<u>Άσκηση:</u> Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του ΠΣΤ:
$y''-2y'+(\lambda+1)y=0 \quad y(0)=0 \quad y(1)=0 \quad t\in[0,1]$.

<u>Λύση:</u> $y''-2y'+(\lambda+1)y=0$ χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2-2r+(\lambda+1)=0$

$\Delta = 4-4\lambda-4=-4\lambda$

<u>Περιπτώσεις</u>

i) $\Delta=-4\lambda>0$, λύσεις χ.εξ.: $r_{1,2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{-\lambda}}{2}=1\pm\sqrt{-\lambda}$

Γενική λύση: $y(t)=c_1e^{(1+\sqrt{-\lambda})t}+c_2e^{(1-\sqrt{-\lambda})t}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \\ y(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} c_1+c_2=0 \\ c_1e^{1+\sqrt{-\lambda}}+c_2e^{1-\sqrt{-\lambda}}=0 \end{cases}$$

Επίλυση συστήματος με μέθοδο Cramer:

$$\underbrace{\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ e^{1+\sqrt{-\lambda}} & e^{1-\sqrt{-\lambda}}\end{pmatrix}}_{K}=e^{1-\sqrt{-\lambda}}-e^{1+\sqrt{-\lambda}}=\frac{e}{e^{\sqrt{-\lambda}}}-\frac{e^{1+2\sqrt{-\lambda}}}{e^{\sqrt{-\lambda}}}=\frac{e(1+e^{2\sqrt{-\lambda}})}{e^{\sqrt{-\lambda}}}\neq0$$

$$c_1=\frac{\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & e^{1-\sqrt{-\lambda}}\end{pmatrix}}{K}=0 \qquad c_2=\frac{\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ e^{1+\sqrt{-\lambda}} & 0\end{pmatrix}}{K}=0$$

Μοναδική λύση ΠΣΤ: $y(t)=0$

Άρα $\lambda<0$ δεν είναι ιδιοτιμές

ii) $\Delta=-4\lambda=0 \qquad r_{1,2}=0$ Γενική λύση: $y(t)=(c_1+c_2t)e^t \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$

$y(0)=0 \Rightarrow c_1=0 \qquad y(1)=0 \Rightarrow c_2=0$ (Μοναδική) λύση ΠΣΤ: $y(t)=0$ Άρα $\lambda=0$ δεν είναι ιδιοτιμή.

iii) $\Delta=-4\lambda<0 \rightarrow r_{1,2}=1\pm i\sqrt{\lambda}$ Γενική λύση $y(t)=e^t(c_1\cos(t\sqrt{\lambda})+c_2\sin(t\sqrt{\lambda}))$

$y(0)=0 \rightarrow c_1=0$, $\quad y(1)=0 \xRightarrow{c_1=0} c_2\cdot e\sin(\sqrt{\lambda})=0$

Αναζητούμε μη τετριμμένες (μη μηδενικές) λύσεις, άρα θέλουμε $c_2\neq0$ και $\sin(\sqrt{\lambda})=0 \rightarrow \sqrt{\lambda}=n\pi,\ n\in\mathbb{N} \rightarrow \lambda=n^2\pi^2,\ n\in\mathbb{N}$

Άρα το ΠΣΤ έχει θετικές ιδιοτιμές της μορφής $\boxed{\lambda=n^2\pi^2}$ $n\in\mathbb{N}$ και ιδιοσυναρτήσεις της μορφής: $\boxed{y(t)=c\cdot e^t\sin(tn\pi)}$, $n\in\mathbb{N}$, $c\in\mathbb{R}$

Άσκηση: Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις του ΠΣΤ:
$y''-2y'+(\lambda+1)y=0 \quad y(0)=0 \quad y(1)=0 \quad t\in[0,1]$.

Λύση: $y''-2y'+(\lambda+1)y=0$ χαρακτηριστική εξίσωση: $r^2-2r+(\lambda+1)=0$
$\Delta=4-4\lambda-4=-4\lambda$

Περιπτώσεις

i) $\Delta=-4\lambda>0$, λύσεις χ.εξ.: $r_{1,2}=\dfrac{2\pm2\sqrt{-\lambda}}{2}=1\pm\sqrt{-\lambda}$

Γενική λύση: $y(t)=c_1e^{(1+\sqrt{-\lambda})t}+c_2e^{(1-\sqrt{-\lambda})t}$, $c_1,c_2\in\mathbb{R}$

$\left.\begin{matrix}y(0)=0\\ y(1)=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{matrix}c_1+c_2=0\\ c_1e^{1+\sqrt{-\lambda}}+c_2e^{1-\sqrt{-\lambda}}=0\end{matrix}\right.$ Επίλυση συστήματος με μέθοδο Cramer:

$\underbrace{\det\begin{pmatrix}1 & 1\\ e^{1+\sqrt{-\lambda}} & e^{1-\sqrt{-\lambda}}\end{pmatrix}}_{K}=e^{1-\sqrt{-\lambda}}-e^{1+\sqrt{-\lambda}}=\dfrac{e}{e^{\sqrt{-\lambda}}}-\dfrac{e^{1+2\sqrt{-\lambda}}}{e^{\sqrt{-\lambda}}}=\dfrac{e(1+e^{2\sqrt{-\lambda}})}{e^{\sqrt{-\lambda}}}\neq0$

$c_1=\dfrac{\det\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & e^{1-\sqrt{-\lambda}}\end{pmatrix}}{K}=0 \qquad c_2=\dfrac{\det\begin{pmatrix}1 & 0\\ e^{1+\sqrt{-\lambda}} & 0\end{pmatrix}}{K}=0$ Μοναδική λύση ΠΣΤ: $y(t)=0$

Άρα $\lambda<0$ δεν είναι ιδιοτιμές.

ii) $\Delta=-4\lambda=0 \quad r_{1,2}=0$ Γενική λύση: $y(t)=(c_1+c_2t)e^t \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}$
$y(0)=0\Rightarrow c_1=0 \quad y(1)=0\Rightarrow c_2=0$ (Μοναδική) λύση ΠΣΤ: $y(t)=0$ Άρα $\lambda=0$ δεν είναι ιδιοτιμή.

iii) $\Delta=-4\lambda<0\Rightarrow r_{1,2}=1\pm i\sqrt{\lambda}$ Γενική λύση: $y(t)=e^t(c_1\cos(t\sqrt{\lambda})+c_2\sin(t\sqrt{\lambda}))$
$y(0)=0\Rightarrow c_1=0$, $y(1)=0\overset{c_1=0}{\Rightarrow}c_2\cdot e\sin(\sqrt{\lambda})=0$
Αναζητούμε μη τετριμμένες (μη μηδενικές) λύσεις, άρα θέλουμε $c_2\neq0$
και $\sin(\sqrt{\lambda})=0\Rightarrow\sqrt{\lambda}=n\cdot\pi,\ n\in\mathbb{N}\Rightarrow\lambda=n^2\pi^2,\ n\in\mathbb{N}$
Άρα το ΠΣΤ έχει θετικές ιδιοτιμές της μορφής $\boxed{\lambda=n^2\pi^2}$, $n\in\mathbb{N}$
και ιδιοσυναρτήσεις της μορφής: $\boxed{y(t)=c\cdot e^t\sin(tn\pi)}$, $n\in\mathbb{N}$, $c\in\mathbb{R}$