1) i) $\begin{pmatrix} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \dfrac{dy}{y^2} = dt \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int dt + c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} = t + c.$$

$1 = y(0) \Rightarrow -1 = 0 + c \Rightarrow c = -1.$

$$-\frac{1}{y} = t - 1 \xRightarrow{y \neq 0}$$

$\Rightarrow y = -\dfrac{1}{t-1}$, $t \neq 1$, οι λύσεις της δ.ε, κ

επειδή είναι Π.Α.Τ:

οπότε $t \in (-\infty, 1)$.

ii) $\begin{pmatrix} y' = y^2 \\ y(1) = 0 \end{pmatrix}$. Η $y(1)=0$ λύση της δ.ε και μοναδική

iii) $\begin{pmatrix} y' = -y^2 \\ y(1) = a \end{pmatrix}$. $-\dfrac{dy}{y^2} = dt \Rightarrow \dfrac{1}{y} = t + c$

$$y = \frac{1}{t+c}, \quad t \neq c.$$

- Αν $a = 0$ η $y(1)=0$ λύση
- Αν $a \neq 0$:

$y(t) = \dfrac{1}{t+c}$, $y(1) = a \Rightarrow \dfrac{1}{t+c} = a \Rightarrow$

$\Rightarrow c = \dfrac{1}{a} - t$. Άρα $y(t) = \dfrac{1}{t - t + \frac{1}{a}} = a.$

$y(t) = a$ λύση και επειδή Π.Α.Τ τότε μόνο $y(1)=a$

είναι λύση. Άρα η $y(t)=a$ είναι λύση, $a\in\mathbb{R}$.

iv) $\begin{pmatrix} y' = t^2(y-1) \\ y(0)=2 \end{pmatrix}$. $\quad \dfrac{dy}{y-1} = t^2\,dt$

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int t^2\,dt + c_1$$

$$\ln|y-1| = \frac{t^3}{3} + c_1$$

$$|y-1| = e^{c_1}\cdot e^{\frac{t^3}{3}} = c\cdot e^{\frac{t^3}{3}}$$

• $y>1$: $\quad y = 1 + ce^{\frac{t^3}{3}}$

$y(0)=2 \Rightarrow 2 = 1 + c \Rightarrow c=1$

$$y = 1 + e^{\frac{t^3}{3}}.$$

• $y<1$: $\quad y = 1 - ce^{\frac{t^3}{3}}$, δεν μπορεί, διότι $y(0)=2>1$.

οπότε $y(t) = 1 + e^{\frac{t^3}{3}}$ λύση της δ.ε.

v) $\begin{pmatrix} y'+y = \int_0^2 y(t)\,dt \\ y(0)=1 \end{pmatrix}$ $\qquad c_1 = \int_0^2 y(t)\,dt$

$$\int_0^2 (y'+y)\,dt = \int_0^2 c_1\,dt$$

$$\int_0^2 y'\,dt + c_1 = \int_0^2 c_1\,dt$$

$$c_1\left(1-\int_0^2 dt\right) = \int_0^2 y'\,dt$$

$$c_2 = \frac{\int_0^2 y'(t)\,dt}{1-\int_0^2 dt} = y(0)-y(2).$$

Άρα $\quad y'+y = y(0)-y(2).$

πολλαπλ. με ολοκληρωτικό παράγοντα $\mu = e^{\int dt} = e^t.$

$$(e^t\cdot y)' = (1-y(2))\cdot e^t. \qquad y(0)=1.$$

ολοκληρώνοντας: $\quad e^t\cdot y = e^t(1-y(2))+c.$

$y(0)=1, \quad e^0 = e^0(1-y(2))+c \Rightarrow c = y(2)-1.$

Άρα $\quad e^t\cdot y = (1-y(2))\cdot(e^t-1)$

$$y = (1-y(2))\cdot\left(\frac{e^t-1}{e^t}\right),$$ η λύση της δ.ε.

vi) $\left(y'+\dfrac{1}{t}y = 0 \quad (1), \quad t>0, \quad y(1)=2\right)$

$\mu(t) = e^{\int \frac{1}{t}dt} = |t| = t.$

$(1) \xrightarrow{\cdot\mu(t)} (t\cdot y)' = 0. \Rightarrow ty = c \Rightarrow y = \dfrac{c}{t}, \quad t>0.$

$y(1)=2$, άρα $\quad c=2.$

Συνεπώς $\quad y(t) = \dfrac{2}{t}, \quad t>0,$ λύση.

Παρατηρούμε ότι $y(t)=0$ επίσης λύση.

- $y(t)=0$ λύση της δ.ε. $\quad t>0$

- $y(t)=\frac{2}{t}$ λύση της δ.ε

2)

$$ty'+6y=3ty^{\frac{4}{3}} \overset{t\neq 0}{\Rightarrow}$$
$$y'+\frac{6}{t}y=3y^{\frac{4}{3}} \quad (1)$$

θέτω $u=y^{1-\frac{4}{3}} \Rightarrow u=y^{-\frac{1}{3}}$

$$u'=-\frac{1}{3}y^{-\frac{4}{3}}y' \quad (2)$$

$$(1) \xRightarrow{\cdot(-\frac{1}{3})\cdot y^{-\frac{4}{3}}} u'-\frac{2}{t}\cdot u=-1$$

$$\mu=e^{\int -\frac{2}{t}dt}=t^{-2}.$$

$$(u\cdot t^{-2})'=-t^{-2}$$

$$ut^{-2}=+t^{-1}+c$$

$$\overset{t\neq 0}{\Longrightarrow} u=+t+ct^2.$$

$$\overset{u=y^{-\frac{1}{3}}}{\Longleftrightarrow} y^{-\frac{1}{3}}=t+ct^2$$

Γενική λύση: $\quad y(t)=\frac{1}{(t+ct^2)^3}, \quad t\neq 0$

3) $y' = 1 + t^2 - 2ty + y^2$.

$$y' + 2ty = y^2 + 1 + t^2 \quad (1), \text{ προφανής } y_1(t) = t$$

$$y = y_1 + \frac{1}{u}$$

$$y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$$

$$y^2 = y_1^2 + \frac{2y_1}{u} + \frac{1}{u^2}$$

$$(1) \Rightarrow \quad y_1' - \frac{u'}{u^2} + 2t y_1 + 2t\frac{1}{u} = y_1^2 + \frac{2y_1}{u} + \frac{1}{u^2} + 1 + t^2$$

$$-\frac{u'}{u^2} + 2t \cdot \frac{1}{u} = \frac{2t}{u} + \frac{1}{u^2}$$

$$+\frac{u'}{u^2} + \frac{1}{u^2} = 0.$$

$$u' + 1 = 0$$

$$du = -dt$$

$$u = -t + c$$

$$\frac{1}{u} = \frac{1}{c-t}$$

$$\frac{1}{u} + t = \frac{1}{c-t} + t$$

Γενική λύση: $\quad y = t + \dfrac{1}{c-t}, \quad t \neq c.$

4)

$$ty' - y = t^2 \quad , t > 0.$$

$$\xrightarrow{t \neq 0} y' - \frac{1}{t} \cdot y = t \quad (1)$$

$$\mu = e^{\int -\frac{1}{t} dt} = \frac{1}{t} .$$

$$(1) \xrightarrow{\cdot \mu} \left(y \cdot \frac{1}{t}\right)' = 1$$

$$y \cdot \frac{1}{t} = t + c$$

$$y = t^2 + ct \quad , t > 0.$$

Άσκηση: $\underbrace{(5t^2-y)}_{M}dt + \underbrace{t}_{N}dy = 0$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial N}{\partial t} = 1, \quad \text{όχι ακριβής.}$$

$$\mu = e^{\int f(t)dt} = e^{\int \frac{1}{t}\cdot(-1-1)dt} = \frac{1}{t^2}$$

Άρα η δε: $\left(5 - \frac{y}{t^2}\right)dt + \frac{1}{t}dy = 0$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 5 - \frac{y}{t^2}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{1}{t},$$

$$\int \partial F = \frac{1}{t}\int dy \overset{+C_1}{\Rightarrow} F(t,y) = \frac{y}{t} + C_1(t)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = 5 - \frac{y}{t^2} = -\frac{y}{t^2} + C_1'(t) \Leftrightarrow C_1'(t) = 5$$

$$C_1(t) = 5t + C_2$$

$$F(t,y) = \frac{y}{t} + 5t + C_2 \overset{\theta\varepsilon\omega\rho.}{=} C_3$$

$$\boxed{\frac{y}{t} + 5t = C}$$

Η λύση βρίσκεται σε πεπλεγμένη μορφή.

<u>Άσκηση:</u> να λυθεί η δ.ε:

$$\overbrace{y^2 + 4ye^t}^{M} + \overbrace{2(y+e^t)}^{N}\frac{dy}{dt} = 0 \quad (1)$$

Δεν είναι ακριβής.

Αν δέχεται ολοκλ. παράγοντα $\mu = \mu(t)$ θα πρέπει:

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial t} \Leftrightarrow M\cdot\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\cdot\frac{\partial M}{\partial y} = N\cdot\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\cdot\frac{\partial N}{\partial t}$$

Όμως $\mu = \mu(t)$, άρα $\mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{d\mu}{dt} + \mu\frac{\partial N}{\partial t} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{d\mu}{dt} = \frac{1}{N}\cdot\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right)\cdot\mu \Leftrightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{1}{N}\left((2y+4e^t) - (2e^t)\right).$$

$$\frac{\partial \mu}{\mu} = \frac{y+e^t}{y+e^t}$$

ολοκληρώνοντας $\mu(t) = e^t$ (ένας ολοκληρωτ. παράγοντας).

$$(1) \Rightarrow \underbrace{y^2e^t + 4ye^{2t}}_{M} + \underbrace{(2ye^t + 2e^{2t})}_{N}\frac{dy}{dt} = 0 \quad (3)$$

( M, N διαφορετικά).

Πρέπει (3) ακριβής:

$$\frac{\partial}{\partial y}(y^2e^t + 4ye^{2t}) = \frac{\partial}{\partial t}(2ye^t + 2e^{2t}) \text{, ισχύει.}$$

Από το θεώρημα υπάρχει $F(t,y) = c_2$

$$\frac{\partial F}{\partial t} = y^2e^t + 4ye^{2t} \ (4), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^t + 2e^{2t} \ (5)$$

$$(4): \partial F = (y^2e^t + 4ye^{2t})\partial t$$

ολοκληρώνοντας:

$F(t,y) = y^2e^t + 2ye^{2t} + h(y)$ (6) και παραγωγίζοντας:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2ye^t + 2e^{2t} + h'(y) \overset{(5)}{=\!=} 2ye^t + 2e^{2t}$$

Άρα $h'(y)=0$ , $h(y)=c_1$

Αντικαθιστώντας στην (6):

$$F(t,y) = y^2e^t + 2ye^{2t} + c_1 \overset{\text{θεώρημα}}{=\!=} c_2$$

$$\overset{c_2-c_1=c}{\Longleftrightarrow} \quad F(t,y) = \boxed{y^2e^t + 2ye^{2t} = c}$$

Η λύση δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή.

---

Να λυθεί:

$$\boxed{(x^2y+y^2)\,dx - x^3\,dy = 0} \quad (1)$$

δέχεται μορφής: $\mu = x^a\cdot y^\beta$ (2)

Παρατηρούμε ότι δεν είναι ακριβής.

$$(x^{a+2}\cdot y^{\beta+1} + x^a\cdot y^{\beta+2})\,dx - x^{a+3}y^\beta\,dy = 0 \quad (3)$$

Για ακριβής:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^{a+2}\cdot y^{\beta+1} + x^a\cdot y^{\beta+2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x^{a+3}y^\beta\right)$$

$$(\beta+1)\underbrace{x^{a+2}y^\beta} + (\beta+2)x^a y^{\beta+1} = -(a+3)\underbrace{x^{a+2}y^\beta}$$

$$\left.\begin{cases} \beta+1 = -(a+3) \\ \beta+2 = 0 \Leftrightarrow \beta=-2 \end{cases}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a=-2 \\ \beta=-2 \end{array}\right\}.$$

$\mu = x^{-2} \cdot y^{-2}$. $\dfrac{\partial}{\partial y}(x^0 \cdot y^{-1} + x^{-2} \cdot y^0) = \dfrac{\partial}{\partial x}(-x \cdot y^{-2})$

$: -y^{-2} = -y^{-2}$ ισχύει, άρα ακριβής.

$$(1) \xrightarrow{(2)\cdot(1)} \underbrace{(y^{-1} + x^{-2})}_{M} dx - \underbrace{(x \cdot y^{-2})}_{N} dy = 0.$$

Από θεώρημα υπάρχει $F(x,y) = C_2$. (5)

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y^{-1} + x^{-2} \ (4), \quad \frac{\partial F}{\partial y} = -x \cdot y^{-2}. \ (6)$$

$$(4) \Rightarrow F(x,y) = \int y^{-1} + x^{-2}\, dx + h(y)$$

$F(x,y) = y^{-1}x - x^{-1} + h(y)$. (7). παραγωγίζοντας:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -x \cdot y^{-2} + 0 + h'(y) \overset{(6)}{=\!=} -x \cdot y^{-2}$$

$$h'(y) = 0$$

$$h(y) = c_3$$

Άρα $(7) \Rightarrow F(x,y) = y^{-1}x - x^{-1} + c_3 \overset{(5)}{=\!=} C_2$

$$\xrightarrow{C_2 - C_3 = C} F(x,y) = y^{-1}x - x^{-1} = C$$

$$\boxed{\frac{x}{y} - \frac{1}{x} = C}$$

λύση σε πεπλεγμένη μορφή

Ασκήσεις:

1) $y''-2y'+y=2e^{t}+2t$
2) $y''+4y=3\cos 2t$
3) $y''-4y=e^{t}$
4) i) $y''+4y=2\sin t$
ii) $y''+4y=2\sin 2t$
(εκτός ύλης:) 5) $y''-4y'+3y=e^{2t}\cos t$
6) i) $y''+y'+y=t$
ii) $y''+y'+y=t^{2}$

1) Είναι δεύτερης τάξης, με 2 όρους στο δεύτερο μέλος και συντελεστή "1" στο $y''$. Τότε η ειδική λύση θα είναι (αρχή υπέρθεσης):

$$y_{\varepsilon}(t)=y_{\varepsilon 1}(t)+y_{\varepsilon 2}(t), \text{ όπου}$$

$y_{\varepsilon 1}(t)$ ειδική λύση της: $y''-2y'+y=2e^{t}$ (1)
ενώ $y_{\varepsilon 2}(t)$ » της: $y''-2y'+y=2t$ (2)

· Η ομογενής είναι: $y_{o\mu}(t)$:
$y''-2y'+y=0$. (3)
Λύση μορφής $Ae^{rt}$, άρα αντικαθιστώντας στην (3):

$$(3)\Rightarrow r^{2}-2r+1=0.$$

$\boxed{r=1}$, $\Delta=0$. Άρα αφού $\Delta=0$
αναζητούμε λύσεις μορφής

$$\left.\begin{aligned} y&=Ate^{rt}=Ate^{t}\\ y'&=Ae^{t}+Ate^{t}\\ y''&=2Ae^{t}+Ate^{t}.\end{aligned}\right\}\xrightarrow{(1)}$$

$$\Rightarrow 2Ae^{t}+Ate^{t}-2(Ae^{t}+Ate^{t})+Ate^{t}=2e^{t}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow A(\cancel{2e^{t}}+te^{t}-\cancel{2e^{t}}-2te^{t}+te^{t})=2e^{t}\Rightarrow$$

$\Rightarrow A=$ απροσδιόριστο. Άρα αναζητούμε μορφής $y=At^{2}e^{t}$.
$y'=2Ate^{t}+At^{2}e^{t}$
$y''=2Ae^{t}+2Ate^{t}+y'\ldots$

Αντικαθιστώντας στην (1) $\Rightarrow -y' + 2Ae^t + 2Ate^t + At^2e^t = 2e^t$

$\Leftrightarrow \quad 2Ae^t = 2e^t \quad \Leftrightarrow$

$\boxed{A = 1}$.

Οπότε μια ειδική λύση είναι:

$\boxed{y_{\varepsilon 1} = t^2 \cdot e^t}$.

Για το (2): $\quad y'' - 2y' + y = 2t$

Η ομογενής της: $r = 1$. $\Delta = 0$. Ψάχνουμε λύση μορφής
$y = At + B$.
$y' = A$
$y'' = 0$.

$0 - 2A + At + B = 2t \Rightarrow$

$\Rightarrow At + B - 2A = 2t$

$A = 2$

$B = 4$

Άρα $\boxed{y_{\varepsilon 2} = 2t + 4}$

Οπότε $\boxed{y_\varepsilon(t)} = y_{\varepsilon 1}(t) + y_{\varepsilon 2}(t) = \boxed{t^2e^t + 2t + 4}$

Για την ομογενή της (1).

$y_{OM} := (c_1 + c_2 t)e^t$

Άρα $\boxed{y(t) = (c_1 + c_2 t)e^t + t^2e^t + 2t + 4}$ γενική λύση.

2) $y'' + 4y = 3\cos 2t$ (1)

Η δεύτερης τάξης γενική λύση θα έχει μορφή
$$y = y_{OM} + y_{\varepsilon}$$

• $y_{OM}(t)$: $y'' + 4y = 0$ (2)

Λύση μορφής $Ae^{rt}$

$$(2) \xrightarrow{\cdot Ae^{rt}} r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r = \pm 2i$$

Οπότε $\boxed{y_{OM} = c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t}$

• $y_{\varepsilon\iota\delta}$: Θα είναι μορφής $y_a = A\cos 2t + B\sin 2t$. Όμως επειδή δεν βγαίνει για κάθε t αναζητούμε

$$y_1 = t \cdot y_a$$
$$y' = y_a + t y_a'$$
$$y'' = y_a' + y_a' + t y_a'' = 2y_a' + t y_a''.$$

$$(1) \xrightarrow{\text{Αντικατάσταση}} 2y_a' + t y_a'' + 4 t y_a = 3\cos 2t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2\cdot(-2A\sin 2t + 2B\cos 2t) + t(-4A\cos 2t - 4B\sin 2t) +$$
$$+ 4t(A\cos 2t + B\sin 2t) = 3\cos 2t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4A\sin 2t + 4B\cos 2t = 3\cos 2t$$

$$-4A = 0 \Rightarrow A = 0, \quad 4B = 3 \Rightarrow B = \frac{3}{4}$$

Οπότε $\boxed{y_{\varepsilon}(t) = \frac{3}{4} t \sin 2t.}$

Γενική λύση: $\boxed{y(t) = c_1\cos 2t + c_2 \sin 2t + \frac{3}{4} t \sin 2t}$

3) $y''-4y=e^t$ (1)

• $Y_{OM}$: Λύση $Ae^{rt}$.

$(1) \xRightarrow{\cdot Ae^t} r^2-4=0 \Rightarrow r=\pm 2.$ $\Delta>0$.

Οπότε $\boxed{Y_{OM}=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}}$

• $Y_{ΕΙΔ}$: Είναι της μορφής $y=Ae^t$.
$y'=Ae^t$
$y''=Ae^t$

$-3Ae^t=e^t$
$A=-\frac{1}{3}$.

Άρα $\boxed{Y_E(t)=-\frac{1}{3}e^t}$.

Έτσι $y(t)=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}-\frac{1}{3}e^t$.

4) i) $y''+4y=2\sin t$ (1)

• $Y_{OM}$: $y''+4y=0$ (2). Λύση μορφής $Ae^{rt}$. Αντικαθιστώντας:
$r^2+4=0 \Rightarrow r=\pm 2i$

οπότε η λύση ομογενούς: $\boxed{Y_{OM}=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t}$

• $Y_{ΕΙΔ}$: Η λύση θα είναι της μορφής $y=A\cos t+B\sin t$
$y'=-A\sin t+B\cos t$
$y''=-y$

οπότε $(1) \xRightarrow{\text{αντικατ.}} 3y=2\sin t \Rightarrow$
$\Rightarrow 3A\cos t+3B\sin t=2\sin t$

Άρα $A=0$, $B=\frac{2}{3}$. Οπότε

$$\boxed{y_{ειδ}(t)=\frac{2}{3}\sin t}$$

Γενική: $\boxed{y(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t+\frac{2}{3}\sin t}$

ii) Παρατηρούμε πως με το i) ερώτημα θα ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα μέχρι την $y_{ομ}$, αλλά η μορφή της $y_{ειδ}$ θα είναι $y_B=t\cdot\underbrace{(A\cos 2t+B\sin 2t)}_{y_a}$ επειδή μοιάζει με την αντίστοιχη ομογενή.
Άρα:

$$y_B'(t)=y_a+t\,y_a'$$
$$y_B''(t)=y_a'+y_a'+t\,y_a''=2y_a'+t\,y_a''.$$

Αντικαθιστώντας στην $y''+4y=2\sin 2t$ έχουμε:

$$\Rightarrow\quad 2y_a'+t\,y_a''+4t\,y_a=2\sin 2t$$
$$2(-2A\sin 2t+2B\cos 2t)+t\cdot(-4A\sin 2t-4B\cos 2t)+$$
$$+4t(A\cos 2t+B\sin 2t)=2\sin 2t$$

$$\Rightarrow\quad -4A\sin 2t+2B\cos 2t=2\sin 2t$$

Άρα $A=-\frac{1}{2}$ και $B=0$.

Οπότε $y_{ειδ}(t)=-\frac{1}{2}\cos t$

Συνεπώς γενική: $\boxed{y(t)=c_1\cos 2t+c_2\sin 2t-\frac{1}{2}\cos t.}$

6) $y'' + y' + y = t^2 \quad (1)$

• $Y_{OM}$: Λύση μορφής $Ae^{rt}$, άρα αντικαθιστώντας στην ομογενή της (1):

$$r^2 + r + 1 = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 < 0, \text{ άρα } r_1 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}$$
$$r_2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}.$$

Άρα λύση:

$$Y_{OM} = c_1 \cdot e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

• $Y_{ειδ}$: Θα είναι μορφής $At^2 + Bt + C = y$

$$y' = 2At + B$$
$$y'' = 2A$$

Αντικαθιστώντας στην (1) ⇒

$$\Rightarrow 2A + 2At + B + At^2 + Bt + C = t^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow At^2 + (2A + B)t + 2A + B + C = t^2.$$

$$A = 1, \quad B = -2, \quad C = 0$$

Άρα $\boxed{Y_{ειδ} = t^2 - 2t}$

Οπότε γενική λύση:

$$Y(t) = Y_{OM}(t) + Y_{ειδ}(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(t) = e^{-\frac{t}{2}} \cdot \left(c_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right) + t^2 - 2t}$$

Εργασία 2

1) i) $\begin{pmatrix} y''-3y'+2y=e^{3t} \\ y(0)=y'(0)=0 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{L}\{y''\}-3\mathcal{L}\{y'\}+2\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{e^{3t}\}$$

$$s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)-3sY(s)-3y(0)+2Y(s)=\frac{1}{s-3}$$

$$(s^2-3s+2)Y(s)=\frac{1}{s-3}\Rightarrow Y(s)=\frac{1}{(s-3)(s-1)(s-2)}$$

$$Y(s)=\frac{A}{s-3}+\frac{B}{s-1}+\frac{\Gamma}{s-2}\Rightarrow A(s^2-3s+2)+B(s^2-5s+6)+\Gamma(s^2-4s+3)$$

$$A=\frac{1}{2},\quad B=\frac{1}{2},\quad \Gamma=-1$$

Άρα $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s-2}\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cdot e^{3x}+\frac{1}{2}\cdot e^{x}-e^{2x}=y(x)$$

Άρα $y(t)=e^{t}\left(\frac{1}{2}-e^{t}+\frac{1}{2}e^{2t}\right)$.

ii) $y''+2y=\sin 3t$ $\qquad y(0)=y'(0)=0$.

$$\mathcal{L}\{y''\}+2\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{\sin 3t\}.$$

$$(s^2+2s)\,Y(s)=\frac{3}{s^2+9}\Rightarrow Y(s)=\frac{3}{s(s+2)(s^2+9)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Y(s)=\frac{A}{s}+\frac{B}{s+2}+\frac{\Gamma s+\Delta}{s^2+9}\Rightarrow A(s+2)(s^2+9)+Bs(s^2+9)+(\Gamma s+\Delta)\cdot s\cdot(s+$$
$$=3$$

$$\Rightarrow (A+B+\Gamma)s^3+(2A+2\Gamma+\Delta)s^2+(9A+9B+2\Delta)s+18A=3$$

Από το σύστημα: $A = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}$, $B = -\frac{1}{2}$, $\Gamma = \frac{1}{3}$, $\Delta = \frac{3}{2}$.

$$Y(s) = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+2} + \frac{1}{3}\cdot\frac{s}{s^2+9} + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{s^2+9} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(s) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-x} + \frac{1}{3}\cos(3t) + \frac{1}{2}\sin(3t)$$

2) Γενική λύση της $y''+4y=0$: $y(t) = y_{OM} + \cancel{y_{\varepsilon\iota\delta}}$. (ομογ. μορφή)

$$\mathcal{L}\{y''\} + 4\mathcal{L}\{y\} = 0$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0) - y'(0) + 4s\,Y(s) - 4y(0) = 0$$

$$(s^2+4)\,Y(s) = s.y(0) + y'(0) + 4y(0)$$

$$Y(s) = \frac{s\,y(0)}{s^2+4} + \frac{y'(0)+4y(0)}{s^2+4}$$

Όμως αν $y(0)=A$ και $y'(0)=B$ έχουμε:

$$Y(s) = A\frac{s}{s^2+4} + \frac{B+4A}{s^2+4} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{\mathcal{L}^{-1}} y(s) = A\cdot\cos 2x + \frac{(B+4A)}{2}\cdot\sin 2x$$

3) i) $\begin{pmatrix} y'+2y=e^{x} \\ y(0)=1 \end{pmatrix}$

Αν $f(x)=y(x)=y$.

$$\mathcal{L}\{y'\}+2\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{e^{x}\}$$

$$sF(s)-f(0)+2F(s)=\frac{1}{s-1}$$

$$(s+2)\cdot F(s)=\frac{1}{s-1}+f(0)^{\nearrow 1}$$

$$F(s)=\frac{1}{(s-1)(s+2)}+\frac{1}{s+2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)(s+2)}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}$$

Όμως $\frac{1}{(s-1)(s+2)}=\frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}$

$$1=(A+B)s+(2A-B)$$

$$A=\frac{1}{3},\quad B=-\frac{1}{3}.$$

Οπότε

$$f(s)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s-1}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(s)=\frac{1}{3}e^{x}+\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(s)=\frac{1}{3}e^{x}+\frac{2}{3}e^{-2x}$$

ii) $\begin{cases} y'+y = xe^{-x} \quad (1) \\ y(0)=-2 \end{cases}$ $\qquad F(x) = y(x) = y$

$$\mathcal{L}\{y'\}+\mathcal{L}\{y\} = \mathcal{L}\{xe^{-x}\}.$$

$$sF(s) - F(0) + F(s) = -\frac{1}{s+1} \quad \text{από} \int_0^\infty e^{-sx}(xe^{-x})dx.$$

$$F(s)(s+1) = +K(s) + f(0)$$

$$-K(s) + F(s)(s+1) = -2$$

$$F(s) = \frac{-2}{s+1} + \frac{K(s)}{s+1}$$

$$F(s) = -2 \cdot \frac{1}{s+1} \; \cancel{+} \; \frac{1}{(s+1)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -2\,\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}$$

$$F(s) = -2 \cdot e^{-x} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\}.$$

Αφού $\int_0^\infty e^{-sx}(xe^{-x})dx = -\frac{1}{s+1}$

Αντίστοιχα παρατηρούμε

$$\int_0^\infty e^{-sx}\left(\frac{x^2}{2}e^{-x}\right)dx = +\frac{1}{(s+1)^2}.$$

Άρα $F(x) = -2e^{-x} + \frac{x^2}{2}e^{-x}$

iii) $\left\{ \begin{aligned} &y' + 20y = 6\sin 2x \\ &y(0) = 6 \end{aligned} \right\}$

$$sF(s) - f(0) + 20F(s) = 6 \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

$$F(s)(s+20) - 6 = \frac{12}{s^2+4}$$

$$F(s) = \frac{12}{(s^2+4)(s+20)} + \frac{6}{s+20}$$

$$\frac{1}{s^2+4} \cdot \frac{1}{s+20} = \frac{1}{(s^2+0s+4)\cdot(s+20)} = \frac{A}{s+20} + \frac{Bs+\Gamma}{s^2+4}$$

$$\Rightarrow A(s^2+4) + (s+20)(Bs+\Gamma) = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A+B)s^2 + (\Gamma + 20B)s + (4A + 20\Gamma) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} 4A + 20\Gamma &= 1 \\ 20B + \Gamma &= 0 \\ A + B &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} A + 5\Gamma &= \tfrac{1}{4} \\ -20A + \Gamma &= 0 \end{aligned} \right\}_{(-5)} \Rightarrow 101A = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{A = \frac{1}{404}}$$

$$B = \boxed{-\frac{1}{404}}$$

$$\Gamma = 20A = \boxed{\frac{20}{404}}$$

Άρα $F(s) = 12 \cdot \left[ \dfrac{1}{404\cdot(s+20)} + \dfrac{-\frac{1}{404}\cdot s + \frac{20}{404}}{s^2+4} \right] + 6 \cdot \dfrac{1}{s+20}$

$$F(s) = \frac{3}{101\cdot(s+20)} - \frac{\frac{3}{101}s}{s^2+4} + \frac{\frac{30}{101}\cdot 2}{s^2+4} + 6\cdot\frac{1}{s+20}$$

$$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Longrightarrow} \quad F(x) = \frac{3}{101} \cdot e^{-20x} - \frac{3}{101} \cdot \cos 2x + \frac{30}{101} \sin 2x + 6 e^{-20x}$$

$$F(x) = \frac{1}{101} \cdot \left[ (606 + 3) e^{-20x} + 30 \sin 2x - 3 \cos 2x \right]$$

$$F(x) = \frac{1}{101} \cdot \left[ 609 e^{-20x} + 30 \sin 2x - 3 \cos 2x \right].$$

iv) $\left\{ \begin{array}{l} y'' + 2y' - 3y = \sin 2x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array} \right\}$

$$\mathcal{L}\{y''\} + 2\mathcal{L}\{y'\} - 3\mathcal{L}\{y\} = \frac{2}{s^2+4}$$

$$F(s)\,(s^2 + 2s - 3) - sf(0) - f'(0) - 2 \cdot f(0) = \frac{2}{s^2+4}$$

$$F(s) = \frac{2}{(s^2+4)\,(s+3)(s-1)}$$

$$F(s) = 2 \cdot \left[ \frac{As + B}{s^2+4} + \frac{\Gamma}{s+3} + \frac{\Delta}{s-1} \right]$$

Όμως $\quad 1 = (As+B)(s+3)(s-1) + \Gamma(s^2+4)(s-1) + \Delta(s+3)(s^2+4)$

$$1 = As^3 + (2A+B)s^2 + (-3A+2B)s + (-3B) +$$
$$+ \Gamma(s^3 - s^2 + 4s - 4) + \Delta(s^3 + 3s^2 + 4s + 12)$$

$$\Rightarrow 1 = (A + \Gamma + \Delta)s^3 + (2A + B - \Gamma + 3\Delta)s^2 + (-3A + 2B + 4\Gamma + 4\Delta)s +$$
$$+ (-3B - 4\Gamma + 12\Delta)$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 4 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 12 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & -3 & -4 & 12 & 2 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -13 & 15 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 20 & 2 \end{array}\right]$$

$$\Delta = \frac{1}{10}, \quad \Gamma = -\frac{1}{26}, \quad B = \frac{1}{65}, \quad A = -\frac{1}{20}$$

Άρα τελικά $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$ $y = \frac{1}{10} \cdot e^{x} - \frac{1}{26} \cdot e^{-3x} - \frac{4}{65} \cdot \cos 2x - \frac{7}{65}\,\text{si}$

v) $y''' - y = 5 \quad , y(0) = y'(0) = y''(0) = 0.$

$$s^3 F(s) - s^2 f(0) - s f'(0) - f(0) - F(s) = \frac{1 \cdot 5}{s}$$

$$F(s) = \frac{5}{s(s^3-1)} = \frac{5}{s(s-1)(s^2+s+1)}.$$

$$\frac{As+B}{s^2+s+1} + \frac{\Gamma}{s-1} + \frac{\Delta}{s} = \frac{5}{s(s-1)(s^2+s+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow A = \frac{10}{3}, \quad B = \Gamma = \frac{5}{3}, \quad \Delta = -5$$

Άρα $\quad 5 = \dfrac{\frac{10}{3}s + \frac{5}{3}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \dfrac{\frac{5}{3}}{s-1} - \dfrac{5}{s} \Rightarrow$

$$\overset{\mathcal{L}^{-1}}{\Rightarrow} \quad y = -5 + \frac{5}{3}e^{x} + \frac{10}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

vi) $\begin{pmatrix} y'' + y = \sin x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{pmatrix}$

$$s^2F(s) - sf(0) - \cancel{f}'(0) + F(s) = \frac{1}{s^2+1}$$

$$(s^2+1)\ F(s) = \frac{1}{s^2+1} + 2$$

$$F(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2} + \frac{2}{s^2+1}$$

$$F(s) = \frac{3 + 2s^2}{(s^2+1)^2}.$$

$$F(s) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4s^2+6}{(s^2+1)^2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{5s^2+5-s^2+1}{(s^2+1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{5}{2}\cdot\frac{s^2+1}{(s^2+1)^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}$$

$$f(x) = \frac{5}{2}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\} - \frac{1}{2}\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right\}$$

$$f(x) = +\frac{5}{2}.\sin x - \frac{1}{2}.x\cos x$$

vii) $\left\{ \begin{array}{l} y'' + 2y' + 5y = 3e^{-2x} \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{array} \right\}$.

$$\xrightarrow{L\{f\}} \quad s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) + 2sF(s) - 2f(0) + 5F(s) = 3\,\frac{1}{s+2}$$

$$(s^2+2s+5)\,F(s) - s - 1 - 2 = \frac{3}{s+2}$$

$$(s^2+2s+5)\,F(s) = \frac{3}{s+2} + s + 3$$

$$F(s) = \underbrace{\frac{3}{(s+2)(s^2+2s+5)}}_{I} + \frac{s+3}{s^2+2s+5}$$

$$I = \frac{1}{(s+2)(s^2+2s+5)} = \frac{A}{s+2} + \frac{Bs+\Gamma}{s^2+2s+5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (A+B)s^2 + (2A+2B+\Gamma)s + (5A+2\Gamma) = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = \frac{3}{5}, \quad B = -\frac{3}{5}, \quad \Gamma = 0$$

Άρα $F(s) = \dfrac{\frac{3}{5}}{s+2} + \dfrac{-\frac{3}{5}s}{s^2+2s+5} + \dfrac{s+1}{s^2+2s+5} + \dfrac{2}{s^2+2s+5} =$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{3}{5}\cdot e^{-2x} - \frac{3}{5}e^{-x}\cos 2x + e^{-x}\cos 2x + e^{-x}\sin 2x + \frac{3}{10}\, e^{-x}\sin 2x$$

$$f(x) = \frac{3}{5}\cdot e^{-2x} + \frac{13}{10}\cdot e^{-x}\sin 2x + \frac{2}{5}\cdot e^{-x}\cos 2x.$$

Εργασία 3

1) i) $y''-2y'+y=4\cos t$

Η χαρακτηρ. εξίσ. είναι:

$$r^2-2r+1=0$$

$$(r-1)^2=0 \quad , \quad r=1 \text{ διπλή}$$

Άρα $y_{OM}=c_1e^t+c_2te^t$

Για την ειδική λύση, ξέρουμε πως θα είναι μορφής:

$$y=A\sin t+B\cos t$$
$$y'=A\cos t-B\sin t$$
$$y''=-A\sin t-B\cos t$$

Αντικαθ:

$$\cancel{-A\sin t}-\cancel{B\cos t}-2A\cos t-2B\sin t+\cancel{A\sin t}+\cancel{B\cos t}=4\cos t$$
$$\sin t(-2B)-2A\cos t=4\cos t$$

$$A=-2 \quad \text{και} \quad B=0.$$

Άρα $y_\varepsilon=-2\sin t$

Οπότε γενική λύση:

$$y=c_1e^t+c_2te^t-2\sin t$$

ii) $y'' - 2y' + y = 3e^t$

• ομογενής: η χαρακτ. εξ:
$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow r = 1$ διπλή.

$y_{ομ} = c_1 e^t + c_2 t e^t$

• ειδική: θα είναι της μορφής $t^2 e^t$ γιατί μοιάζει η $e^t$ με της ομογενούς. Άρα:

$y = At^2 e^t$

$y' = 2Ate^t + At^2 e^t$

$y'' = 2Ae^t + \cancel{2A}te^t + 2Ate^t + At^2 e^t$

$y'' = 2Ae^t + 4Ate^t + At^2 e^t$

Αντικαθ:

$2A\cancel{e^t} + \cancel{4Ate^t} + \cancel{At^2 e^t} - \cancel{4Ate^t} - \cancel{2At^2 e^t} + \cancel{At^2 e^t} = 3\cancel{e^t}$

$2A = 3 \Rightarrow A = \frac{3}{2}$

Άρα $y = y_{ομ} + y_{ειδ}$.

$y = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{3}{2} t^2 e^t$.

iii) $y'' - 2y' - 3y = 3e^{2t}$

• ομογ: $r^2 - 2r - 3 = 0$

$r = 3 \quad r = -1$

$y_{ομ} = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t}$

• ειδ: θα είναι μορφής $Ae^{2t}$

$y = Ae^{2t}, \quad y' = 2Ae^{2t}, \quad y'' = 4Ae^{2t}$

Αντικ: $-3Ae^{2t} = 3e^{2t} \Rightarrow A = -1$

Γενική λύση: $y = y_{ομ} + y_{ειδ} = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-t} - e^{2t}$

iv) $y''+2y'+y=2e^{-t}$

· Ομογ: Χαρακτ. εξίσωση:

$r^2+2r+1=0$ $\quad r=-1$ διπλή,

$y_{OM}=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}$.

· ειδ: θα έχει τη μορφή $y=At^2e^{-t}$

$y'=2Ate^{-t}-At^2e^{-t}$

$y''=2Ae^{-t}-2Ate^{-t}-2Ate^{-t}+At^2e^{-t}$

~~Υπο~~ Αντικαθιστώντας:

$2Ae^{-t}=2e^{-t}$

$A=1$

Οπότε $y=y_{OM}+y_{ειδ}=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}+t^2e^{-t}$.

v) $y''+y'+4y=2\sinh(t) \underset{υπόδ.}{=} 2\frac{e^t-e^{-t}}{2}=e^t-e^{-t}$

Ο γραμμικός συνδιασμός των λύσεων των (1) και (2) μας δίνει τη γενική λύση:

(1): $y''+y'+4y=e^t$

(2): $y''+y'+4y=-e^{-t}$

Η ομογενής (και για τις δύο κοινή):

Χαρακτ. εξίσωση (αφού λύση μορφής $Ae^{rt}$):

$r^2+r+4=0$

$\Delta=1-16<0$, άρα

$r=-\frac{1}{2}\pm\frac{i\sqrt{15}}{2}$

Άρα $y_{ομ} = e^{-\frac{t}{2}} \cdot \left[c_1 \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right]$

• Ειδική: (1): είναι μορφής $y_1 = Ae^t$

$y_1' = Ae^t$

$y_1'' = Ae^t$

$$Ae^t + Ae^t + 4Ae^t = e^t$$

$$6A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{6}.$$

$$y_1 = \frac{e^t}{6}.$$

(2): είναι μορφής: $y_2 = B \cdot e^{-t}$

$y_2' = -Be^{-t}$

$y_2'' = +Be^{-t}$

$$4Be^{-t} = -e^{-t}$$

$$B = -\frac{1}{4}$$

$$y_2(t) = -\frac{e^{-t}}{4}$$

Άρα $y_{ειδ.} = y_1 + y_2 = \frac{1}{6} \cdot e^t - \frac{e^{-t}}{4}$

Γενική λύση:

$$y(t) = e^{-\frac{t}{2}}\left(c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{15}}{2}t\right)\right) + \frac{e^t}{6} - \frac{e^{-t}}{4}.$$