Η δυική μιας διακριτής αβελιανής ομάδας

Έστω G [1] μια ομάδα. Η

$$\mathcal{A} := \ell^1(G) = \{f : G \to \mathbb{C} : \sum_s |f(s)| := \|f\|_1 < \infty\}$$

είναι άλγεβρα Banach με μονάδα και ισομετρική ενέλιξη, με τις πράξεις

$$f * g = \left(\sum_r f(r)\delta_r\right) * \left(\sum_s g(s)\delta_s\right) := \sum_{r,s} f(r)g(s)\delta_{rs}$$

$$\text{και} \;\; f^* = \left(\sum_r f(r)\delta_r\right)^* = \sum_r \overline{f(r)}\delta_{r^{-1}} = \sum_s \overline{f(s^{-1})}\delta_s$$

όπου $\delta_s(t) = 1$ όταν $t = s$ και $\delta_s(t) = 0$ αλλιώς.

Έχουμε δείξει ότι η απεικόνιση

$$\lambda : (\ell^1(G), *, \|\cdot\|_1) \to (\mathcal{B}(\ell^2(G)), \circ, \|\cdot\|_{\mathcal{B}}) : f \to \lambda(f)$$

(όπου $\lambda(f)\xi := \sum\limits_s f(s) \sum_t \xi(t)\delta_{st} = f*\xi$ για $\xi \in c_{00}(S)$) είναι 1-1 *-αναπαράσταση. Έπεται ότι

Πρόταση 1. *Η άλγεβρα $(\ell^1(G), *)$ είναι ημιαπλή άλγεβρα.*

Απόδειξη. Αν ένα $f \in \mathcal{A}$ ανήκει στο ριζικό Jacobson $\mathrm{Rad}\,\mathcal{A}$ της $\mathcal{A}$, τότε το ίδιο θα ισχύει για το στοιχείο $f^* * f$ (το $\mathrm{Rad}\,\mathcal{A}$ είναι ιδεώδες), οπότε $\sigma_{\mathcal{A}}(f^* * f) = \{0\}$. Αφού η λ είναι μορφισμός, έπεται ότι $\sigma_{\mathcal{B}}(\lambda(f^* * f)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(f^* * f)$ (όπου $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\ell^2(G))$), άρα και $\sigma_{\mathcal{B}}(\lambda(f^* * f)) = \{0\}$. Όμως το $\lambda(f^* * f) = \lambda(f)^*\lambda(f)$ είναι φυσιολογικό στοιχείο της C* άλγεβρας $\mathcal{B}$, οπότε η νόρμα του ισούται με τη φασματική του ακτίνα. Έπεται λοιπόν ότι $\|\lambda(f)\|_{\mathcal{B}}^2 = \|\lambda(f)^*\lambda(f)\|_{\mathcal{B}} = 0$, άρα $\lambda(f) = 0$, και συνεπώς $f = 0$ αφού η λ είναι 1-1. $\square$

Παρατήρηση 2. *Όταν η G είναι μεταθετική, το επιχείρημα είναι απλούστερο: το ίδιο το $\lambda(f)$ είναι φυσιολογικό στοιχείο μιας C* άλγεβρας, οπότε η νόρμα του ισούται με τη φασματική του ακτίνα.*

[1]ghat, 4 Ιουνίου 2019

Περιοριζόμαστε στο εξής στην περίπτωση που η G είναι *αβελιανή* ομάδα. Τότε η $\mathcal{A} = \ell^1(G)$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach άλγεβρα με μονάδα και ισομετρική ενέλιξη.

Το σύνολο $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ είναι συμπαγής χώρος Hausdorff με την ασθενή-* τοπολογία.

Κάθε χαρακτήρας $\phi \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ έχει $\|\phi\| = \phi(\mathbf{1}) = 1$ και συνεπώς ικανοποιεί $|\phi(\delta_s)| \leqslant 1$ για κάθε $s \in G$ άρα και $|\phi(\delta_s)^{-1}| = |\phi(\delta_s^{-1})| \leqslant 1$ δηλαδή

$$|\phi(\delta_s)| = 1 \quad \text{για κάθε} \quad s \in G.$$

Συνεπώς ο περιορισμός της ϕ στο σύνολο $\{\delta_s : s \in G\}$ ορίζει μια συνάρτηση

$$\chi_\phi : G \to \mathbb{T} : s \to \phi(\delta_s)$$

η οποία είναι *μορφισμός ομάδων*, δηλαδή

$$\begin{aligned} \chi_\phi(st) &= \phi(\delta_{st}) = \phi(\delta_s\delta_t) = \phi(\delta_s)\phi(\delta_t) = \chi_\phi(s)\chi_\phi(t) \\ \text{και } \chi_\phi(s^{-1}) &= \phi(\delta_{s^{-1}}) = \phi(\delta_s)^{-1} = \chi_\phi(s)^{-1} \end{aligned}$$

για κάθε $s, t \in G$.

Ορισμός 1. *Χαρακτήρας μιας ομάδας G λέγεται ένας μορφισμός ομάδων* [2] *$\chi : G \to \mathbb{T}$. Το σύνολο των χαρακτήρων της G συμβολίζεται $\widehat{G}$.*

Έτσι, κάθε χαρακτήρας της άλγεβρας $\ell^1(G)$ ορίζει έναν χαρακτήρα της ομάδας G. Αντίστροφα

Παρατήρηση 3. *Κάθε χαρακτήρας χ της ομάδας G ορίζει έναν χαρακτήρα ϕ_χ της άλγεβρας $\ell^1(G)$ από τον τύπο:*

$$\phi_\chi(f) := \sum_s f(s)\chi(s), \quad f = \sum_s f(s)\delta_s \in \ell^1(G)$$

(η σειρά συγκλίνει απόλυτα). Οι $\phi \to \chi_\phi$ και $\chi \to \phi_\chi$ είναι προφανώς αντίστροφες η μια της άλλης.

Απόδειξη. Για κάθε $f \in \mathcal{A}$, λόγω απόλυτης σύγκλισης έχουμε

$$\left|\phi_\chi\left(\sum_s f(s)\delta_s\right)\right| \leqslant \sum_s |f(s)||\chi(s)| = \sum_s |f(s)| = \|f\|_1,$$

οπότε η ϕ_χ είναι καλά ορισμένη, προφανώς γραμμική και συνεχής.

[2] Όταν η G είναι τοπολογική ομάδα, απαιτούμε επίσης η χ να είναι συνεχής.

Για κάθε $s, t \in G$ έχουμε

$$\phi_\chi(\delta_s * \delta_t) = \phi_\chi(\delta_{st}) = \chi(st) = \chi(s)\chi(t) = \phi_\chi(\delta_s)\phi_\chi(\delta_t)$$

άρα $\phi_\chi(f * g) = \phi_\chi(f)\phi_\chi(g)$ για κάθε $f, g \in c_{00}(G)$ λόγω γραμμικότητας, και άρα για κάθε $f, g \in \ell^1(G)$ λόγω συνέχειας. Επίσης προφανώς $\phi_\chi(\delta_e) = \chi(e) = 1$, άρα η ϕ_χ είναι χαρακτήρας της $\mathcal{A}$. $\square$

Έχουμε λοιπόν μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση

$$\widehat{G} \to \mathfrak{M}(\mathcal{A}) : \chi \to \phi_\chi$$

μέσω της οποίας μπορούμε να μεταφέρουμε την (ασθενή-*) τοπολογία του $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ στον $\widehat{G}$: είναι η ασθενέστερη τοπολογία τ στο $\widehat{G}$ για την οποία η απεικόνιση $\chi \to \phi_\chi$ είναι συνεχής. Ισοδύναμα, ένα δίκτυο $\{\chi_i\}$ του $\widehat{G}$ τ-συγκλίνει σε ένα $\chi \in \widehat{G}$ αν και μόνον αν $\phi_{\chi_i}(f) \to \phi_\chi(f)$ για κάθε $f \in \ell^1(G)$.

Λήμμα 4. *Η τοπολογία τ στον $\widehat{G}$ είναι η τοπολογία της σύγκλισης στα σημεία της G.*
Δηλαδή ένα δίκτυο $\{\chi_i\}_{i\in I}$ του $\widehat{G}$ τ-συγκλίνει σε ένα $\chi \in \widehat{G}$ αν και μόνον αν $\chi_i(s) \to \chi(s)$ για κάθε $s \in G$.

Απόδειξη. Αν $\phi_{\chi_i}(f) \to \phi_\chi(f)$ για κάθε $f \in \ell^1(G)$, τότε, για κάθε $s \in G$, θέτοντας $f = \delta_s$ έχουμε $\chi_i(s) = \phi_{\chi_i}(\delta_s) \to \phi_\chi(\delta_s) = \chi(s)$.

Αντίστροφα: Υποθέτουμε ότι $\chi_i(s) \to \chi(s)$ για κάθε $s \in G$, θεωρούμε ένα $f \in \ell^1(G)$ και πρέπει να δείξουμε ότι $\phi_{\chi_i}(f) \to \phi_\chi(f)$.

Έστω λοιπόν $\epsilon > 0$. Αφού $f \in \ell^1(G)$, υπάρχει πεπερασμένο υποσύνολο $F \subseteq G$ ώστε $\sum_{s\in F} |f(s)| > \|f\|_1 - \epsilon$ οπότε $\sum_{s\notin F} |f(s)| < \epsilon$. Τώρα, αφού $\chi_i(s) \to \chi(s)$ για κάθε $s \in F$ και το F είναι πεπερασμένο, υπάρχει δείκτης $i_0 \in I$ ώστε για κάθε $i \geqslant i_0$ και για κάθε $s \in F$ να έχουμε $|\chi_i(s) - \chi(s)| < \epsilon$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
|\phi_{\chi_i}(f) - \phi_\chi(f)| &= \left|\sum_{s\in G} f(s)\chi_i(s) - \sum_{s\in G} f(s)\chi(s)\right| \leqslant \sum_{s\in G} |f(s)||\chi_i(s) - \chi(s)| \\
&= \sum_{s\notin F} |f(s)||\chi_i(s) - \chi(s)| + \sum_{s\in F} |f(s)||\chi_i(s) - \chi(s)| \\
&< \epsilon \sup_{s\in G} |\chi_i(s) - \chi(s)| + \|f\|_1 \max_{s\in F} |\chi_i(s) - \chi(s)| \leqslant (2 + \|f\|_1)\epsilon
\end{aligned}$$

(αφού $|\chi_i(s) - \chi(s)| \leqslant |\chi_i(s)| + |\chi(s)| = 2$).

για κάθε $i \geqslant i_0$, και άρα $\lim_i |\phi_{\chi_i}(f) - \phi_\chi(f)| = 0$. $\square$

Το σύνολο $\widehat{G}$ αποκτά την δομή (αβελιανής) ομάδας, αν εφοδιασθεί με τον πολλαπλασιασμό κατά σημείο, δηλαδή

$$\begin{aligned} &\widehat{G} \times \widehat{G} \to \widehat{G} : (\chi_1, \chi_2) \to \chi_1 \cdot \chi_2 \\ \text{όπου} \quad &(\chi_1 \cdot \chi_2)(s) := \chi_1(s)\chi_2(s) \quad \text{για κάθε } s \in G \end{aligned}$$

(η προσεταιριστικότητα έπεται άμεσα απ' την αντίστοιχη ιδιότητα της ομάδας $\mathbb{T}$) με ουδέτερο στοιχείο τον σταθερό χαρακτήρα $\mathbf{1}(s) = 1$ για κάθε $s \in G$ και αντίστροφο $\chi^{-1}(s) = (\chi(s))^{-1}$ για κάθε $s \in G$.

Μάλιστα, η $\widehat{G}$ είναι (συμπαγής και Hausdorff) *τοπολογική ομάδα*, δηλαδή η πράξη $\widehat{G} \times \widehat{G} \to \widehat{G} : (\chi_1, \chi_2) \to \chi_1 \cdot \chi_2$ είναι συνεχής απεικόνιση, και το ίδιο ισχύει και για την αντιστροφή $\widehat{G} \to \widehat{G} : \chi \to \chi^{-1}$.

Απόδειξη. Αν $\{\chi_i\}_{i\in I}$ και $\{\psi_i\}_{i\in I}$ είναι δύο δίκτυα στην $\widehat{G}$ που τ-συγκλίνουν στα $\chi, \psi \in \widehat{G}$ αντίστοιχα, τότε το δίκτυο $\{\chi_i \cdot \psi_i\}_{i\in I}$ θα συγκλίνει ως προς την τ στο $\chi \cdot \psi \in \widehat{G}$. Πράγματι, απ' το προηγούμενο Λήμμα αρκεί να δείξω ότι $(\chi_i \cdot \psi_i)(s) \to (\chi \cdot \psi)(s)$ για κάθε $s \in G$. Αυτό όμως είναι εύκολο:

$$\begin{aligned} |(\chi_i \cdot \psi_i)(s) - (\chi \cdot \psi)(s)| &= |\chi_i(s)\psi_i(s) - \chi(s)\psi(s)| \\ &= |(\chi_i(s) - \chi(s))\psi_i(s) + \chi(s)(\psi_i(s) - \psi(s))| \\ &\leqslant |\chi_i(s) - \chi(s)||\psi_i(s)| + |\chi(s)||\psi_i(s) - \psi(s)| \\ &= |\chi_i(s) - \chi(s)| + |\psi_i(s) - \psi(s)| \to 0 \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε (!) ότι $|\psi_i(s)| = |\chi(s)| = 1$ για κάθε $s \in G$ και $i \in I$. Επίσης,

$$\begin{aligned} |\chi_i^{-1}(s) - \chi^{-1}(s)| &= |(\chi_i(s)^{-1} - (\chi(s))^{-1}| \\ &= \left| \frac{\chi(s) - \chi_i(s)}{\chi_i(s)\chi(s)} \right| = |\chi_i(s) - \chi(s)| \to 0 \end{aligned}$$

γιατί $|\chi_i(s)\chi(s)| = 1$ για κάθε $s \in G$ και $i \in I$.

Συμπέρασμα:

Πρόταση 5. *Έστω G μια αβελιανή ομάδα. Ο τοπολογικός χώρος $(\widehat{G}, \tau)$ (όπου τ η τοπολογία της σύγκλισης στα σημεία της G) είναι ομοιομορφικός με τον συμπαγή και Hausdorff τοπολογικό χώρο $(\mathfrak{M}(\ell^1(G)), w^*)$ μέσω της απεικόνισης $\chi \to \phi_\chi$. Συνεπώς οι C*-άλγεβρες $C(\mathfrak{M}(\ell^1(G)))$ και $C(\widehat{G})$ είναι *-ισομορφικές. Η $(\widehat{G}, \tau)$ είναι αβελιανή συμπαγής τοπολογική ομάδα.*