Τσαρπίκα Δημητρίου
Α.Μ. 201800039

Κουρέλης Επαμεινώνδας
ΑΜ: 201800084

Παραδείγματα που αφορούν στο πλήθος των λύσεων ενός Π.Σ.Τ.

1) $$\begin{cases} x''+x=0, & t\in[0,\pi] \\ x(0)=0 \\ x(\pi)=0 \end{cases}$$

Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^2+1=0$ έχει λύσεις τις $r_{1,2}=\pm 1i$. Άρα, η γενική λύση της δ.ε. είναι η $x(t)=c_1\cos(-t)+c_2\sin t \Rightarrow x(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$, $t\in[0,\pi]$.

Πρέπει να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες, δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} c_1\cdot\cos 0+c_2\sin 0=0 \Rightarrow c_1=0 \\ c_1\cos\pi+c_2\overset{0}{\cancel{\sin\pi}}=0 \end{cases}$$

Η σταθερά c_2 μπορεί να πάρει οποιαδήποτε οποιαδήποτε πραγματική τιμή, δηλαδή $c_2=c$, $c\in\mathbb{R}$.

Άρα, το ΠΣΤ έχει άπειρες λύσεις, τις $x(t)=c\sin t$, $t\in[0,\pi]$.

2) $$\begin{cases} x''+x=t, & t\in[0,\pi] \\ x(0)-x(\pi)=0 \\ x'(0)-x'(\pi)=0 \end{cases}$$

2) $\begin{cases} x''+x=t, \ t\in[0,\pi] \\ x(0)-x(\pi)=0 \\ x'(0)-x'(\pi)=0 \end{cases}$

Τσαρνίκα Δημητρίου
Α.Μ. 2018 00039

Κουρέλης Επαμεινώνδας
ΑΜ: 2018000 84

Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι:

- Χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm 1i$. Άρα, $x_{ομ}(t)=c_1\cos(-t)+c_2\sin(-t) \Rightarrow$

$x_{ομ}(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$, c_1, c_2 σταθερές.

Για την ειδική λύση:

- Αναζητούμε λύσεις της μορφής At:

$$\left.\begin{aligned} x_{ειδ}(t)&=At \\ x_{ειδ}'(t)&=A \\ x_{ειδ}''(t)&=0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &0+At=t \Rightarrow \\ &A=1 \\ &x_p(t)=t \end{aligned}$$

Άρα, η γενική λύση είναι η $x(t)=t+c_1\cos t+c_2\sin t$, $t\in[0,\pi]$.

Πρέπει να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες, οπότε πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} c_1-\pi+c_1=0 \Rightarrow \\ 1+c_2-(1-c_2)=0 \end{cases} \begin{cases} 2c_1=\pi \\ 2c_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\pi/2 \\ c_2=0 \end{cases}$$

Η λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι :

- Χαρακτηριστική εξίσωση : $r^2+1=0 \Rightarrow r_{1,2}=\pm 1i$. Άρα , $x_{ομ}(t)=c_1\cos(-t)+c_2\sin(-t) \Rightarrow$

$x_{ομ}(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$, c_1, c_2 σταθερές.

Τσαρπίκα Δήμητριου
Α.Μ. 2018 00039

Κουρέλης Επαμεινώνδας
ΑΜ: 2018000 84

Για την ειδική λύση :

- Αναζητούμε λύσεις της μορφής At:

$$\left.\begin{array}{l} x_{ειδ}(t)=At \\ x_{ειδ}'(t)=A \\ x_{ειδ}''(t)=0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} 0+At=t \Rightarrow \\ A=1 \\ x_p(t)=t \end{array}$$

Άρα, η γενική λύση είναι η $x(t)=t+c_1\cos t+c_2\sin t$, $t\in[0,\pi]$.

Πρέπει να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες, οπότε πρέπει να ισχύει :

$$\begin{cases} c_1-\pi+c_1=0 \\ 1+c_2-(1-c_2)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1=\pi \\ 2c_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\pi/2 \\ c_2=0 \end{cases}$$

Η μοναδική λύση του συστήματος είναι η $(c_1,c_2)=(\pi/2,0)$. Άρα, το ΠΣΤ έχει μοναδική λύση, τη $x(t)=t+\frac{\pi}{2}\cos t$, $t\in[0,\pi]$.

Τσαρπίκα Δημητρίου
Α.Μ. 2018 00039

Κουρέλης Επαμεινώνδας
ΑΜ: 2018000 84

3) $\begin{cases} x'' + \pi^2 x = 1, & t \in [0,1] \\ x(0) + x'(0) = 0 \\ x(1) + x'(1) = 0 \end{cases}$

• Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 + \pi^2 = 0$ έχει λύσεις τις $r_{1,2} = \pm \pi i$. Άρα η λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η $x_{o\mu}(t) = c_1\cos(-\pi t) + c_2\sin(\pi t) \Rightarrow x_{o\mu}(t) = c_1\cos(\pi t) + c_2\sin(\pi t)$, $t \in [0,1]$.

• Για την ειδική λύση: Αναζητούμε λύσεις της μορφής A:

$$\left.\begin{array}{l} x_{\varepsilon\iota\delta}(t) = A \\ x_{\varepsilon\iota\delta}'(t) = 0 \\ x_{\varepsilon\iota\delta}''(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 0 + \pi^2 A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\pi^2}$$

Άρα, η ειδική λύση είναι η $x_p(t) = \frac{1}{\pi^2}$.

Επομένως, η γενική λύση είναι η $x(t) = \frac{1}{\pi^2} + c_1\cos(\pi t) + c_2\sin(\pi t)$, $t \in [0,1]$.

Πρέπει να ικανοποιούνται οι συνοριακές συνθήκες, δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$\begin{cases} 1/\pi^2 + c_1 + c_2\pi = 0 \\ 1/\pi^2 - c_1 - \pi c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 + \pi c_2 = -1/\pi^2 \\ -c_1 - \pi c_2 = -1/\pi^2 \end{cases}$$

Όπως βλέπουμε, το σύστημα δεν έχει λύση, άρα είναι αδύνατο.

Οπότε, το ΠΣΤ δεν έχει λύση.

⊛ Ένα ΠΣΤ μπορεί να μην έχει λύση, να έχει μοναδική λύση ή να έχει άπειρες λύσεις.

Εφαρμογή Hamilton

Να δειχθεί ότι η διαφορική εξίσωση $u''+u^2=0$ γράφεται σε χαμιλτονιανό σύστημα.

Λύση

Θέτουμε $x=u$ και $y=u'$. Τότε παραγωγίζοντας τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε: $x'=y$ και $y'=-u^2 \Rightarrow y'=-x^2$

Ζητάμε χαμιλτονιανή $H(x,y)$ με τις εξής ιδιότητες:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \dfrac{\partial H}{\partial y}=y \\ \bullet\ -\dfrac{\partial H}{\partial x}=-x^2 \end{array}\right\}$$

Λύνουμε το σύστημα και ολοκληρώνουμε ως προς y την πρώτη:

$$H=\frac{1}{2}y^2+h(x)$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=h'(x)=x^2$$

Έπεται ότι το σύστημα είναι χαμιλτονιανό.

$$h(x)=\frac{x^3}{3}+c_1$$

Άρα, $H=\frac{1}{2}y^2+\frac{x^3}{3}+c_1=c_2 \Rightarrow H(x,y)=c$, με $c=c_2-c_1$.

Οι λύσεις ικανοποιούν τη σχέση $\frac{1}{2}y^2+\frac{x^3}{3}=c$, δηλαδή βρίσκονται σε πεπλεγμένη μορφή.

Τσαρμπίκα Δημητρίου
Α.Μ. 2018 00039

Κουρέλης Επαμεινώνδας
ΑΜ: 2018 000 84

Τσαρπίκα Δημητρίου
Α.Μ. 2018 00039

Κουρέλης Επαμεινώνδας
ΑΜ: 2018000 84

Εργασία 3

i) $y'' - 2y' + y = 4\cos t$ (1)

Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^2 - 2r + 1 = 0$ έχει διπλή ρίζα την $r = 1$.

Άρα η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η $y_{ομ}(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 t e^t$, με c_1, c_2 σταθερές.

Για την ειδική λύση: Αναζητούμε λύσεις της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} y_p(t) &= A\sin t + B\cos t \\ y_p'(t) &= A\cos t - B\sin t \\ y_p''(t) &= -A\sin t - B\cos t \end{aligned}\right\} (2)$$

$$(1),(2): -\cancel{A\sin t} - \cancel{B\cos t} - 2A\cos t + 2B\sin t + \cancel{A\sin t} + \cancel{B\cos t} = 4\cos t \Rightarrow$$

$$-2A\cos t + 2B\sin t = 4\cos t$$

$$-2A = 4 \Rightarrow A = -2 \quad | \quad 2B = 0 \Rightarrow B = 0$$

Άρα, $y_p(t) = -2\sin t$.

Άρα, η γενική λύση της (1) είναι η: $y(t) = y_{ομ}(t) + y_p(t) \Rightarrow$

$$y(t) = c_1 \cdot e^t + c_2 t e^t - 2\sin t.$$

ii) $y''-2y'+y=3e^t$ (1)

Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^2-2r+1=0$ έχει διπλή ρίζα την $r=1$.

Άρα η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η $y_{ομ}(t)=c_1e^t+c_2te^t$, με c_1,c_2 σταθερές.

Για την ειδική λύση: Αναζητούμε λύσεις της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} &y_p(t)=At^2e^t \quad (\text{γιατί } e^t \text{ λύση της αντίστοιχης ομογενούς}) \\ &y_p'(t)=2Ate^t+At^2e^t \\ &y_p''(t)=2Ae^t+2Ate^t+2Ate^t+At^2e^t \end{aligned}\right\} (2)$$

$(1),(2): \cancel{2Ate^t}+\cancel{2Ate^t}+2Ae^t+\cancel{At^2e^t}-\cancel{4Ate^t}-\cancel{2At^2e^t}+\cancel{At^2e^t}=3e^t \Rightarrow 2A\cancel{e^t}=3\cancel{e^t} \Rightarrow$

$$A=3/2$$

Άρα, $y_p(t)=3/2\,t^2e^t$.

Άρα, η γενική λύση της (1) είναι η: $y(t)=y_{ομ}(t)+y_p(t) \Rightarrow$

$$y(t)=c_1e^t+c_2te^t+3/2\,t^2e^t.$$

Τσαρπικα Δημητριου
Α.Μ. 201800039

Κουρέλης Επαμεινώνδας
ΑΜ: 201800084

iii) $y''-2y'-3y=3e^{2t}$ (1)

Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^2-2r-3=0$ έχει ρίζες τις $r=3$ και $r=-1$.

Άρα, η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η $y_{o\mu}(t)=c_1\cdot e^{3t}+c_2e^{-t}$, με c_1, c_2 σταθερές.

Για την ειδική λύση: Αναζητούμε λύσεις της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} y_p(t)&=Ae^{2t}\\ y_p'(t)&=2Ae^{2t}\\ y_p''(t)&=4Ae^{2t}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

(1), (2): $4A\cancel{e^{2t}}-4A\cancel{e^{2t}}-3Ae^{2t}=3e^{2t} \Rightarrow -3A\cancel{e^{2t}}=3\cancel{e^{2t}} \Rightarrow A=-1$

Άρα, $y_p(t)=-e^{2t}$.

Άρα, η γενική λύση της (1) είναι η $y(t)=y_{o\mu}(t)+y_p(t) \Rightarrow$

$$y(t)=c_1e^{3t}+c_2e^{-t}-e^{2t}.$$

iv) $y''+2y'+y=2e^{-t}$ (1)

Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^2+2r+1=0$ έχει ρίζες τις $r_{1,2}=\pm 1i$.

Άρα, η γενική λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η $y_{ομ}(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}$, με c_1, c_2 σταθερές.

Για την ειδική λύση: Αναζητούμε λύσεις της μορφής:

$$\left.\begin{aligned} y_p(t) &= At^2e^{-t} \\ y_p'(t) &= 2Ate^{-t}-At^2e^{-t} \\ y_p''(t) &= 2Ae^{-t}-2Ate^{-t}+At^2e^{-t}-2Ate^{-t} \end{aligned}\right\} (2)$$

$$(1),(2): 2Ae^{-t}-2A\cancel{te^{-t}}+A\cancel{t^2e^{-t}}-2\cancel{A}te^{-t}+4A\cancel{te^{-t}}-2A\cancel{t^2e^{-t}}+A\cancel{t^2e^{-t}}=2e^{-t} \Rightarrow$$

$$2A\cancel{e^{-t}}=2\cancel{e^{-t}} \Rightarrow 2A=2 \Rightarrow A=1$$

Άρα, $y_p(t)=t^2e^{-t}$.

Άρα, η γενική λύση της (1) είναι η: $y(t)=y_{ομ}(t)+y_p(t) \Rightarrow$

$$y(t)=c_1e^{-t}+c_2te^{-t}+t^2e^{-t}.$$

Τσαρμπικα Δημητριου

Α.Μ. 201800039

κουρέλης Επαμεινώνδας

ΑΜ: 201800084

v) $y''+y'+4y=2\sin(ht)$ } $y''+y'+4y=e^{t}-e^{-t}$ (1)
$\sin(ht)=\frac{e^{t}-e^{-t}}{2}$

Η χαρακτηριστική εξίσωση $r^2+r+4=0$ έχει ρίζες τις $r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{15}\,i}{2}$
Άρα, η λύση της αντίστοιχης ομογενούς είναι η $y_{ομ}(t)=e^{-t/2}[c_1\cos(\sqrt{15}t/2)+c_2\sin(\sqrt{15}t/2)]$,
με c_1, c_2 σταθερές.
Για την εύρεση των ειδικών λύσεων θα εφαρμόσουμε την αρχή της υπέρθεσης.

α) $y''+y'+4y=e^{t}$ (2)
Αναζητούμε λύσεις της μορφής Ae^{t}.

$$\left.\begin{aligned} y_p(t)&=Ae^{t}\\ y_p'(t)&=Ae^{t}\\ y_p''(t)&=Ae^{t}\end{aligned}\right\}(3)$$

(2),(3): $Ae^{t}+Ae^{t}+4Ae^{t}=e^{t}\Rightarrow$
$6A\cancel{e^{t}}=\cancel{e^{t}}\Rightarrow 6A=1\Rightarrow A=1/6$

Άρα $y_{p1}(t)=\frac{e^{t}}{6}$.

β) $y''+y'+4y=-e^{-t}$ (4)
Αναζητούμε λύσεις της μορφής Ae^{-t}.

$$\left.\begin{aligned} y_p(t)&=Ae^{-t}\\ y_p'(t)&=-Ae^{-t}\\ y_p''(t)&=Ae^{-t}\end{aligned}\right\}(5)$$

(4),(5): $\cancel{Ae^{-t}}+4Ae^{-t}-\cancel{Ae^{-t}}=-e^{-t}\Rightarrow$
$4A\cancel{e^{-t}}=-\cancel{e^{-t}}\Rightarrow A=-1/4$

Άρα, $y_{p2}(t)=-\frac{e^{-t}}{4}$.

Άρα, η γενική λύση της (1) είναι η: $y(t)=y_{ομ}(t)+y_{p1}(t)+y_{p2}(t)\Rightarrow$
$$y(t)=e^{-t/2}[c_1\cos(\sqrt{15}t/2)+c_2\sin(\sqrt{15}t/2)]+\frac{e^{t}}{6}-\frac{e^{-t}}{4}.$$

Τσαρνίκα Δημητρίου
Α.Μ. 201800039

Κουρέλης Επαμεινώνδας
ΑΜ: 201800084