$$\lim_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(x) = e^{1-x} =: y_{\varepsilon\xi}(x)$$

το γράφημα της οποίας δίνεται από την διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα 20.

Για να μελετήσουμε το όριο ως προς την κλίμακα $\frac{x}{\varepsilon}$ θέτουμε $\eta = \frac{x}{\varepsilon}$ και εκφράζουμε την y συναρτήσει της η (κλίμακα μεγέθυνσης):

ε
Λ

$$y_\varepsilon(x) = \frac{e^{-\varepsilon\eta} - e^{-\eta}}{e^{-1} - e^{-\frac{1}{\varepsilon}}} =: \underset{\varepsilon}{V}(\eta) \xrightarrow{\varepsilon\to 0} e - e^{1-\eta} =: V_{\varepsilon\sigma}(\eta), \tag{67}$$

που περιγράφει το όριο κοντά στο $\varepsilon = 0$. Στη συνέχεια επισημαίνουμε τις εξισώσεις που αυτά τα δύο διακεκριμμένα όρια ικανοποιούν. Κατ' ~~αρχήν~~ αρχάς, η $y_{\varepsilon\xi}(x)$ ικανοποιεί την (65) και τη συνοριακή συνθήκη στο $x = 1$, που προκύπτει θέτοντας $\varepsilon = 0$ στην (64). Για να ανακαλύψουμε την εξίσωση για την $V_{\varepsilon\sigma}(\eta)$, χρησιμοποιούμε τις σχέσεις

$$\frac{d}{dx} = \frac{d}{d\eta}\frac{d\eta}{dx} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{d}{d\eta},$$

$$\frac{d^2}{dx^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}\frac{d^2}{d\eta^2},$$

και γράφουμε το (64) σε ισοδύναμη μορφή

$$\begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\frac{d^2V}{d\eta^2} + (\frac{1}{\varepsilon}+1)\frac{dV}{d\eta} + V = 0, \\ V(0) = 0\,, \quad V(\frac{1}{\varepsilon}) = 1. \end{cases} \tag{68}$$

$\sqrt{\varepsilon}$

Πολλαπλασιάζοντας με ε και θέτοντας $\varepsilon = 0$ παίρνουμε

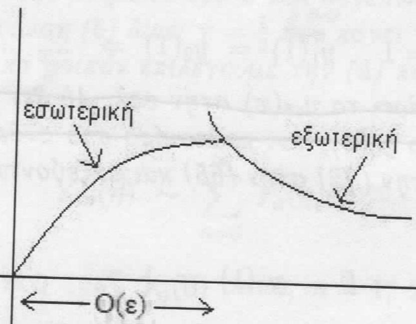
$$\begin{cases} \frac{d^2V}{d\eta^2} + \frac{dV}{d\eta} = 0, \\ V(0) = 0. \end{cases} \tag{69}$$

Παρατηρούμε ότι η $V_{\varepsilon\sigma}(\eta)$ στην (67) ικανοποιεί την εξίσωση (69) και τη συνοριακή συνθήκη στο $\eta = 0$ ($\Leftrightarrow x = 0$). Η συνοριακη συνθηκη στο $\eta = \frac{1}{\varepsilon}$ απορριπτεται διοτι η αλλαγη της κλιμακος εχει νοημα κοντα στο $x = 0$.

Η κατανόηση ανωτέρω συνοψίζεται ως εξής: Υπάρχουν δύο διαφορετικά οριακά προβλήματα (ή προβλήματα αναφοράς), το (65) με μια συνοριακή συνθήκη, και *το (69), με την άλλη συνοριακή συνθήκη. Μακριά από το συνοριακό στρώμα η μεταβολή της λύσης είναι αργή και οι παράγωγοι φραγμένες ως προς ε, και κατά συνέπεια ο όρος εy″ στην (64) είναι αμελητέος. Αντίθετα εντός του συνοριακού στρώματος η μεταβολή της λύσης είναι γρήγορη, και η παράγωγος εκρήγνυται όπως το* $\varepsilon \longrightarrow 0$ *με αποτέλεσμα ο όρος εy″ στην (64) να είναι σημαντικός. Η* e^{1-x} *δίνει την* εξωτερική προσέγγιση, *ενώ η* $e-e^{1-\eta}$ *δίνει την* εσωτερική προσέγγιση.

Τέλος παρατηρούμε ότι συσχετίζονται η $y_{\varepsilon\xi}(x)$ *και η* $V_{\varepsilon\sigma}(\cancel{x})$ *ως εξής:* /η

$$e = \lim_{x\to 0} y_{\varepsilon\xi}(x) = \lim_{\cancel{x}\to\infty} V_{\varepsilon\sigma}(\cancel{x}). \qquad (70)$$ /η



Σχ. 21: Επίπεδο φάσης για ε=0.

Κάνοντας τώρα χρήση της $y_{\varepsilon\xi}$, $V_{\varepsilon\sigma}$ *μπορούμε να κατασκευάσουμε μια προσέγγιση* $y_{o\mu}$ *που προσεγγίζει ομοιόμορφα την* $y_{\varepsilon\xi}$ *στο διάστημα* $[0,1]$ *ως εξής:*

$$\left\{\begin{aligned} y_{o\mu}(x) &= y_{\varepsilon\xi}(x) + V_{\varepsilon\sigma}(\eta) - [\textit{κοινό όριο}] \\ &= e^{1-x} + (e - e^{1-\eta}) - e \\ &= e^{1-x} - e^{1-\eta} \\ &= e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}} \end{aligned}\right. \qquad (71)$$

η οποία διαφέρει από την $y_\varepsilon(x)$ *στην (66) κατά τον όρο* $e^{-\frac{1}{\varepsilon}}$ *στον παρονομαστή.*

<u>*Παρατήρηση:*</u>

Γενικά περιμένουμε ότι θα ισχύει η εκτίμηση

$$|y_\varepsilon(x) - y_{o\mu}(x)| = O(\varepsilon), \quad \textit{ομοιόμορφα στο } [0,1].$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση ~~εύκολα επαληθεύεται η~~ πολύ ισχυρότερη εκτίμηση:

ισχυει η

$$|y_\varepsilon(x) - y_{o\mu}(x)| = O\left(e^{-\frac{1}{\varepsilon}}\right).$$

Περιγράφουμε τώρα πιο συστηματικά τη μέθοδο. Ξεκινάμε με ένα πλήρες εξωτερικό ανάπτυγμα:

$$y_{\varepsilon\xi}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x)\varepsilon^n, \tag{72}$$

$$y_0(1) = 1\,, \quad y_1(1) = y_2(1) = \dots \dots = 0.$$

~~*Σημειώνουμε ότι a priori το $y_{\varepsilon\xi}(x)$ στην σελ. 45 δεν συμπίπτει με το $y_{\varepsilon\xi}(x)$ ιστην (71), αλλά με το $y_0(x)$, τον πρώτο όρο στο ανάπτυγμα.*~~

Αντικαθιστώντας την (72) στην (65) και μαζεύοντας δυνάμεις του ε, παίρνουμε

$$\begin{cases} y_0' + y_0 = 0\,, \quad y_0(1) = 1 \\ y_n' + y_n = -y_{n-1}'' - y_{n-1}'\,, \quad y_n(1) = 0\,, \quad n \ge 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{cases} \tag{73}$$

Η λύση είναι

$$y_0(x) = e^{1-x}\,, \quad y_n(x) \equiv 0, \quad n = 1\,, 2\,, \dots$$

Κατά συνέπεια η $y_{\varepsilon\xi}(x) = e^{1-x}$ είναι η εξωτερική προσέγγιση όλων των τάξεων του ε. Αυτός είναι ο λόγος που στην περιοχή $x >> \varepsilon$ η διαφορά της $y(x)$ από την $y_{\varepsilon\xi}(x)$ είναι το πολύ εκθετικά μικρή: $|y - y_{\varepsilon\xi}| = O(\varepsilon^n)$ $\forall\, n = 1,\ 2,\ ,3 \dots$

Πριν θεωρήσουμε το εσωτερικό ασυμπτωτικό ανάπτυγμα, αναλύουμε την επιλογή της κλίμακας η: Θέτουμε $\eta : \frac{x}{\varepsilon^\gamma}$, $\gamma > 0$ θα προσδιοριστεί στη συνέχεια. Θέτουμε $V_\eta := y(\varepsilon^\gamma \eta)$ οπότε η (64) παίρνει τη μορφή

ε^γ

$$\varepsilon^{1-2\gamma}\ddot{Y} + (1+\varepsilon)\varepsilon^{-\gamma}\dot{Y} + Y = 0.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $\ddot{Y} = O(1)$, $\dot{Y} = O(1)$, $Y = O(1)$ *και εφαρμόζουμε την αρχή της εξισορρόπησης: επιλογή του* γ *έτσι ώστε να έχουμε όσο περισσότερους όρους γίνεται της ίδιας τάξης, με τους υπόλοιπους αμελητέους (σύγκρινε με το πολύγωνο του Νεύτωνα). Απαριθμούμε τις διάφορες περιπτώσεις:*

$$\begin{cases} (a) & 1-2\gamma = -\gamma \quad (1o\varsigma = 2o\varsigma) \\ (b) & 1-2\gamma = 0 \quad (1o\varsigma = 3o\varsigma) \\ (c) & -\gamma = 0 \quad (2o\varsigma = 3o\varsigma) \end{cases}$$

Η περίπτωση (c) δίνει την κλίμακα του x *και συνεπώς τίποτα καινούριο, άρα απορρίπτεται. Η περίπτωση (b) δίνει* $\gamma = \frac{1}{2}$ ~~*που*~~ *κάνει το δεύτερο όρο* ~~*καθόλου*~~ *αμελητέο. Αναγκαστικά λοιπόν επιλέγουμε την (a) που οδηγεί σε* $\gamma = 1$ *και* $\eta = \frac{x}{\varepsilon}$.

$$Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) \sim \sum_{n=0}^{\infty} Y_n(\eta)\varepsilon^n , \tag{74}$$

$$Y_{\varepsilon\sigma}(0) = 0 \;\Rightarrow\; Y_\eta(0) = 0,\; n = 1,\, 2,\, 3,\, \ldots$$

Αντικατάσταση στην (69) και μάζεμα των όρων δίνει

$$\ddot{Y}_0 + \dot{Y}_0 = 0 , \quad Y_0(0) = 0$$

$$\ddot{Y}_n + \dot{Y}_n = -Y'_{n-1} - Y_{n-1} , \quad Y_n(0) = 0$$

Η πρώτη σχέση δίνει

$$Y_0(\eta) = A_0(1 - e^{-\eta})$$

με A_0 *αυθαίρετη σταθερά. Ολοκληρώνοντας τις άλλες έχουμε*

$$Y_n(\eta) = \int_0^\eta [A_n e^{-z} - Y_{n-1}(z)]dz , \quad n \geq 1$$

όπου A_n *αυθαίρετες σταθερές.*

Τώρα ταιριάζουμε ασυμπτωτικά το εσωτερικό με το εξωτερικό ανάπτυγμα, συναρμόζοντας όρο προς όρο.

Αντικατάσταση του $x = \eta\varepsilon$ *στο* $y_{\varepsilon\xi}(x)$ *και ανάπτυξη ως προς* ε *δίνει*

$$y_{\varepsilon\xi}(x) \;=\; e^{1-x} \;=\; e\Big(1 \,-\, \varepsilon\eta \,+\, \frac{\varepsilon^2\eta^2}{2!} \,-\, \frac{\varepsilon^3\eta^3}{3!} \,+\, \ldots\Big)$$

Συγκρίνουμε όρους αντίστοιχων δυνάμεων του ε *των δυναμοσειρών για* $\eta \longrightarrow \infty$. *Για* $\eta \longrightarrow \infty$ *έχουμε* $Y_0(\eta) \sim A_0$ *που πρέπει να ταιριάζει με τον πρώτο όρο στο ανάπτυγμα, δηλαδή*

$$A_0 = e\ .$$

Γυρίζουμε πίσω και υπολογίζουμε

$$Y_1(\eta) = \,(A_0 \,+\, A_1)(1 \,-\, e^{-\eta}) \,-\, e\eta$$

Για $\eta \longrightarrow \infty$, $Y_1(\eta) \sim (A_0 \,+\, A_1) - e\eta$ *που πρέπει να ταιριάζει με το δεύτερο όρο, από όπου συμπεραίνουμε ότι* $A_1 = -A_0 = -e$.

Έτσι εξάγουμε ότι $Y_n(\eta) = e\left[\dfrac{(-1)^n}{n!}\right]\eta^n$, *και καταλήγουμε στο ότι*

$$\begin{aligned} Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) \;&\sim \sum_{\eta=1}^{\infty} \varepsilon^n \frac{(-1)^n\eta^n}{n!} - e^{1-\eta} \\ &= e^{1-\varepsilon\eta} - e^{1-\eta} \\ &= e^{1-x} \,-\, e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Τώρα κατασκευάζουμε την ομοιόμορφη προσέγγιση $y_{o\mu}(x)$ *κάνοντας χρήση της συνταγής στην* (??)

(71)

$$\begin{aligned} y_{o\mu}(x) &= y_{\varepsilon\xi}(x) + Y_{\varepsilon\sigma}(x) - [\textit{κοινή τιμή τους}] \\ &= e^{1-x} + (e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}) - e^{1-x} \\ &= e^{1-x} - e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}. \end{aligned}$$

διαφέρει από την ακριβή λύση

Παρατηρούμε ότι η $y_{o\mu}$, ~~*παρόλο που είναι η προσέγγιση απείρου τάξης εξακολουθεί να διαφέρει από την ακριβή λύση.*~~ *Τούτο οφείλεται στο ότι η δυναμοσειρά ως προς* ε, ε^2,... *δεν πιάνει τον όρο* $\varepsilon^{-\frac{1}{\varepsilon}}$, ~~*Αυτό*~~ *παρόλο ότι η δυναμοσειρές των ασυμπτωτικών αναπτυγμάτων, σε αυτή την περίπτωση συγκλίνουν.*

$$\cancel{\varepsilon << x << 1 \quad (\varepsilon \to 0^+)}$$

Άσκηση 3.12 *Εφαρμόστε τη μέθοδο του παραδείγματος 3.1 στο Παράδειγμα 3.4. Οδηγείστε σε αποτέλεσμα;*

Άσκηση 3.13 *Δείξτε την εκτίμηση στην* (71). *Μήπως ισχύει η ισχυρότερη εκτίμηση*

$$|y_{\alpha\kappa\rho}(x) \;-\; y_{o\mu}(x)| \;=\; O(\varepsilon^n)$$

για κάθε $n = 1,\ 2,\ \ldots$;

Συνοψίζουμε τώρα τη μέθοδο, στην απλούστερη μορφή της όπως εφαρμόζεται στην (65) αγνοώντας ότι σε αυτή την περίπτωση γνωρίζουμε τη λύση (67) και εστιάζουμε στην προσέγγιση ε-τάξης.

Α. Εξωτερικό Ανάπτυγμα

$$y_{\varepsilon\xi}(x) \;=\; y_0(x) \;+\; \varepsilon y_1(x) \;+\; \varepsilon^2 y_2(x) \;+\; \ldots$$

Αντικατάσταση στην (64) και μάζεμα δυνάμεων του ε δίνει

$$\varepsilon\Big[y_0''(x) + \varepsilon y_1''(x) + \ldots\Big] + (1{+}\varepsilon)\Big[y_0'(x) + \varepsilon y_1'(x) + \ldots\Big] + \Big[y_0(x) + \varepsilon y_1(x) + \ldots\Big] = 0, \tag{75}$$

$$y_{\varepsilon\xi}(1) = \cancel{0}\ 1$$

/1

ε^0 όροι

$$y_0' \;+\; y_0 \;=\; 0 \;, \qquad y_0(1) \;=\; 1$$

$$\Rightarrow \qquad y_0(x) \;=\; e^{1-x}.$$

Β. Εσωτερικό Ανάπτυγμα

Προσδιορισμός κλίμακας

$$\eta = \frac{x}{\varepsilon^{\gamma}} \quad , \qquad Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) \;:=\; y(\varepsilon^{\gamma}\eta) \;\;\Leftrightarrow\;\; y(x) \;=\; Y_{\varepsilon\sigma}\Big(\frac{x}{\varepsilon^{\gamma}}\Big)$$

Αντικατάσταση στην (64) δίνει

$$\varepsilon^{1-2\gamma}\ddot{Y} \;+\; (1+\varepsilon)\varepsilon^{-\gamma}\dot{Y} \;+\; Y \;=\; 0, \quad Y(0)=0.$$

Εξισορρόπηση όρων δίνει

$$1 \;-\; 2\gamma \;=\; -\gamma \qquad \Leftrightarrow \qquad \gamma \;=\; 1.$$

Συνεπώς η εξίσωση (64) γράφεται ως

$$\varepsilon^{-1}\ddot{Y}_{\varepsilon\sigma} \;+\; (1+\varepsilon)\varepsilon^{-1}\dot{Y}_{\varepsilon\sigma} \;+\; Y_{\varepsilon\sigma} \;=\; 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{Y}_{\varepsilon\sigma} \;+\; (1+\varepsilon)\dot{Y}_{\varepsilon\sigma} \;+\; \varepsilon Y_{\varepsilon\sigma} \;=\; 0$$

$$Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) \;=\; Y_0(\eta) \;+\varepsilon Y_1(\eta) \;+\; \varepsilon^2 Y_2(\eta) \;+\; ...$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση δίνει

$$\Big(\ddot{Y}_0(\eta) + \varepsilon\ddot{Y}_1(\eta) + ...\Big) + (1+\varepsilon)\Big(\dot{Y}_0(\eta) + \varepsilon\dot{Y}_1(\eta) + ...\Big) + \varepsilon\Big(Y_0(\eta) + \varepsilon Y_1(\eta) + ...\Big) \;=\; 0.$$

<u>ε^0 όροι</u>

$$\ddot{Y}_0 \;+\; \dot{Y}_0 \;=\; 0\,, \qquad Y_0(0)=0$$

$$\Rightarrow \quad Y_0(\eta) \;=\; C(1 \;-\; e^{-\eta}) \quad ,$$ C σταθερά υπό προσδιορισμό.

Γ. <u>Ασυμπτωτικό Ταίριασμα - Συναρμογή</u>

$$y_0(x) \;=\; e^{1-x}$$

$$Y_0(\eta) \;=\; C(1 - e^{-\eta})$$ e

$$\lim_{x\to 0} y_0(x) \;=\; \lim_{\eta\to\infty} Y_0(\eta) \qquad \Leftrightarrow \qquad e \;=\; C$$

Δ. <u>Ομοιόμορφη Προσέγγιση</u> (1ης τάξης)

Αντικατάσταση στην (64) δίνει

$$\varepsilon^{1-2\gamma}\ddot{Y} \;+\; (1+\varepsilon)\varepsilon^{-\gamma}\dot{Y} \;+\; Y \;=\; 0, \;\; Y(0)=0.$$

Εξισορρόπηση όρων δίνει

$$1 \;-\; 2\gamma \;=\; -\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \gamma \;=\; 1.$$

Συνεπώς η εξίσωση (64) γράφεται ως

$$\varepsilon^{-1}\ddot{Y}_{\varepsilon\sigma} \;+\; (1+\varepsilon)\varepsilon^{-1}\dot{Y}_{\varepsilon\sigma} \;+\; Y_{\varepsilon\sigma} \;=\; 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\ddot{Y}_{\varepsilon\sigma} \;+\; (1+\varepsilon)\dot{Y}_{\varepsilon\sigma} \;+\; \varepsilon Y_{\varepsilon\sigma} \;=\; 0$$

$$Y_{\varepsilon\sigma}(\eta) \;=\; Y_0(\eta) \;+\varepsilon Y_1(\eta) \;+\; \varepsilon^2 Y_2(\eta) \;+\; ...$$

Αντικατάσταση στην εξίσωση δίνει

$$\Big(\ddot{Y}_0(\eta) + \varepsilon\ddot{Y}_1(\eta) + ...\Big) + (1+\varepsilon)\Big(\dot{Y}_0(\eta) + \varepsilon\dot{Y}_1(\eta) + ...\Big) + \varepsilon\Big(Y_0(\eta) + \varepsilon Y_1(\eta) + ...\Big) \;=\; 0.$$

<u>ε^0 όροι</u>

$$\ddot{Y}_0 \;+\; \dot{Y}_0 \;=\; 0\;, \qquad Y_0(0)=0$$

$$\Rightarrow \quad Y_0(\eta) \;=\; C(1 \;-\; e^{-\eta}) \quad ,$$ C σταθερά υπό προσδιορισμό.

Γ. <u>Ασυμπτωτικό Ταίριασμα - Συναρμογή</u>

$$y_0(x) \;=\; e^{1-x}$$

$$Y_0(\eta) \;=\; C(1 - e^{-\eta})$$ e

$$\lim_{x\to 0} y_0(x) \;=\; \lim_{\eta\to\infty} Y_0(\eta) \quad \Leftrightarrow \quad e \;=\; C$$

Δ. <u>Ομοιόμορφη Προσέγγιση</u> (1ης τάξης)

$$y_{o\mu}(x) \;=\; y_0(x) + Y_0(\frac{x}{\varepsilon}) - e \;=\; e^{1-x} \;-\; e^{1-\frac{x}{\varepsilon}}$$

$$|y_\varepsilon(x) \;-\; y_{o\mu}(x)| \;=\; O(\varepsilon)\;, \quad x \in [0,1].$$

Παρατήρηση: Η συναρμογή γίνεται πιο καταληπτή με την εισαγωγή ενδιάμεσων κλιμάκων. Επί παραδείγματι, θεωρείστε τις $y_0(x) = e^{1-x}$, $Y_0(\eta) = C(1-e^{-\eta}) = C(1-e^{-\frac{x}{\varepsilon}})$. Αναμένουμε ότι για $\eta^* = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\eta^* \sim 1$, οι δύο προσεγγίσεις επικαλύπτονται, δηλαδή

$$e^{1-\sqrt{\varepsilon}\eta^*} \;=\; C\left(1-e^{-\frac{\sqrt{\varepsilon}\eta^*}{\varepsilon}}\right), \quad \text{για } 0<\varepsilon<<1.$$

Άσκηση 3.14 *3.2 Logan, σελ. 76*

Άσκηση 3.15 *3.3 Logan, σελ. 77*

Άσκηση 3.16 *3.4 Logan, σελ. 77*

Άσκηση 3.17 *3.5 Logan, σελ. 77*

Άσκηση 3.18 *3.6 Logan, σελ. 77*

Άσκηση 3.19 ** Θεωρείστε το ιδιόμορφο πρόβλημα*

$$\varepsilon y'' \;-\; x^2 y' \;-\; y \;=\; 0 \quad , \quad y(0)=y(1)=1, \quad 0<\varepsilon<<1,$$

το οποίο έχει δύο οριακά στρώματα, ένα στο $x=1$ πάχους $O(\varepsilon)$ και ένα στο $x=0$ πάχους $O(\sqrt{\varepsilon})$ (βλέπε Β. προηγουμένως). Βρείτε ομοιόμορφη προσέγγιση ε τάξης.

Άσκηση 3.20 ** Θεωρείστε το ιδιόμορφο πρόβλημα*

$$\varepsilon y'' \;-\; x^4 y' \;-\; y \;=\; 0 \quad , \quad y(0)=y(1)=1$$

Βρείτε την ομοιόμορφη προσέγγιση ε τάξης (βλέπε προηγούμενη άσκηση).

Άσκηση 3.21 *Θεωρείστε το πρόβλημα $\varepsilon y'' + x^{\alpha} y' + y = 0$, $y(0)=y(1)=0$, $0<\varepsilon<<1$. Για ποιές τιμές του α υπάρχει οριακό στρώμα στο $x=0$; Ποιό είναι το πάχος του στρώματος;*