ΑΛΓΕΒΡΕΣ BANACH (Θ.14)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ V

1. **(α)** Δείξτε ότι κάθε *-μορφισμός $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ C* αλγεβρών χωρίς μονάδα επεκτείνεται μοναδικά σε έναν μοναδιαίο *-μορφισμό $\phi^{\sim} : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}_1$ θέτοντας $\phi^{\sim}(a + \lambda\mathbf{1}) = \phi(a) + \lambda\mathbf{1}$. Αν η $\mathcal{B}$ έχει μονάδα τότε ο ϕ επεκτείνεται μοναδικά σε έναν μοναδιαίο *-μορφισμό $\phi^{\sim} : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}$.

   (β) Αν $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι *-μορφισμός, δείξτε ότι $\sigma(\phi(a)) \subseteq \sigma(a) \cup \{0\}$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$. Αν οι $\mathcal{A}$ και $\mathcal{B}$ έχουν μονάδα και $\phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$ δείξτε ότι $\sigma(\phi(a)) \subseteq \sigma(a)$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.

2. Μια γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ μεταξύ C* αλγεβρών λέγεται *θετική* αν $\Phi(\mathcal{A}_+) \subseteq \mathcal{B}_+$.

   (α) Δείξτε ότι η κάθε *-μορφισμός είναι θετικός.

   (β) Δείξτε ότι κάθε θετική γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ικανοποιεί $\Phi(a^*) = (\Phi(a))^*$ για κάθε $a \in \mathcal{A}$.
   Υπόδειξη: Αν $b = b^*$, τότε $\Phi(b) = \Phi(b_+ - b_-) = \Phi(b_+) - \Phi(b_-) \in \mathcal{B}_+ - \mathcal{B}_+$.

   (γ) Δείξτε ότι κάθε θετική γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ είναι συνεχής.
   Υπόδειξη: Έστω όχι. Δείξτε ότι τότε υπάρχει ακολουθία (a_n) *θετικών* στοιχείων νόρμας 1 ώστε $\|\Phi(a_n)\| \geqslant n^3$ για καθε n, και δείξτε ότι αυτό οδηγεί σε άτοπο θεωρώντας το $a := \sum \frac{1}{n^2} a_n$.

   (δ) Δείξτε ότι, αν η $\mathcal{A}$ δεν έχει μονάδα, κάθε θετική γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ επεκτείνεται σε μιά θετική γραμμική απεικόνιση $\Phi_1 : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{B}_1$ θέτοντας $\Phi_1(a + \lambda\mathbf{1}) = \Phi(a) + \lambda \|\Phi\| \mathbf{1}$.
   Υπόδειξη: Αν $a + \lambda\mathbf{1} \geqslant 0$, δείξτε ότι $\lambda \geqslant 0$.

3. Έστω Γ μη κενό σύνολο (π.χ. $\Gamma = \mathbb{N}$). Θεωρούμε την μεταθετική C* άλγεβρα $A := \ell^\infty(\Gamma)$ και ονομάζουμε $\beta\Gamma$ το φάσμα της με την ασθενή *-τοπολογία. Δείξτε ότι το σύνολο Γ εμφυτεύεται ως πυκνό διακριτό υποσύνολο στον συμπαγή χώρο $\beta\Gamma$ και ότι (αν ταυτίσουμε το Γ με την εικόνα του) κάθε φραγμένη συνάρτηση $f : \Gamma \to \mathbb{C}$ επεκτείνεται μοναδικά σε μια συνεχή συνάρτηση $\tilde{f} : \beta\Gamma \to \mathbb{C}$.