Επισκόπηση Ανάλυσης

2η Σειρά Ασκήσεων

Λύσεις

(1) **3.3 Pemberton and Rau pg 51**

$T(x)$ = Sandra's income tax = $\begin{cases} 0, & \text{if } x < E \\ t(x-E) & \text{if } x \geq E \end{cases}$

where x = pre-tax income and $E > 0$, $0 < t < 1$ constants

$B(x)$ = Sandra's income related transfer = $\begin{cases} s(P-x) & \text{if } x < P \\ 0, & \text{if } x \geq P \end{cases}$

where $P > 0$ and $t < s < 1$ constants

$F(x)$ = Sandra's disposable income = $x - T(x) + B(x)$

(i) if $E > P \Rightarrow F(x) = \begin{cases} x + s(P-x), & \text{if } 0 \leq x < P \ (*) \\ x, & \text{if } P \leq x < E \\ x - t(x-E), & \text{if } x \geq E \end{cases}$

(*) if $0 \leq x < P < E$ then $F(x) = x - 0 + s(P-x)$

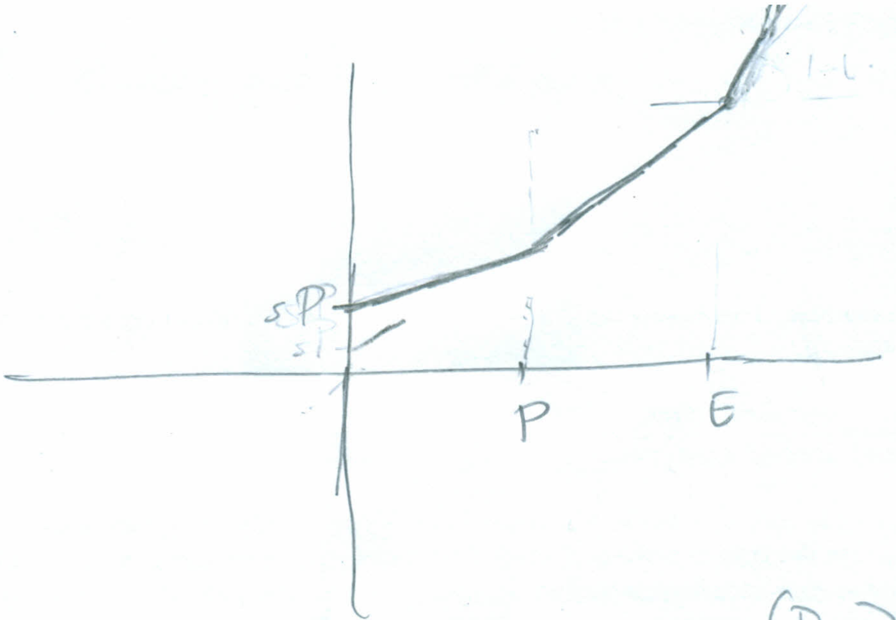
if $P \leq x < E$ then $F(x) = x - 0 + 0$

if $x \geq E$ then $F(x) = x - t(x-E)$

Thus $F(x) = \begin{cases} (1-s)x + sP, & 0 \leq x < P \\ x, & P \leq x < E \\ (1-t)x + tE, & x \geq E \end{cases}$

$s < t \Rightarrow 1-s > 1-t \geq 0 \longrightarrow$ slope of the first and second line segment

$F(0) = sP$



(ii) When $E < P$ and $s+t < 1$ $\Rightarrow$ $F(x) = \begin{cases} x + s(P-x) & \text{if } 0 \le x < E \\ x - t(x-E) + s(P-x), & E \le x < P \\ x - t(x-E), & x \ge P \end{cases}$

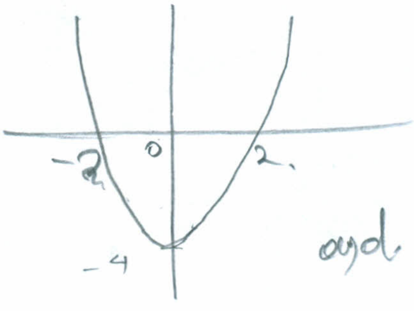
$$F(x) = \begin{cases} (1-s)x + sP & \text{if } 0 \le x < E \\ (1-t-s)x + tE + sP, & \text{if } E \le x < P, \\ (1-t)x + tE, & x \ge P \end{cases}$$

(iii) When $E < P$ and $s+t > 1$ the $F(x)$ is the same as in (ii) but $1-t-s < 0$ and thus the second line segment has negative slope (decreasing in x) instead of increasing in x as in (ii))

4.1.3. Pemberton and Rau pg 60

Sketch the graph $y = x^2 - 4$.

The graph of the function $y = x^2 - 4$ is U-shaped with vertex at $(0, -4)$



intersects the x-axis for x: $x^2 - 4 = 0$ $\Leftrightarrow x = \pm 2$

and $x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2$

4.2.2. Pemberton and Rau pg 64

Let $f(x) = x^3$ and $g(x) = x^5$

(a) $f(-\alpha) = (-\alpha)^3 = -\alpha^3 = -f(\alpha) \Rightarrow f$ περιττή. Όμοια για την g

and $A_f = \mathbb{R}$

(b) Οι γραφ. παραστάσεις των f, g είναι συμμετρικές ως προς το O.

4.2.6 Pemberton and Rau pg 65

Cobb-Douglas production function $Y = 2K^{2/3} L^{1/3}$

If $K = \alpha$ and $L = b$ then initially $Y_0 = 2\alpha^{2/3} b^{1/3}$

and if we increase both K, L by 1% then $K = 1.01\alpha = (1 + 1\%)\alpha$

$L = 1.01 b = (1 + 1\%) b$

and $Y = 2 (1.01)^{2/3} \alpha^{2/3} (1.01)^{1/3} \cdot b^{1/3}$

therefore the relative increase in Y

$$\frac{Y - Y_0}{Y_0} = \frac{2 a^{2/3} b^{1/3} \left((1.01)^{2/3} \cdot (1.01)^{1/3} - 1 \right)}{2a^{2/3} b^{1/3}}$$

$$= (1.01)^1 - 1 = 0.01 = 1\%$$

Say that you increase both K, L by $p\%$

Then $K = (1 + p\%)\alpha$, $L = (1 + p\%) b$

and the relative increase in Y will be

$$\frac{Y - Y_0}{Y_0} = (1 + p\%)^1 - 1 = p\%$$

4.3.3 Pemberton and Rau pg 67

$$Y = 2k^{1/2}L^{1/3}R^{1/6}$$

$$\overset{\log(\cdot)}{\Leftrightarrow} \log Y = \log 2k^{1/2}L^{1/3}R^{1/6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log Y = \log 2 + \log k^{1/2} + \log L^{1/3} + \log R^{1/6}$$

$$\Leftrightarrow \log Y = \log 2 + \frac{1}{2}\log k + \frac{1}{3}\log L + \frac{1}{6}\log R$$

4.3. Pemberton and Rau pg 68

We complete the square

(i) $f(x) = ax + b + \frac{c}{x} = (\sqrt{ax})^2 + \left(\frac{c}{x}\right)^2 - 2\cdot\sqrt{ax}\cdot\sqrt{\frac{c}{x}}$

$$+ 2\sqrt{ax}\sqrt{\frac{c}{x}} + b$$

$$= \left(\sqrt{ax} - \sqrt{\frac{c}{x}}\right)^2 + \underbrace{2\sqrt{ac} + b}$$

Hence, f is minimized when $\overset{\text{constant}}{\sqrt{ax} - \sqrt{\frac{c}{x}}} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{ax} = \sqrt{\frac{c}{x}}$

Recall that $g(x) = x^2 + 4c$ is minimized for $x = 0$

$$\boxed{x = \sqrt{\frac{c}{a}}}$$

and minimum value of f is $f\left(\sqrt{\frac{c}{a}}\right) = 2\sqrt{ac} + b$

ii) Since $C(x) = 50 + 2x + 0.08x^2 \Rightarrow \frac{C(x)}{x} = \frac{50}{x} + 2 + 0.08x$

$$\overset{(i)}{=} \left(\sqrt{0.08x} - \sqrt{\frac{50}{x}}\right)^2 + 2\sqrt{0.08 \cdot 50} + 2.$$

$\Rightarrow$ and the average cost is minimized

for $x = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{\frac{50}{0,08}} = 25$ and the

minimum value is $2 + 2\sqrt{50 \cdot 0,08} = 6$

(2) Τουμπής και Τσιτζένη σελ 30

$\boxed{2.4}$ Έστω ότι η f είναι γνησίως αύξουσα τότε

για κάθε $x_1, x_2 \in A$ με $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (1)

Έστω ότι για $x_1 \neq x_2$ ότι ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$ όμως είναι

άτοπο. γιατί αν $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ από (1)

και αν $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

άρα $f(x_1) \neq f(x_2)$ και άρα η f είναι 1-1

$\boxed{2.5}$ Έστω $x_1 < x_2$ τότε $0 < f(x_1) < f(x_2)$ και $g(x_1) > g(x_2) > 0$ >

γιατί f είναι γν αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα

Άρα $\left.\begin{array}{l} 0 < 1/g(x_1) < 1/g(x_2) \\ 0 < f(x_1) < f(x_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{f(x_1)}{g(x_1)} < \frac{f(x_2)}{g(x_2)}$

$\Rightarrow f/g$ γνησίως αύξουσα

) Έστω f άρτια και περιττή τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$f(-x) = f(x) = -f(x) \Leftrightarrow 2f(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

(3) $A=(0,1] \Rightarrow \inf A = 0$

$\max A = \sup A = 1$

$A=\left\{1-\frac{1}{2},\ 1-\frac{1}{3},\ 1-\frac{1}{4},\ \dots\right\}$

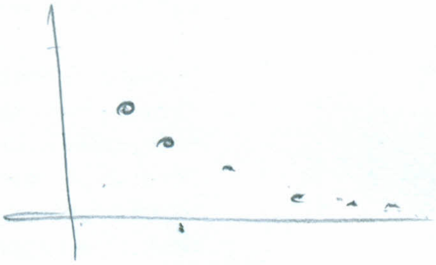
Παρατηρώ ότι $a_n = 1-\frac{1}{n}$ για $n=2,3,\dots$ όπου $a_n \in A$.

για $a_{n+1}-a_n = 1-\frac{1}{n+1}-1+\frac{1}{n} = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$

$\Rightarrow a_{n+1}-a_n>0 \iff a_{n+1}>a_n$.

άρα $a_n \uparrow_n$ με $a_2 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} < a_3 < a_4 \le \dots$

άρα $\min A = \inf A = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$



Επίσης $a_n = \frac{n-1}{n} > 0$ για $n \ge 2$

$a_n \to 1$ για $n\to\infty$ άρα $\sup A = 0$

και $\nexists \max A$ γιατί $1 \notin A$

$A=\{x : (x-\sqrt{2})(x-3)\le 0\} = [\sqrt{2},3]$

	1	$\sqrt{2}$	3	
$+$		$-$		$+$

άρα $\min A = \inf A = \sqrt{2}$

$\max A = \sup A = 3$

4. $\lim \frac{n^2+1}{n^3+n^2+1} = \lim \frac{n^2\left(1+1/n^2\right)}{n^3\left(1+\frac{1}{n}+1/n^3\right)} = \lim \frac{1}{n}\,\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}+1/n^3\right)}$

$\overset{1/n\to 0}{=} \frac{0\cdot 1}{1} = 0$

(β) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{e^n}$

Θεωρώ την $f(x)=\dfrac{x}{e^x}=xe^{-x},\ x>0$

τότε $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\ \underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

άρα $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{e^n}=0$

(γ) Όμοια

(δ) $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n^2}$ Με κριτήριο Παρεμβολής

Ισχύει ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ όπου και για $n\in\mathbb{N}$ ότι

$|\sin x|\le|x| \Rightarrow \left|\sin\dfrac{1}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n^2} \Rightarrow \left|n\sin\dfrac{1}{n^2}\right|\le\dfrac{1}{n}$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow -\dfrac{1}{n}\le n\sin\dfrac{1}{n^2}\le\dfrac{1}{n}\\ \lim\limits_{n\to\infty}-\dfrac{1}{n}=0,\quad \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\sin\dfrac{1}{n^2}=0$$

ε) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n\sin n^{10}+20}{(n+1)^2}=0+0=0$

Εξετάζω τα όρια $\lim\limits_{n}\dfrac{20}{(n+1)^2}=0$ και $\lim\dfrac{n}{(n+1)^2}\sin n^{10}$

Δεύτερο με ΚΠ γιατί $\left|\dfrac{n}{(n+1)^2}\sin n^{10}\right|\le\dfrac{n}{(n+1)^2}$.

$\Leftrightarrow \quad -\frac{n}{(n+1)^2} \le \frac{n}{(n+1)^2}\sin n^{10} \le \frac{n}{(n+1)^2}$

και $\lim_n \frac{n}{(n+1)^2} \overset{:n^2}{=} \lim_n \frac{1/n}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 0$

$\lim_n -\frac{n}{(n+1)^2} = 0$ όμοια άρα $\lim_n \frac{n\sin n^{10}}{(n+1)^2} = 0$

5. (α) Παρατηρώ ότι

$$\lim_n \frac{\cos\frac{1}{n}}{\cos\frac{1}{n}+1} = \frac{\cos 0}{\cos 0 + 1} = \frac{1}{2}$$ γιατί $\frac{1}{n}\to 0$

άρα $\lim_n a_n \neq 0 \Rightarrow$ η σειρά δεν συγκλίνει

Εφαρμόζουμε το αναγκαίο κριτήριο του Cauchy ότι

$$\sum a_n = L \Rightarrow \lim_n a_n = 0$$

(β) Παρατηρώ ότι $\underbrace{\frac{1}{n^5-n^3+2}}_{a_n} \le \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{b_n}$ για κάθε $n \ge n_0$ για κάποιο n_0.

Επειδή

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{n^5-n^3+2}{n^2} = n^3 - n + \frac{2}{n^2} \to \infty \text{ για } n\to\infty$$

και η $\sum \frac{1}{n^2}$ συγκλίνει $\Rightarrow \sum_n \frac{1}{n^5-n^3+2}$ συγκλίνει (γ) $\sum e^{-n}$

$a_n = e^{-n}$ Με κριτήριο λόγου $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sin e^{-n-1}}{\sin e^{-n}}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin e^{-n-1}}{\sin e^{-n}} \overset{0/0}{\underset{DLH}{=}} \lim_{n\to\infty} \frac{-e^{-n-1}\cos(e^{-n-1})}{-e^{-n}\cos(e^{-n})} = \frac{1}{e} < 1$$

καθώς $\lim_{n\to\infty} \cos e^{-n} \overset{k=e^{-n}}{=} \lim_{k\to 0} \cos k = 1$

και άρα η $\sum \sin e^{-n}$ συγκλίνει.

(ε) $\sum \exp\left\{-\frac{1+n^2\log n}{n}\right\}$

$a_n = e^{-\frac{1+n^2\log n}{n}}$ Με κριτήριο ρίζας $a_n^{1/n} = e^{-(1+n^2\log n)}$

Όμως $\lim_{n\to\infty}(1+n^2\log n) = \infty$ άρα $\lim_{n\to\infty} a^{1/n} = \lim_{n\to\infty} e^{-(1+n^2\log n)}$

$= 0 < 1$.

και άρα η σειρά συγκλίνει

6. $$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^3 x + \sin^2 x + \sin x}{x^3 + x^2 + x}$$

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin x}{x}\cdot \sin^2 x + \frac{\sin x}{x}\cdot \sin x + \sin x}{x^2 + x + 1} = \frac{1\cdot 0^2 + 1\cdot 0 + 0}{0^2 + 0 + 1} = 0$$

7. (α) Έστω $x_0 > 0$

Θέτω $L = \frac{1}{x_0}$ και έστω δοσμένο $\varepsilon > 0$.

Τότε αρκεί να βρω $\delta > 0$ ώστε $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$.

για κάθε $x : |x - x_0| < \delta$.

Αν το $\delta = x_0$ τότε $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \left|\frac{x_0 - x}{x x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x x_0|}$

αν το $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right|$ ήταν ανεξάρτητο του x και της μορφής $k|x - x_0|$ θα μπορούσα να θέσω $\delta = \frac{\varepsilon}{k}$ και τότε.

προφανώς για $|x - x_0| < \delta \Rightarrow k \cdot |x - x_0| < \varepsilon$

$\Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$

Όμως δεν ισχύει κάτι τέτοιο διότι $\frac{|x - x_0|}{x \cdot x_0}$ Θέτω $\delta = \frac{x_0}{2}$

και τότε $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{x \cdot x_0} < \frac{2}{x_0^2}|x - x_0|$ για $x > \frac{x_0}{2}$

αφού $|x - x_0| < \frac{x_0}{2} \Rightarrow \frac{x_0}{2} < x < \frac{3x_0}{2}$.

Άρα το δεξί σκέλος της 2 είναι $\frac{2}{x_0^2}|x - x_0| = k|x - x_0|$

όπου $k = \frac{2}{x_0^2}$

και θέτω $\delta = \frac{\varepsilon x_0^2}{2}$ τότε για $|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| < \varepsilon$.

Θ. β. Έστω ότι $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ άρα $f(x)>0$ σε κοντά στο $+\infty$

$\exists\, M>0: \; |g(x)| \le M \Leftrightarrow -M \le$

τότε $\left|\dfrac{g(x)}{f(x)^{n}}\right| = \dfrac{|g(x)|}{f(x)^{n}} \le \dfrac{M}{f(x)^{n}}$

$\Leftrightarrow -\dfrac{M}{(f(x))^{n}} \le \dfrac{g(x)}{(f(x))^{n}} \le \dfrac{M}{(f(x))^{n}}$ κοντά στο $+\infty$

Επίσης $\lim_{x\to+\infty} -\dfrac{M}{f(x)^{n}} = 0$ και $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{M}{f(x)^{n}} = 0$

άρα από ΚΠ $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)^{n}} = 0$