Αντίστροφος Μετασχηματισμός Laplace

Θεώρημα: (Μονοσήμαντου του αντίστροφου μετασχ. Laplace)
Έστω $f(t)$, $g(t)$ συναρτήσεις κατά τμήματα συνεχείς και εκθετικής τάξης στο $[0,+\infty)$. Έστω, ακόμη, ότι ισχύει $\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{g(t)\}$, δηλ. $F(s)=G(s)$ $\forall$ $s>a$. Τότε, στα σημεία συνέχειας έχουμε $f(t)=g(t)$, $t\geq 0$.

Ορισμός: Αν $\mathcal{L}\{f(t)\}=F(s)$, τότε, η $f(t)$ λέγεται αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace της $F(s)$ και συμβολίζεται $f(t)=\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}$

Ιδιότητες του αντίστροφου μετασχηματισμού Laplace

1. Γραμμικότητα:
$\mathcal{L}^{-1}\{c_1F_1(s)+c_2F_2(s)\}=c_1\mathcal{L}^{-1}\{F_1(s)\}+c_2\mathcal{L}^{-1}\{F_2(s)\}$
2. Μετατόπιση:
Αν $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$, τότε, $\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\}=e^{at}f(t)$, $a\in\mathbb{R}$
3. Αν $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$, τότε, $\mathcal{L}^{-1}\{sF(s)-f(0)\}=f'(t)$
4. Αν $\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=f(t)$, τότε, $\mathcal{L}^{-1}\{F^{(n)}(s)\}=(-1)^nt^nf(t)$

π.χ. Να βρεθούν οι αντίστροφοι μετασχηματισμοί Laplace

- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+9}\right\}=\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^2+3^2}\right\}=\frac{2}{3}\sin 3t$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^5}\right\}=\frac{1}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4!}{s^5}\right\}=\frac{1}{4!}\cdot\frac{t^4}{1}$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s-4}\right\}=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-4}\right\}=3e^{4t}$, $s>4$
- $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+3}{s^4}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s^4}\right\}=t+\frac{3}{3!}t^3$

Εφαρμογές στις διαφορικές εξισώσεις

1. Να λυθεί με χρήση του μετασχ. Laplace $y'+y=t$.

<u>Λύση:</u> Λόγω γραμμικότητας του μετασχ. Laplace, έχουμε:

$$\mathcal{L}\{y'\}+\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{t\} \Rightarrow sY(s)-\underbrace{y(0)}_{c}+Y(s)=\frac{1}{s^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (s+1)Y(s)=\frac{1}{s^2}+c \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}+\frac{c}{s+1}$$

$$\frac{1}{s^2(s+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{\Gamma}{s+1} \quad // \quad A=-1 \quad B=1 \quad \Gamma=2$$

$$Y(s)=\frac{-1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{c+2}{s+1}$$

$$y(t)=\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}+\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{c+2}{s+1}\right\}$$

Άρα, $y(t)=-1+t+(c+2)e^{-t}$

Θα μπορούσε να δίνεται και σαν ΠΑΤ $\begin{pmatrix} y'+y=t \\ y(t_0)=y_0 \end{pmatrix}$, οπότε βρίσκω το c μέσω της αρχικής συνθήκης.

2. Να λυθεί με χρήση του μετ. Laplace το ΠΑΤ: $y''+y=t$, $y(0)=1$ $y'(0)=\cancel{2}-2$

<u>Λύση:</u> Λόγω γραμμικότητας: $\mathcal{L}\{y''\}+\mathcal{L}\{y\}=\mathcal{L}\{t\} \Rightarrow s^2Y(s)-s\underbrace{y(0)}_{+1}-\underbrace{y'(0)}_{-2}+Y(s)=\frac{1}{s^2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (s^2+1)Y(s)=\frac{1}{s^2}+s-2 \Rightarrow Y(s)=\frac{1}{s^2(s^2+1)}+\frac{s}{s^2+1}-\frac{2}{s^2+1}$$

$$\frac{1}{s^2(s^2+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B}{s^2}+\frac{\Gamma s+\Delta}{s^2+1} \quad // \quad A=\Gamma=0,\ B=1,\ \Delta=-1$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2}+\frac{s-3}{s^2+1}=\frac{s}{s^3+0}+\frac{s-3}{(s-0)^2+1^2} \Rightarrow \cos 0\cdot t+e^{0\cdot t}\cdot\cos t=1+\cos t=y(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t)=1+\cos t}$$

Προβλήματα Συνοριακών Τιμών (ΠΣΤ)

Θα ασχοληθούμε κυρίως με ΠΣΤ που αφορούν διαφορικές εξισώσεις $2^{ης}$ τάξης. Έστω, λοιπόν, ένα ΠΣΤ της μορφής

$L[x] = x'' + p(t)x' + q(t)x = r(t)$, $t \in [a,b]$ $p,q,r \in C(I)$.

Αναζητούμε λύση που να ικανοποιεί τις συνοριακές συνθήκες:

$b_1[x] = a_{11}x(a) + a_{12}x'(a) + b_{11}x(b) + b_{12}x'(b) = \gamma_1$

$b_2[x] = a_{21}x(a) + a_{22}x'(a) + b_{21}x(b) + b_{22}x'(b) = \gamma_2$

Παρατήρηση: i) Αν $r(t)=0$, $\gamma_1=\gamma_2=0$, τότε, το ΠΣΤ λέγεται ομογενές

ii) Αν $r(t) \neq 0$ ή μια τουλάχιστον από τις συνοριακές συνθήκες είναι μη ομογενής $(|\gamma_1|+|\gamma_2|>0)$ το ΠΣΤ είναι μη ομογενές.

Π.χ. Να λυθεί το ΠΣΤ $\begin{pmatrix} x'' + \pi^2 x = 1 \\ x(0) + x'(0) = 0 \\ x(1) + x'(1) = 0 \end{pmatrix}$ $t \in [0,1]$

Λύση: Η αντίστοιχη ομογενής: $x'' + \pi^2 x = 0 \ldots$ $x_{ειδ}(t) = \frac{1}{\pi^2}$

$r^2 + \pi^2 = 0 \Rightarrow r = \pm i\pi$

Γενική λύση της $x'' + \pi^2 x = 1$: $x(t) = c_1 \cos\pi t + c_2 \sin\pi t + \frac{1}{\pi^2}$

$x'(t) = -\pi c_1 \sin\pi t + c_2 \pi \cos\pi t$

$$\left.\begin{array}{l} x(0)+x'(0)=0 \\ x(1)+x'(1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 1/\pi^2 + c_1 + c_2\pi = 0 \\ 1/\pi^2 - c_1 - c_2\pi = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1 + c_2\pi = -1/\pi^2 \\ -c_1 - c_2\pi = -1/\pi^2 \end{array}\right\} \text{Το ΠΣΤ είναι Αδύνατον}$$

Π.χ. Να λυθεί το ΠΣΤ $x'' + x = t$ $x(0) - x(\pi) = 0$ $t \in [0,\pi]$

$x'(0) - x'(\pi) = 0$

Λύση: $x'' + x = t$ Μια προφανής ειδική λύση: $x_{ειδ}(t) = t$

Αντίστοιχη ομογενής $x'' + x = 0$, $r^2 + 1 = 0$ $\Delta = 0 - 4 = -4 < 0$ $r_{1,2} = \pm i$

Γενική λύση: $x(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t$

$x'(t) = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + 1$

$x(0)-x(\pi)=0 \Rightarrow c_1-(-c_1+\pi)=0 \Rightarrow \boxed{c_1=\frac{\pi}{2}}$

$x'(0)-x'(\pi)=0 \Rightarrow c_2+1-(-c_2+1)=0 \Rightarrow \boxed{c_2=0}$

Άρα, λύση του ΠΣΤ: $\boxed{x(t)=\frac{\pi}{2}\cos t+t}$

▷ Να βρεθούν οι μη μηδενικές λύσεις (αν υπάρχουν) για τις κατάλληλες τιμές του λ. $x''+\lambda x=0$ $t\in[0,\pi]$ $x(0)=0$ $x(\pi)=0$

Λύση: Χαρακτηριστική Εξίσωση: $r^2+\lambda=0$ $\Delta=-4\lambda$

Διερεύνηση:

i) $\lambda=0$ $r_{1,2}=0$ $x(t)=c_1t+c_2$ Άρα λύση $x(t)=0$

$$\left.\begin{array}{l} x(0)=0 \\ x(\pi)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1=0 \\ c_2=0 \end{array}\right.$$

ii) $\lambda<0$ $r_{1,2}=\pm\frac{\sqrt{-4\lambda}}{2}=\pm\sqrt{-\lambda}$ $x(t)=c_1e^{\sqrt{-\lambda}t}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}t}$

$$\left.\begin{array}{l} x(0)=0 \\ x(\pi)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1+c_2=0 \\ c_1e^{\sqrt{-\lambda}\pi}+c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}=0 \end{array}$$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{-\lambda}\pi} & e^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{pmatrix}\neq 0$ Το σύστημα έχει μοναδική λύση ... Άρα $c_1=c_2=0$ $x(t)=0$

iii) $\lambda>0$ $\Delta=-4\lambda<0$ ... $x(t)=c_1\cos(\sqrt{\lambda}t)+c_2\sin(\sqrt{\lambda}t)$

$$\left.\begin{array}{l} x(0)=0 \\ x(\pi)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} c_1=0 \\ c_2\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0 \end{array}\right.$$

Υποπεριπτώσεις (Αναζητώ μη μηδενική $x(t)$)

► Αν $\sin\sqrt{\lambda}\pi\neq 0$, τότε, $c_2=0$ και $x(t)=0$

► Αν $\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0 \Rightarrow \pi\sqrt{\lambda}=n\pi,\ n\in\mathbb{Z}_{>0} \Rightarrow \lambda=n^2,\ n\in\mathbb{Z}_{>0}$, τότε, $c_2\in\mathbb{R}$

Άρα το ΠΣΤ έχει άπειρες λύσεις, τις $x(t)=c\cdot\sin(nt),\ n\in\mathbb{Z}_{>0},\ c\in\mathbb{R}$ για $\lambda=n^2,\ n\in\mathbb{Z}_{>0}$.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ Παρατήρηση: Οι τιμές του λ, για τις οποίες το ΠΣΤ έχει μη μηδενικές λύσεις, λέγονται ιδιοτιμές του ΠΣΤ και οι αντίστοιχες συναρτήσεις λέγονται ιδιοσυναρτήσεις.

(Τις ασκήσεις που ακολουθούν διαβάστε τις σαν θεωρία)

Ασκήσεις

① Αν $a,b,c \in \mathbb{R}_{>0}$ νδο $\forall$ λύση $y = \varphi(t)$ της ΔΕ $ay''+by'+cy=0$, ισχύει $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=0$.

Λύση: Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι η $ar^2+br+c=0$ με διακρίνουσα $\Delta=b^2-4ac$ Περιπτώσεις:

i) $\Delta>0$, η χαρ. εξ. έχει λύσεις $r_1,r_2 \in \mathbb{R}$, $r_1\neq r_2$

$\varphi(t)=c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t}$ Σύμφωνα με τους τύπους Vieta:

$r_1+r_2=-\frac{b}{a}<0$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a>0,\ b>0)$ Άρα οι r_1,r_2 είναι ομόσημες

$r_1\cdot r_2=\frac{c}{a}>0$ $(a,c\in\mathbb{R}_{>0})$ και αρνητικές

$\lim_{t\to\infty}e^{r_1t}=\lim_{t\to+\infty}e^{r_2t}=0$ άρα $\boxed{\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=0}$

ii) $\Delta=0$ $r_1=r_2=-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}<0$ Ακολουθούμε τις γνωστές διαδικασίες...

$\varphi(t)=c_1e^{r_1t}+c_2te^{r_1t}$ $\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^{-r_1t}}\overset{DLH}{=}\lim_{t\to\infty}\frac{1}{-r_1e^{-r_1t}}=0$

Άρα $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=0$

$\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=0$ Σε κάθ.

iii) $\Delta<0$ η εξίσωση έχει μιγαδικές λύσεις $r_{1,2}=\sigma\pm i\omega$

με τις γνωστές διαδικασίες:

$\varphi(t)=e^{\sigma t}(c_1\cos\omega t+c_2\sin\omega t)$ (μηδενική επί φραγμένης)

Άρα $\lim_{t\to+\infty}\varphi(t)=0$ σε κάθε περίπτωση.

(2) Έστω $ay'' + by' + cy = g(t)$, $g \in C(I)$, $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a,b,c > 0$ με λύσεις $y_1(t)$, $y_2(t)$. Να δείξετε ότι $\lim_{t\to\infty}(y_1(t) + y_2(t)) = 0$.

Λύση: Σύμφωνα με την προηγούμενη άσκηση και με το θεώρημα: η διαφορά δύο λύσεων ~~της~~ μιας μη ομογενούς ΔΕ είναι λύση της αντίστοιχης ομογενούς δ.ε., έχουμε

$\varphi(t) = y_1(t) - y_2(t)$.

Άρα $\lim_{t\to+\infty} \varphi(t) = \lim_{t\to+\infty}(y_1(t) - y_1(t)) = 0$.

Συμπλήρωμα Θεωρίας

Θεώρημα: Αν $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ γρ. ανεξάρτητες λύσεις της $L[x]=0$ ($2^{ης}$ τάξης), σε ένα διάστημα I, τότε, κάθε λύση της $L[x]=0$ μπορεί να γραφεί μονοσήμαντα στη μορφή: $\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $t \in I$.

Απόδειξη: Λόγω γραμμικότητας του L, για μια τυχαία $\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$ έχουμε, $L[\varphi(t)] = c_1 L[\varphi_1(t)] + c_2 L[\varphi_2(t)] = 0$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ $\forall\, t \in I$

Έστω ότι $\varphi(t_0) = \kappa_1$ $\varphi'(t_0) = \kappa_2$), $\kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$ για κάποιο $t_0 \in I$. Έχουμε το ΠΑΤ: $\begin{pmatrix} L[x]=0 \\ \varphi(t_0)=\kappa_1 \\ \varphi'(t_0)=\kappa_2 \end{pmatrix}$

Υποθέτουμε ότι $\exists\ c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ τ.ω. $\varphi(t) = c_3\varphi_1(t) + c_4\varphi_2(t)$

έχουμε
$$\begin{aligned} \varphi(t_0) &= c_3\varphi_1(t_0) + c_4\varphi_2(t_0) = \kappa_1 \\ \varphi'(t_0) &= c_3\varphi_1'(t_0) + c_4\varphi_2'(t_0) = \kappa_2 \end{aligned} \quad (\Sigma)$$

Παρατηρούμε ότι $\det\begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{pmatrix} \neq 0$ αφού φ_1, φ_2 γρ. ανεξάρτητες

Άρα το σύστημα (Σ) έχει μοναδική λύση $(c_3, c_4) \in \mathbb{R}^{1\times 2}$

(άρα $c_1 = c_3$ $c_2 = c_4$)

Ορίζουμε, $\psi(t) = c_3\varphi_1(t) + c_4\varphi_2(t) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \psi(t_0)=\kappa_1 \\ \psi'(t_0)=\kappa_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \psi$ λύση της $L[x]=0$

Από θεώρημα ύπαρξης και μονοσήμαντου προκύπτει ότι $\psi(t) = \varphi(t)$.

Άρα η έκφραση $\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$ γράφεται μονοσήμαντα. ∎

Συμβουλή: 1) Όταν λύνετε ασκήσεις στις εξετάσεις, καλό είναι να αναλύετε το κάθε βήμα σας πλήρως. και να μη γράφετε τόσο τηλεγραφικά όσο εγώ (που το έκανα για οικονομία χώρου και χρόνου).

2) Για να καλύψετε πλήρως το φάσμα όσων μπορεί να σας ζητηθούν στις εξετάσεις, εκτός από τις μεθοδολογίες επίλυσης, διαβάστε και τις αποδείξεις των Προτάσεων, Θεωρημάτων και τύπων που χρησιμοποιήσαμε.