 \Leftrightarrow 1 - c_0 = e^2 \Leftrightarrow c_0 = 1 - e^2.$

Δηλαδή: $y = 1 - e^2 + \dfrac{1 - 1 + e^2}{e^t} = \boxed{1 - e^2 + \dfrac{e^2}{e^t} \quad \forall t}$

Επαλ//. $\int_0^2 y\,dt = [t - te^2 - e^2 e^{-t}]_0^2 = (2 - 2e^2 - e^2 e^{-2}) - (0 - 0 - e^2 e^0) =$

$= 2 - 2e^2 - 1 + e^2 = 1 - e^2.$

• $y' + y = -e^2 e^{-t} + 1 - e^2 + e^2 e^{-t} = 1 - e^2 = \int_0^2 y\,dt$

iv) $y' = t^2(y-1)$

$y(0)=2$.

1η) $y=1 \ \forall t \Rightarrow y'=0 = t^2(1-1)$, όμως $y(0)=2$.
Άρα απορ.

2η) $y\neq 1$ τότε $\frac{dy}{y-1} = t^2\,dt \Rightarrow \int \frac{dy}{y-1} = \int t^2\,dt + c_1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln|y-1| = \frac{t^3}{3} + c_1 \Leftrightarrow |y-1| = e^{\frac{t^3}{3}+c_1}$

(*)
$y-1=0 \Leftrightarrow e^{\frac{t^3}{3}+c_1} = 0$ αδύνατη στο $\mathbb{R}$. Επίσης η $y-1$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής και αφού δεν μηδενίζεται τότε θα διατηρεί πρόσημο, $y(0)=2>0 \Rightarrow |y-1| = y-1$

(Εάν δεν διατηρούσε πρόσημο τότε από Θ Bolzano στο διάστημα όπου αλλάζει πρόσημο θα προέκυπτε ρίζα!)

Άρα $y = e^{c_1}e^{t^3/3}+1 = ce^{t^3/3}+1 \overset{y(0)=2}{\Rightarrow} 2 = ce^{0}+1 = c+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow c=1$ Άρα $\left(y = e^{t^3/3}+1 \quad \forall t\right)$

vi) $y' + \frac{1}{t}y = 0$ $\quad t>0$, $y(1)=2$ $\Leftrightarrow y' = -\frac{1}{t}y \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{-dt}{t} \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int -\frac{dt}{t} + k_1$

$\Rightarrow \ln|y| = -\ln|t| + c_1 \overset{t>0}{=} -\ln t + c_1 \Leftrightarrow |y| = e^{c_1}e^{\ln t^{-1}} = e^{c_1}\cdot\frac{1}{t} \Rightarrow$

y συνεχής
$\Rightarrow y = e^{c_1}\cdot\frac{1}{t} = \frac{c}{t} \overset{y(1)=2}{\Rightarrow} 2 = \frac{c}{1} \Leftrightarrow c=2$.

Άρα $\left(y = \frac{2}{t} \quad t>0\right)$ Αν είχαν $y=0$ $\forall t$ επαληθεύει τη σχέση όμως $y(1)=2$ άρα απορ.

2) $ty' + 6y = 3ty^{4/3}$

• Αν $y=0 \ \forall t$, $y'=0$ τότε $0=0 \ \forall t$
Δηλ $y=0$ λύση

$y \neq 0 \ \forall t$ τότε: για $t \neq 0$ έχουμε.

$$y' + \frac{6}{t} y = 3 y^{4/3} \quad ①$$

Θέτουμε $v = y^{1-\frac{4}{3}} = y^{-1/3} \ (= v(t))$

$$v' = \underbrace{-\frac{1}{3} \cdot y^{-4/3}} \cdot y'$$

$\left(\cdot -\frac{1}{3} y^{-4/3}\right)$

$$① \Leftrightarrow -\frac{1}{3} y^{-4/3} \cdot y' + -\frac{1}{3} \cdot \frac{6}{t} \cdot y \cdot y^{-4/3} = -\frac{1}{3} \cdot y^{-4/3} \cdot y^{4/3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow v' + \frac{(-2)}{t} y^{-1/3} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow v' - \frac{2}{t} \cdot v = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow$$

$$e^{\int -\frac{2}{t}} = e^{-2\ln t} = e^{\ln t^{-2}} = t^{-2} = \frac{1}{t^2}$$

$\left(\cdot \frac{1}{t^2}\right)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{t^2} v' - \frac{2}{t^3} v = \frac{-1}{3t^2} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{t^2} \cdot v\right)' = \left(\frac{1}{3t}\right)' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{t^2} \cdot v = \frac{1}{3t} + c \Leftrightarrow v = \frac{t^2}{3t} + ct^2 \Leftrightarrow v = \frac{t}{3} + ct^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^{-1/3} = \frac{t}{3} + ct^2 \Leftrightarrow y = \left(\frac{t}{3} + ct^2\right)^{-3} \quad c \in \mathbb{R}$$

• Αφού βρήκαμε $y^{-1/3} = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$ τότε πρέπει $y \neq 0$, $y \geq 0 \Rightarrow y > 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{3} + ct^2 > 0 \Leftrightarrow (t > 0 \text{ και } t > -1/3c) \text{ ή } (t < 0 \text{ και } t < -1/3c)$$

$y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2 \Leftrightarrow$ ~~Παρατήρηση~~

$\Rightarrow y' - 1 = y^2 - 2ty + t^2 = (y-t)^2.$

Αν $v = v(t) = y - t$

τότε $v' = y' - 1$

Δηλαδή $v' = v^2 \Leftrightarrow \dfrac{dv}{v^2} = dt \;\ldots\; v = \dfrac{-1}{t+c} = y - t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(y = t - \dfrac{1}{t+c} \quad t \neq -c. \right)$ (θα μπορούσε να λυθεί και ως Riccati.)

Επαλήθευση: $y' = \left(t - \dfrac{1}{t+c}\right)' = 1 - \dfrac{(-1)}{(t+c)^2} = 1 + \dfrac{1}{(t+c)^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y' - 1 = \dfrac{1}{(t+c)^2}.$

$(y-t)^2 = \left(\dfrac{-1}{t+c}\right)^2 = \dfrac{1}{(t+c)^2}.$ ✓

1) $ty' - y = t^2 \quad t > 0 \Leftrightarrow y' - \dfrac{1}{t} y = t \Leftrightarrow \Big\} \; e^{\int -\frac{1}{t}} = e^{-\ln t} = \dfrac{1}{t}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{t} y' - \dfrac{1}{t^2} y = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{t} y\right)' = (t)' \Rightarrow \dfrac{1}{t} y = t + c \Leftrightarrow \left(y = t^2 + ct \quad t > 0 \right)$

Επαλ: $ty' - y = t(2t + c) - (t^2 + ct) = 2t^2 + ct - t^2 - ct = t^2.$ ✓