ΑΛΓΕΒΡΕΣ BANACH (Θ.14)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ IV

1. Έστω $\mathcal{A}$ η άλγεβρα Banach $C(\mathbb{T})$ των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ εφοδιασμένη με τις πράξεις κατά σημείο και τη νόρμα supremum.

   Έστω $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ το σύνολο των *τριγωνομετρικών πολυωνύμων* p όπου $p(z) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k z^k$, $z \in \mathbb{T}$ με μιγαδικούς συντελεστές $\{a_k\}$.

   (α) Δείξτε ότι η $\mathcal{A}_0$ είναι υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Stone – Weierstrass και συνεπώς είναι πυκνή στην $\mathcal{A}$.

   (β) Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζω $\phi_k : \mathcal{A}_0 \to \mathbb{C} : p \to a_k$ όπου $p(z) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k z^k$. Δείξτε ότι η ϕ_k είναι καλά ορισμένη συνεχής γραμμική μορφή στην $\mathcal{A}_0$ και συνεπώς επεκτείνεται σε συνεχή γραμμική μορφή $\phi_k : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$. Μπορείτε να εκφράσετε την $\phi_k(f)$ με κάποιον τύπο; Είναι η ϕ_k χαρακτήρας;

   (γ) Ονομάζω $\mathcal{B} := \bigcap\limits_{k \in \mathbb{N}} \ker \phi_{-k}$. Είναι κλειστός υπόχωρος της $\mathcal{A}$ και $\mathbf{1} \in \mathcal{B}$. Δείξτε ότι είναι υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$.
   Υπόδειξη: Έστω $\mathcal{B}_0 := \mathcal{B} \cap \mathcal{A}_0$. Πρόκειται για το σύνολο των *αναλυτικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων* p της μορφής $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$, $z \in \mathbb{T}$. Παρατηρείστε ότι η $\mathcal{B}_0$ είναι υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ και δείξτε ότι είναι πυκνή στην $\mathcal{B}$.

   (δ) Για κάθε $f \in \mathcal{A}$ θέτουμε $f^{\#}(z) = \overline{f(\bar{z})}$. Δείξτε ότι η $f \to f^{\#}$ είναι (καλά ορισμένη) ενέλιξη στην $\mathcal{A}$ που είναι ισομετρική. Δείξτε ότι $f \in \mathcal{B} \Rightarrow f^{\#} \in \mathcal{B}$. Εξετάστε αν η $f \to f^{\#}$ ικανοποιεί την ιδιότητα C*.

   (ε) [Προαιρετικά] Δείξτε ότι κάθε $f \in \mathcal{B}$ επεκτείνεται μοναδικά σε μια $\tilde{f} \in A(\mathbb{D})$ και ότι, αντίστροφα, για κάθε $g \in A(\mathbb{D})$ ο περιορισμός $f := g|\mathbb{T}$ ανήκει στην $\mathcal{B}$ και $\tilde{f} = g$.

2. Θεωρούμε δυο συμπαγείς και Hausdorff χώρους X και Y. Αν $\phi : Y \to X$ είναι συνεχής συνάρτηση, ορίζουμε $\phi_* : C(X) \to C(Y) : f \to f \circ \phi$. Δείξτε ότι η ϕ_* είναι *-μορφισμός με $\phi_*(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Εξετάστε πότε ο ϕ_* είναι 1-1 και πότε είναι επί.

   Antistrophly, έστω $\Phi : C(X) \to C(Y)$ ένας *-μορφισμός με $\Phi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$. Δείξτε ότι υπάρχει $\phi : Y \to X$ συνεχής ώστε $\phi_* = \Phi$.
   [Υπόδειξη: Για κάθε $y \in Y$, θεωρείστε την απεικόνιση $\delta_y \circ \Phi : C(X) \to C(Y) \to \mathbb{C}$ (όπου $\delta_y(g) = g(y)$) και παρατηρείστε ότι είναι χαρακτήρας, οπότε υπάρχει (γιατί;) $x = \phi(y) \in X$ ώστε $\delta_y \circ \Phi = \delta_x$.]
   Εξετάστε πότε η ϕ είναι 1-1 και πότε είναι επί.