ΑΛΓΕΒΡΕΣ BANACH (Θ14)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ Ι

βφ 1. Έστω $A = \{f \in \mathcal{C}[0,1] : f' \in \mathcal{C}[0,1]\}$, όπου f' η πρώτη παράγωγος της f. Έστω $| f | := \|f\| + \|f'\|$, $\forall\, f \in A$. Να αποδειχθεί ότι η $A[| \cdot |]$ είναι άλγεβρα Banach με τις πράξεις οριζόμενες κατά σημείο.

2. Έστω $(A_i)_{i=1,\dots,n}$ μια πεπερασμένη οικογένεια αλγεβρών Banach και A το ευθύ άθροισμα τους. Αν $I_i := \{x \in A : x_k = 0,\ \forall k \neq i\}$, να αποδειχθεί ότι το I_i είναι κλειστό ιδεώδες της A ισομετρικά ισόμορφο με την A_i, $i = 1, ..., n$.

3. Έστω $A = A_1 \oplus A_2$, όπου A_i, $i = 1, 2$, άλγεβρες Banach. Θεωρώντας την A_2 ταυτιζόμενη με το ιδεώδες I_2 (όπως στην Άσκηση 1) μέσω ενός ισομετρικού ισομορφισμού, να δείξετε ότι η άλγεβρα A/A_2 είναι Banach και ταυτίζεται με την A_1 ως προς ένα τοπολογικό ισομορφισμό.

4. Έστω A μία νορμαρισμένη άλγεβρα και I ένα κλεστό ιδεώδες της A, έτσι ώστε και το I και η A/I να είναι πλήρεις (ως μετρικοί χώροι). Να αποδειχθεί ότι τότε η A είναι άλγεβρα Banach.