ΜΑΠ - Επισκόπηση Μαθηματικών

Λύσεις $1^{ης}$ Σειράς Ασκήσεων – Οκτώβριος 2019

Επισκόπηση Γραμμικής Άλγεβρας

1 Πίνακες

1. Να υπολογιστούν τα παρακάτω:

   (α) $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

   Λύση

   $$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 15 & 0 & -10 \\ 5 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$
   $$= \begin{bmatrix} 3-15 & 2-0 & 1-(-10) \\ 5-5 & 1-(-5) & 0-10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 & 2 & 11 \\ 0 & 6 & -10 \end{bmatrix}$$

   (β) $3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

   Λύση

   $$3 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} - 5 \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 30 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9-30+7 \\ -3-10+(-7) \end{bmatrix}$$
   $$= \begin{bmatrix} -14 \\ -20 \end{bmatrix}$$

   (γ) $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T$

   Λύση

   $$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

   (δ) $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T$

   Λύση

   $$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$$
   $$= \begin{bmatrix} 3-2 & -1-2 \\ 2-(-4) & 1-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$$

2. Σε κάθε περίπτωση να βρείτε τις τιμές των s και t ώστε οι πίνακες να είναι συμμετρικοί:

   (α) $\begin{bmatrix} 1 & s \\ -2 & t \end{bmatrix}$

   Λύση

   Για να είναι ο πίνακας συμμετρικός πρέπει

   $$\begin{bmatrix} 1 & s \\ -2 & t \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 1 & s \\ -2 & t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ s & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & s \\ -2 & t \end{bmatrix}.$$

Εξισώνοντας τα αντίστοιχα στοιχεία παίρνουμε $s=-2$ και $t \in \mathbb{R}$

(β) $\begin{bmatrix} 2 & s & t \\ 2s & 0 & s+t \\ 3 & 3 & t \end{bmatrix}$

Λύση

Όμοια,

$$\begin{bmatrix} 2 & s & t \\ 2s & 0 & s+t \\ 3 & 3 & t \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & s & t \\ 2s & 0 & s+t \\ 3 & 3 & t \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2s & 3 \\ s & 0 & 3 \\ t & s+t & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & s & t \\ 2s & 0 & s+t \\ 3 & 3 & t \end{bmatrix}$$

$\Leftrightarrow 2s = s \Rightarrow s = 0$ και $t = 3$.

3. Να βρεθεί πίνακας A ώστε $\left(2A^T - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)^T = 4A - 9\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$

   Λύση

$$\left(2A^T - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right)^T = 4A - 9\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow (2A^T)^T - 5\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^T = 4A - \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$$

$$2A - 5\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4A - \begin{bmatrix} 9 & 9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2A - 4A = -\begin{bmatrix} 9 & 9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$-2A = \begin{bmatrix} -9+5 & -9-5 \\ 9 & 0+10 \end{bmatrix} \Leftrightarrow A = \frac{-1}{2}\begin{bmatrix} -4 & -14 \\ 9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ -9/2 & -5 \end{bmatrix}$$

4. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός και ο $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός για κάθε τετραγωνικό πίνακα A.

   Λύση

   Ένας τετραγωνικός πίνακας X είναι συμμετρικός αν $X^T = X$. Έστω $X = A + A^T$, τότε ο X είναι τεραγωνικός και αρκεί να δείξουμε ότι $X^T = X$.

$$X^T = (A + A^T)^T = A^T + (A^T)^T = A^T + A = X.$$

   Άρα, ο X είναι συμμετρικός.

   Όμοια για αντισυμμετρικό πίνακα Y θα πρέπει $Y^T = -Y$. Έστω ο $Y = A - A^T$, τότε

$$Y^T = (A - A^T)^T = A^T - (A^T)^T = A^T - A = -(A - A^T) = -Y,$$

   και άρα ο $Y = A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός.

5. Να βρεθούν τα παρακάτω γινόμενα:

   (α) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{2\times 2}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 2}$

   Λύση

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{2\times 2}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1\cdot 2+3\cdot 0 & 1\cdot(-1)+3\cdot 1 \\ 0\cdot 2-2\cdot 0 & 0\cdot(-1)-2\cdot 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}}_{2\times 2}$$

(β) $\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & -7 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}}_{2\times 3}\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{3\times 1}$

Λύση

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & 0 & -7 \\ 1 & 5 & 9 \end{bmatrix}}_{2\times 3}\underbrace{\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 5\cdot 3+0\cdot 1-7\cdot(-1) \\ 1\cdot 3+5\cdot 1+9\cdot(-1) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 22 \\ -1 \end{bmatrix}}_{2\times 1}$$

(γ) $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{3\times 3}\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -7 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}}_{3\times 2}$

Λύση

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{3\times 3}\underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -7 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} 1\cdot 3+0\cdot 5+0\cdot 9 & 1\cdot(-2)+0\cdot(-7)+0\cdot 7 \\ 0\cdot 3+1\cdot 5+0\cdot 9 & 0\cdot(-2)+1\cdot(-7)+0\cdot 7 \\ 0\cdot 3+0\cdot 5+1\cdot 9 & 0\cdot(-2)+0\cdot(-7)+1\cdot 7 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -7 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}}_{3\times 2},$$

6. Να βρεθούν όλα τα δυνατά μεταξύ τους γινόμενα, π.χ. A^2, AB, AC, κτλ. των πινάκων

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

Λύση

Οι δυνάμεις των A και C δεν ορίζονται αφού δεν είναι οι πίνακες τετραγωνικοί.

Για τον B τετρραγωνικό, υπολογίζουμε τον B^2.

$$B^2 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1-2\cdot 1/2 & 1\cdot(-2)-2\cdot 3 \\ 1/2\cdot 1+3\cdot 1/2 & 1/2\cdot(-2)+3\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -8 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

Το γινόμενο AB δεν ορίζονται αφού δε συμφωνούν οι διαστάσεις

Όμως, ο BA ορίζεται

$$BA = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1-2\cdot(-1) & 1\cdot 2-2\cdot 0 & 1\cdot 3-2\cdot 0 \\ 1/2\cdot 1+3\cdot(-1) & 1/2\cdot 2+3\cdot 0 & 1/2\cdot 3+3\cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -5/2 & 1 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Επίσης, τα γινόμενα AC και CA ορίζονται

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot(-1)+2\cdot 2+3\cdot 0 & 1\cdot 0+2\cdot 5+3\cdot 5 \\ -1\cdot(-1)+0\cdot 2+0\cdot 0 & -1\cdot 0+0\cdot 5+0\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 25 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1\cdot 1+0\cdot(-1) & -1\cdot 2+0\cdot 0 & -1\cdot 3+0\cdot 0 \\ 2\cdot 1+5\cdot(-1) & 2\cdot 2+5\cdot 0 & 0\cdot 3+5\cdot 0 \\ 0\cdot 1+5\cdot(-1) & 0\cdot 2+5\cdot 0 & 0\cdot 3+5\cdot 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -3 & 4 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Όπως και το γινόμενο CB.

$$CB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1/2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 1/2 & 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 + 5 \cdot 1/2 & 2 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \\ 0 \cdot 1 + 5 \cdot 1/2 & 0 \cdot (-2) + 5 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 9/2 & 11 \\ 5/2 & 15 \end{bmatrix}$$

7. Να αποδείξετε τα παρακάτω:

(α) Αν οι A και B αντιμετατίθονται με τον πίνακα C, τότε το ίδιο ισχύει και για τον $A + B$

Λύση

From our hypothesis we know that $AB = BA$ and $BC = CB$. So,

$$(A + B)C = AC + BC = CA + CB = C(A + B),$$

which means that C commutes with $A + B$.

(β) Για κάθε πίνακα A, οι AA^T και A^TA είναι συμμετρικοί.

Λύση

First of all remember that if A is an $m \times n$ matrix then its transpose A^T is an $n \times m$ matrix. So, both products $\underbrace{A}_{m\times n}\underbrace{A^T}_{n\times m}$ and $\underbrace{A^T}_{n\times m}\underbrace{A}_{m\times n}$ are defined and the results are square matrices. AA^T is $m \times m$ and A^TA is $n \times n$. (In order to prove that a matrix is symmetric we first should know that it is square!) From the transposition property of matrix products we have:

$$(AA^T)^T = (A^T)^TA^T = AA^T,$$

which means that AA^T is symmetric. Moreover,

$$(A^TA)^T = A^T(A^T)^T = A^TA,$$

so A^TA is symmetric as well.

(γ) Αν A και B συμμετρικοί, τότε ο AB συμμετρικός αν και μόνο αν οι A και B αντιμετατίθονται.

Λύση

First we will show that if A, B and AB are all symmetric, then $AB = BA$. A and B are square matrices because they are symmetric and they have the same size since the product AB is defined. Since AB is symmetric, we have $(AB)^T = AB \Rightarrow B^TA^T = AB \xrightarrow[B^T=B]{A^T=A} BA = AB$. Conversely, if $AB = BA$ and A, B are symmetric we have:

$$AB = BA = B^TA^T = (AB)^T,$$

so, AB is symmetric.

(δ) Για τετραγωνικούς $n \times n$ πίνακες A και B ισχύει ότι:

$$AB = BA \text{ αν και μόνο αν } (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2.$$

Λύση

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow (A + B)(A + B) = A^2 + 2AB + B^2$$
$$\Leftrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = A^2 + 2AB + B^2 \Leftrightarrow AB + BA = 2AB \Leftrightarrow BA = 2AB - AB$$
$$BA = AB.$$

2 Ορίζουσες

8. Να βρεθούν οι ορίζουσες των παρακάτω πινάκων

(α) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Λύση

$$\det(A) = 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1) = 4 - (-3) = 7.$$

(β) $B = \begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}$

Λύση

$$\det(B) = a^2b^2 - (ab)(ab) = a^2b^2 - a^2b^2 = 0$$

(γ) $C = \begin{bmatrix} 1^+ & 2^- & 3^+ \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$

Λύση

Αναπτύσσω ως προς τη 1^η γραμμη του πίνακα

$$\begin{aligned} \det(C) &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= 1(45 - 48) - 2(36 - 42) + 3(32 - 35) = (-3) - (-12) + (-9) = 0 \end{aligned}$$

(δ) $D = \begin{bmatrix} 1^+ & b^- & c^+ \\ b & c & 1 \\ c & 1 & b \end{bmatrix}$

Λύση

Δεν υπάρχει κάποια ιδαίτερη προτίμηση ως προς ποιά γραμμή ή στήλη θα αναπτύξουμε, οπότε παίρνουμε το ανάπτυγμα ως προς την 1^η γραμμή.

$$\begin{aligned} \det(D) &= 1 \det\left(\begin{bmatrix} c & 1 \\ 1 & b \end{bmatrix}\right) - b \det\left(\begin{bmatrix} b & 1 \\ c & b \end{bmatrix}\right) + c \det\left(\begin{bmatrix} b & c \\ c & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= -b^3 - c^3 + 3cb - 1 \end{aligned}$$

(ε) $E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

Λύση

Αναπτύσοουμε ως προς την 1^η γραμμή με πρόσημα:

$K = \begin{bmatrix} 0^+ & 1^- & -1^+ & 0^- \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$., και έχουμε

$$\det(K) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} =$$

$$0\begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -1\left(3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}\right) +$$

$$+(-1)\left(3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix}\right) = -22 - 11 = -33$$

(στ) $F = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Λύση

Η συγκεκριμένη ορίζουσα μπορεί να απλοποιηθεί με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών (γραμμοπράξεις). Συγκεκριμένα

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1 \leftrightarrow R3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R3-3R1 \to R3]{R2-R1 \to R2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -20 & -4 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R4-R1 \to R4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -20 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Η ορίζουσα του τελευταίου πίνακα είναι και η ορίζουσα που ζητάμε πολλαπλασιασμένη με (-1), αφού η μόνη γραμμοπράξη που επηρεάζει το αποτέλεσμα είναι η εναλλαγή γραμμών.

Άρα, αναπτύσσοντας ως προς την 1^η στήλη, έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & -5 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 1 & -20 & -4 \\ 0 & 1 & -3 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -5 & -1 \\ 1 & -20 & -4 \\ 1 & -3 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -3\begin{vmatrix} -20 & -4 \\ -3 & -3 \end{vmatrix} - (-5)\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & -20 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = ... = -132$$

9. Αν $G = \begin{bmatrix} p+x & q+y & r+z \\ a+x & b+y & c+z \\ a+p & b+q & c+r \end{bmatrix}$ και $H = \begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}$ να δείξετε ότι $\det(G) = 2\det(H)$.

Λύση

$$\begin{vmatrix} p+x & q+y & r+z \\ a+x & b+y & c+z \\ a+p & b+q & c+r \end{vmatrix} =^{R1-R3 \to R1} \begin{vmatrix} -a+x & -b+y & -c+z \\ a+x & b+y & c+z \\ a+p & b+q & c+r \end{vmatrix} =^{R1-R2 \to R1}$$

$$\begin{vmatrix} -2a & -2b & -2c \\ a+x & b+y & c+z \\ a+p & b+q & c+r \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+x & b+y & c+z \\ a+p & b+q & c+r \end{vmatrix} =^{R3-R1 \to R3}$$

$$= -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a+x & b+y & c+z \\ p & q & r \end{vmatrix} =^{R2-R1\to R2} -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ p & q & r \end{vmatrix} =^{R2\leftrightarrow R3} -1\cdot(-2)\begin{bmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{bmatrix}.$$

Άρα, $\det(G) = 2\det(H)$.

10. Να βρεθεί ο $adj\left(\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}\right)$

Λύση

Ο προσαρτημένος πίνακας είναι ο ανάστροφος των αλγεβρικών συμπληρωμάτων $c_{ij}(A)$ του A, οπότε

$$adj\left(\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 8 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 11 & -6 \\ 4 & 37 & -19 \\ -3 & -18 & 11 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -3 \\ 11 & 37 & -18 \\ -6 & -19 & 11 \end{bmatrix}$$

11. Να βρεθεί η τιμή του c ώστε ο $\begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & 2 & c \\ -1 & c & 5 \end{bmatrix}$ να είναι αντιστρέψιμος.

Λύση

Για να είναι ο πίνακας αντιστρέψιμος θα πρέπει $det(A) \neq 0$. Άρα,

$$\begin{vmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & 2 & c \\ -1 & c & 5 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c\begin{vmatrix} 2 & c \\ c & 5 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & c \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$c(10-c^2) - 1(0+c) + 0(0+2) = 0 \Rightarrow 10c - c^3 - c = 0 \Rightarrow -c^3 + 9c = 0 \Rightarrow c(9-c^2) = 0 \Leftrightarrow c = 0$ και $c = \pm 3$. Άρα, για $c \neq 0$ και $c \neq \pm 3$, ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος.

12. Να λύσετε τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με τη μέθοδο Cramer

(α) $\begin{array}{rcrcr} 2x & + & y & = & 1 \\ 3x & + & 7y & = & -2 \end{array}$

Λύση

Πρώτα υπολογίζουμε την ορίζουσα του πίνακα συντελεστών A

$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 14 - 3 = 11 \neq 0$. Επιπλέον, $\det(A_1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 7 + 2 = 9$ και $\det(A_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7$. Άρα η μοναδική λύση του συστήματος είναι

$$x = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = \frac{9}{11}, \qquad y = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = \frac{-7}{11}.$$

(β) $\begin{array}{rcrcrcr} 5x & + & y & - & z & = & -7 \\ 2x & - & y & - & 2z & = & 6 \\ 3x & & & + & 2z & = & -7 \end{array}$

Λύση

Η ορίζουσα του πίνακα συντελεστών είναι A $\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$, την οποία και αναπτύσσουμε ως προς τη τρίτη γραμμη:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3(-2-1) - 0(-10+2) + 2(-5-2) = -23.$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} -7 & 1 & -1 \\ 6 & -1 & -2 \\ -7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -7 \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} -7 & -1 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -7 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 23,$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 5 & -7 & -1 \\ 2 & 6 & -2 \\ 3 & -7 & 2 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} - (-7) \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 92$$

και

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 5 & 1 & -7 \\ 2 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ -1 & 6 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (-7) \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 46$$

Άρα, η μοναδική λύση του συστήματος είναι $x = \frac{23}{-23} = -1$, $y = \frac{92}{-23} = -4$ ανδ $z = \frac{46}{-23} = -2$.

13. Να αποδείξετε τα παρακάτω:

(α) Για οποιουσδήποτε δύο τετραγωνικούς A και B ισχύει ότι $\det(AB) = \det(BA)$.

Λύση

Και οι δύο ορίζουσες $\det(AB)$ και $\det(BA)$ είναι ίσες με $\det(A)\det(B)$.

(β) Αν για τον πίνακα A ισχύει $A^k = 0$ για κάποιο $k \geq 1$, να αποδείξετε ότι ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Λύση

$$\det(A^k) = 0 \Rightarrow \det(A)^k = 0 \Rightarrow \det(A) = 0,$$

και άρα, ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

(γ) Δεν υπάρχει 3×3 πίνακας A τέτοιος ώστε $A^2 + I = 0$.

Λύση

$$A^2 + I = 0 \Rightarrow \ A^2 = -I \Rightarrow \ \det(A^2) = \det(-I) \Rightarrow \ \det(A)^2 = (-1)^3 \cdot 1.$$

Να θυμάστε ότι η ορίζουσα ενός πίνακα είναι ένας πραγματικός αριθμός, έστω $\det(A) = x$, και άρα η παραπάνω εξίσωση γίνεται $x^2 = -1$, που δεν ισχύει για πραγματικούς πίνακες.

Για ένα 2×2 πίνακα $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, θα έχουμε:

$$A^2 = -I \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & cb + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

που δίνει $a + d = 0$ και $cb = -a^2 - 1 = -d^2 - 1$. Οπότε, ένας τέτοιος πίνακας είναι ο $D = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -\frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$

(δ) Για οποιουσδήποτε δύο τετραγωνικούς A και B ισχύει ότι $\det(A + B^T) = \det(A^T + B)$.

Λύση

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα C ισχύει $\det(C) = \det(C^T)$ και άρα:

$$\det(A + B^T) = \det((A + B^T)^T) = \det(A^T + (B^T)^T) = \det(A^T + B).$$

3 Γραμμικά Συστήματα - Απαλοιφή Gauss

14. Να λύσετε τα παρακάτω γραμμικά συστήματα με απαλοιφή Gauss

(α)

$$\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & 1 \\ 2x & - & 7y & = & 3 \end{array}$$

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \end{array}\right]$.

Εφαρμόζουμε τις παρακάτω γραμμοπράξεις για να πάρουμε έναν ισοδύναμο ανηγμένο κλιμακωτό
$R2 \to R2 - 2R1$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{array}\right],$$

$R2 \to -R2$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

$R1 \to R1 - 3R1$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right].$$

Η λύση του συστήματος είναι $x = -2, y = -1$.

(β)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & + & y & + & 3z & = & 0 \\ & - & 2y & + & z & = & 2 \end{array}$$

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{R2-2R1\to R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{-1R2\to R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R3+2R2\to R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R3\to R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2/3 \end{array}\right].$$

Καθαρίζουμε τις στήλες

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & | & -1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2/3 \end{bmatrix} \xrightarrow{R1-R2\to R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[R2-R3\to R2]{R1-R3\to R1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 5/3 \\ 0 & 1 & 0 & | & -4/3 \\ 0 & 0 & 1 & | & -2/3 \end{bmatrix}$$

και η λύση του συστήματος είναι $x = 5/3, y = -4/3, z = -2/3$.

(γ)

$$\begin{array}{rcrcr} 3x & - & 2y & = & 5 \\ -12x & + & 8y & = & -20 \end{array}$$

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας είναι $\begin{bmatrix} 3 & -2 & | & 5 \\ -12 & 8 & | & -20 \end{bmatrix}$. Διαιρούμε τη πρώτη γραμμή με 3 και $\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & | & 5/3 \\ -12 & 8 & | & -20 \end{bmatrix}$

$R2 \to R2 + 12R1$

$\begin{bmatrix} 1 & -2/3 & | & 5/3 \\ 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$. Άρα το ισοδύναμο σύστημα αποτελείται από μία εξίσωση την $x - \frac{2}{3}y = \frac{5}{3}$. Θέτωντας $y = t$, η μορφή των άπειρων λύσεων θα είναι $x = \frac{2}{3}t + \frac{5}{3}, y = t$, όπου t αυθαίρετη παράμετρος. Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

(δ)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 10 \\ -x & + & 4y & + & 5z & = & -5 \\ x & + & 6y & + & 3z & = & 15 \end{array}$$

Λύση

15. Να βρείτε ικανή και αναγκαία συνθήκη που ικανοποιούν τα $a, b, c \in \mathbb{R}$, ώστε το παρακάτω σύστημα να είναι συμβιβαστό.

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & 2y & - & z & = & a \\ 2x & + & y & + & 3z & = & b \\ x & - & 4y & + & 9z & = & c \end{array}$$

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 2 & 1 & 3 & | & b \\ 1 & -4 & 9 & | & c \end{bmatrix}.$$

τον οποίο και φέρνουμε σε κλιμακωτή μορφή. Πρώτα, κάνουμε τις γραμμοπράξεις $R2 \to R2 - 2R1$ και $R3 \to R3 - R1$, παίρνουμε

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & | & a \\ 0 & -3 & 5 & | & b - 2a \\ 0 & -6 & 10 & | & c - a \end{bmatrix}.$$

Ακολούθως, κάνουμε $R3 \to R3 - 2R2$ και ο πίνακας γίνεται

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & a \\ 0 & -3 & 5 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & c-2b+3a \end{array}\right].$$

Αν $c-2b+3a \neq 0$, τότε το σύστημα είναι ασυμβίβαστο (αδύνατο), καθώς έχουμε μηδενική γραμμη στον A με μη μηδενικό σταθερό στοιχείο. Άρα αρκεί το $c-2b+3a=0$ ώστε το σύστημα να είναι συμβιβαστό.

16. Να βρεθεί η τιμή του α σε κάθε περίπτωση ώστε τα παρακάτω ομογενή συστήματα να έχουν και μη τετριμένες λύσεις οι οποίες και να βρεθούν:

(α)

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ x & + & \alpha y & - & 3z & = & 0 \\ -x & + & 6y & - & 5z & = & 0 \end{array}$$

Λύση

Ο επαυξημένος πίνακας του παραπάνω ομογενούς γραμμικού συστήματος είναι

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & -3 & 0 \\ -1 & 6 & -5 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R2-R1\to R2]{R3+R1\to R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha+2 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R3\leftrightarrow R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & \alpha+2 & -4 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{1}{4}R2\to R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha+2 & -4 & 0 \end{array}\right].$$

Αν $\alpha=-2$, ο επαυξημένος γίνεται

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{4}R3\to R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Παρατηρήστε ότι $r(A)=n=3$, και άρα το ομογενές σύστημα έχει μοναδική λύση τη τετριμμένη. Αν $\alpha \neq -2$ τότε

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha+2 & -4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{\alpha+2}R3\to R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-4}{\alpha+2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R3-R2\to R3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-4}{\alpha+2}+1 & 0 \end{array}\right].$$

Αν $\frac{-4}{\alpha+2}+1=0 \Rightarrow \alpha=2$, τότε ο επαυξημένος πίνακας γίνεται

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Εδώ, $r(A)=2<3$ και άρα το ομογενές σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεις (άπειρες λύσεις, τις οποίες και βρίσκω από το ισοδύναμο σύστημα που προκύπτει, θεωρώντας $n-r(A)=3-2=1$ ελεύθερη μεταβλητή.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & - & 2y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array}$$

Έστω $z = t \in \mathbb{R}$ έχουμε $y = z = t$ και $x = 2y - z = 2t - t = t$, όπου t αυθαίρετο. Η λύση του ομογενούς συστήματος είναι

$$(x, y, z) = (t, t, t),\ t \in \mathbb{R}.$$

(β)

$$\begin{array}{ccccccc} x & + & y & - & z & = & 0 \\ & & \alpha y & - & z & = & 0 \\ x & + & y & + & \alpha z & = & 0 \end{array}$$

Λύση Όμοια,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R3-R1\to R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & \alpha & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha+1 & 0 \end{array}\right]$$

Αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq -1$ τότε διαιρώ τη δεύτερη γραμμή με α και τη τρίτη με $\alpha + 1$, ώστε ο επαυξημένος να γίνει κλιμακωτός με $r(A) = n = 3$ και άρα να έχει μοναδική λύση τη τετριμμένη (μηδενική). Αν $\alpha = 0$ τότε ο επαυξημένος γίνεται

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\cdots} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Από τον τελευταίο ισοδύναμο πίνακα παρατηρούμε ότι η τελευταία γραμμή είναι μηδενική και άρα για $\alpha = 0$ το ομογενές σύστημα έχει άπειρες (και μη-μηδενικες) λύσεις της μορφής $(x, y, z) = (-t, t, 0)$, για t αυθαίρετο.

Αν $\alpha = -1$, αντίστοιχα έχουμε

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{-R2\to R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

και άρα $r(A) = 2 < n = 3$. Πάλι σε αυτή την περίπτωση έχουμε άπειρες λύσεις της μορφής $(x, y, z) = (2s, -s, s)$, όπου s αυθαίρετο.

4 Αντίστροφος Πίνακας

17. Εξετάστε αν οι παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι και να βρεθεί ό αντίστροφος είτε με τον προσαυξημένο πίνακα (adj) είτε με μέθοδο Gauss

(α) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$

Λύση

Ο πίνακας είναι 2×2 με $det(A) = 2 \neq 0$ άρα αντιστρέψιμος με αντίστροφο

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(β) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

Λύση Εφαρμόζουμε απαλοιφή Gauss για την εύρεση του αντιστρόφου. Φτιάχνουμε τον επαυξημένο $[A|I_3]$ και τον φέρνω στην ισοδύναμη μορφή $[I_3|A]$ κάνοντας τα παρακάτω:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[R3+R1\to R3]{R2-3R1\to R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{2R3+R2\to R3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}R2\to R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[R1+R3\to R1]{R2-\frac{3}{2}R3\to R2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right].$$

Άρα ο αντίστροφος πίνακας είναι ο $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Λύση

Πάλι με απαλοιφή Gauss για την εύρεση του αντίστροφου θα έχουμε:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{R1\leftrightarrow R3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R2-3R1\to R2]{R3-3R1\to R3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{R3+R2\to R3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{5}R3\to R3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{6}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{R1-2R2\to R1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 5 & 0 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{6}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{R1-5R3\to R3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{6}{5} \end{array}\right] \xrightarrow{R2+2R3\to R2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} & \frac{3}{5} & \frac{-3}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{6}{5} \end{array}\right].$$

Αριστερά έχει δημιουργηθεί ο I_3, άρα ο δεξιός πίνακας είναι ο αντίστροφος. Να επαληθεύσετε με το τύπο του προσαρτημένου πίνακα.

18. Επαληθεύστε για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ότι ικανοποιεί την ισότητα $A^2 - 3A + 2I = 0$, και χρησιμοποιήστε την για να αποδείξετε ότι $A^{-1} = \frac{1}{2}(3I - A)$.

Λύση

$$
\begin{aligned}
A^2-3A+2I &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
A^2-3A+2I &= \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}}_{A^2} - \underbrace{\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}}_{3A} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \\
A^2-3A+2I &= \begin{bmatrix} 1-3+2 & -3-(-3)+0 \\ 0 & 4-6+2 \end{bmatrix} \\
A^2-3A+2I &= 0
\end{aligned}
$$

Άρα, πράγματι

$$
\begin{aligned}
A^2-3A+2I &= 0 \\
A^2-3A &= -2I \\
A(A-3I) &= -2I \\
A[\frac{-1}{2}(A-3I)] &= I
\end{aligned}
$$

Από τη τελευταία παίρνουμε, $A^{-1} = \frac{-1}{2}(A-3I) = \frac{1}{2}(3I-A)$.

19. Για τετραγωνικό πίνακα A, αν ισχύει ότι $A^2 = 0$, να αποδείξετε ότι $(I-A)^{-1} = I + A$.

Λύση

$$(I-A)(I+A) = I^2 + IA - AI - A^2 = I + A - A = I.$$

5 Διανύσματα

20. Να βρεθεί το $\|v\|$ των παρακάτω διανυσμάτων:

(α) $v = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Λύση

$\|v\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$

(β) $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Λύση

$\|v\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

(γ) $v = 2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

Λύση

$\|v\| = \|2\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}\| = 2\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2} = 2\sqrt{6}$

21. Να βρεθεί ένα μοναδιαίο διάνυσμα στη κατεύθυνση του $\begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Λύση

Ένα μοναδιαίο διάνυσμα είναι ένα διάνυσμα μέτρου 1. Αν w είναι ένα μη μηδενικό διάνυσμα, τότε ένα μοναδιαίο διάνυσμα στη κατεύθυνση του w είναι $\frac{w}{\|w\|}$. Στη περίπτωση μας, ένα μοναδιαίο διάνυσμα στη κατεύθυνση του v είναι το

$$\frac{v}{\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{7^2 + (-1)^2 + 5^2}} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{75}} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

22. Να βρεθούν οι τιμές των a, b, c ώστε το διάνυσμα $y = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ να γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ και $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. $(y = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w)$

Λύση

Αντικαθιστώ στην $y = a \cdot u + b \cdot v + c \cdot w$ και παίρνω το γραμμικό σύστημα με πίνακα συντελεστών $A = [u, v, w]$, αγνώστους $= \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ και διάνυσμα σταθερών όρων y. Άρα, ο επαυξημένος πίνακας του $A \cdot x = y$ είναι:

$$[A|y] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 2r_1]{r_2 \to r_2 - r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to -r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 \to r_1 - r_3]{r_2 \to r_2 + r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & -8 \end{array}\right]$$

με μοναδική λύση, $a = 10$, $b = -11$ και $c = -8$.

6 Γραμμικοί Χώροι - Γραμμική Ανεξαρτησία - Βάση - Τάξη Πίνακα

23. Εξετάστε ποιοί από τους παρακάτω γραμμικούς χώρους είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^3$:

Λύση

Για τον $U = \{ \begin{bmatrix} 1 \\ s \\ t \end{bmatrix} : s \text{ και } t \in \mathbb{R}\}$ βλέπουμε ότι για οποιαδήποτε επιλογή των s, t, το $\begin{bmatrix} 1 \\ s \\ t \end{bmatrix}$ δε μπορεί να είναι ίσο του $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, και άρα το $0_{\mathbb{R}^3}$ δεν ανήκει στον U. Ο U δεν είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

Λύση Για τον $U = \{ \begin{bmatrix} r \\ s \\ t \end{bmatrix} : r, s \text{ και } t \in \mathbb{R},\ -r + 3s + 2t = 0\}$ έχουμε ότι:

1. Αν $r = s = t = 0$ τότε η εξίσωση ικανοποιείται και άρα το $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in U$.

2. Θεωρούμε τα $\begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \\ t_1 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} r_2 \\ s_2 \\ t_2 \end{bmatrix} \in U \Rightarrow r_1 = 3s_1 + 2t_1$ και $r_2 = 3s_2 + 2t_2$.

   Αν $a, b \in \mathbb{R}$, τότε ο γραμμικός συνδυασμός αυτών θα είναι

$$a \begin{bmatrix} r_1 \\ s_1 \\ t_1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} r_2 \\ s_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ar_1 + br_2 \\ as_1 + bs_2 \\ at_1 + bt_2 \end{bmatrix},$$

   με $ar_1 + br_2 = a(3s_1 + 2t_1) + b(3s_2 + 2t_2) = 3(as_1 + bs_2) + 2(at_1 + bt_2)$.

   Από την τελευταία προκύπτει ότι $\begin{bmatrix} r_1 \\ a\ s_1 \\ t_1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} r_2 \\ s_2 \\ t_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ar_1 + br_2 \\ as_1 + bs_2 \\ at_1 + bt_2 \end{bmatrix} \in U$ και άρα ο U υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.

24. Εξετάστε ποιά από τα παρακάτω σύνολα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα:

(α) $\{(1, -1, 0), (3, 2, -1), (3, 5, -2)\}$ στον $\mathbb{R}^3$.

Λύση

Γράφουμε τη διανυσματική εξίσωση για τη γραμμική ανεξαρτησία. Έστω για $t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R}$ ότι ισχύει

$$\begin{aligned} t_1(1, -1, 0) + t_2(3, 2, -1) + t_3(3, 5, -2) = (0, 0, 0) \quad \Rightarrow \\ (t_1 + 3t_2 + 3t_3, -t_1 + 2t_2 + 5t_3, -t_2 - 2t_3) = (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Η τελευταία είναι ισοδύναμη με το παρακάτω ομογενές γραμμικό σύστημα ως προς t_1, t_2, t_3:

$$\begin{array}{rcrcrcl} t_1 & + & 3t_2 & + & 3t_3 & = & 0 \\ -t_1 & + & 2t_2 & + & 5t_3 & = & 0 \\ & - & t_2 & - & 2t_3 & = & 0 \end{array}$$

Με απαλοιφή Gauss παίρνουμε ότι.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R2+R1 \to R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{5R3+R2 \to R2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}R3 \to R3]{\frac{1}{5}R2 \to R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 8/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Η κλιμακωτή μορφή του πίνακα A αντιστοιχεί στο ισοδύναμο σύστημα $\begin{array}{rcrcrcl} t_1 & + & 3t_2 & + & 3t_3 & = & 0 \\ & & t_2 & + & \frac{8}{5}t_3 & = & 0 \\ & & & & t_3 & = & 0 \end{array}$,

όπου με οπισθοδρομική αντικατάσταση παίρνουμε ότι $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, και τα τρία διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(β) $\{(1, 1, 1), (1, -1, 1), (0, 0, 1)\}$ ιν $\mathbb{R}^3$.

Λύση

Εξέταση γρ. ανεξαρτησίας: Έστω t_1, t_2, t_3 πραγματικοί και ένας γραμμικός συνδυασμός των $\{(1,1,1),(1,-1,1),(0,0,1)\}$ ίσος με 0

$$t_1(1,1,1)+t_2(1,-1,1)+t_3(0,0,1)=(0,0,0) \Rightarrow$$

$$(t_1+t_2, t_1-t_2, t_1+t_2+t_3)=(0,0,0).$$

Το ομογενές σύστημα που προκύπτει είναι το $\begin{array}{ccccccc} t_1 & + & t_2 & & & = & 0 \\ t_1 & - & t_2 & & & = & 0 \\ t_1 & + & t_2 & + & t_3 & = & 0 \end{array}$ με επαυξημένο πίνακα

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R3-R1\to R3]{R2-R1\to R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\frac{-1}{2}R2\to R2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Ο τελευταίος πίνακας σε κλιμακωτή μορφή δίνει $t_1 = t_2 = t_3 = 0$, και άρα τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

25. Να βρεθεί μία βάση και η διάσταση του $\text{span}\{(1,-1,2,0),(2,3,0,3),(1,9,-6,6)\}$ υπόχωρου του $\mathbb{R}^4$.

Λύση Εξέταση γρ. ανεξαρτησίας: Έστω a, b, c πραγματικοί τέτοιοι ώστε:

$$a(1,-1,2,0)+b(2,3,0,3)+c(1,9,-6,6)=(0,0,0,0) \Rightarrow$$

$$(a+2b+c, -a+3b+9c, 2a-6c, 3b+6c)=(0,0,0,0).$$

Η τελευταία δίνει το παρακάτω ομογενές γραμμικό σύστημα ως προς τους a, b, c με επαυξημένο πίνακα:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & -6 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[R2+R1\to R2]{R3-2R1\to R3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 10 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right]$$

$$\dot{\to} .. \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Από τη τελευταία κλιμακωτή μορφή του πίνακα προκύπτει ότι τα διανύσματα είναι γραμμικώς εξαρτημένα καθώς το σύστημα έχει και μη μηδενικές λύσεος ($r(A) = 2 < 3 = n$). Όμως, από τις στήλες με τα ηγετικά στοιχεία 1, προκύπτουν οι στήλες του αρχικού πίνακα που δημιουργούν μία βάση (δηλ. είναι γραμμικώς ανεξάρτητα) του $\mathbb{R}^3$.

Άρα, οι δύο πρώτες στήλες έχουν τα ηγετικά 1 και άρα η βάση του υπόχωρου είναι $\{(1,-1,2,0),(2,3,0,3)\}$. Παρατηρήστε ότι, τα στοιχεία της βάσης αντιστοιχούν στις δύο πρώτες στήλες του επαυξημένου. Η διάσταση του υπόχωρου είναι 2.

26. Να βρεθεί μία βάση του χώρου γραμμών και η τάξη του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Λύση Για να βρούμε μία βάση του χώρου γραμμών του πίνακα A αρκεί να φέρουμε τον A σε κλιμακωτή μορφή. Τότε, οι γραμμές που έχουν τα ηγετικά 1 αποτελούν μια βάση του χώρου γραμμών (αντ. οι στήλες που περιέχουν τα ηγετικά 1 αποτελούν μία βάση του χώρου στηλών του A). Επιπλέον, για τη τάξη του πίνακα A ισχύει ότι $rank(A) = dim(row(A)) = dim(col(A))$. Οπότε φέρνουμε τον A σε κλιμακωτή μορφή και έχουμε:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 6 & 8 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R1} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 2 \\ 4 & -5 & 9 & 10 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R2-2R1 \to R2]{R3-4R1 \to R3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\to \dots \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο ηγετικά 1 στη κλιμακωτή μορφή, άρα $rank(A) = 2$ και μία βάση για το χώρο γραμμών του A είναι η

$$\{(1, -2, 3, 4), (0, 1, -1, -2)\},$$

που αντιστοιχούν στις δύο γραμμές του A με τα ηγετικά 1.

7 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα Πίνακα Διαγωνοποίηση Πίνακα - Τετραγωνικές Μορφές

26. Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα A, καθώς και (αν υπάρχει) έναν αντιστρέψιμο πίνακα P ώστε ο $P^{-1}AP$ να είναι διαγώνιος

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$

Λύση Πρώτα δημιουργούμε το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $c_A(x)$ του πίνακα A και μετά λύνουμε την αντίστοιχη εξίσωση (χαρακτηριστική εξίσωση) $c_A(x) = 0$ για να βρούμε τις ιδιοτιμές του πίνακα.

$$c_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-2 \end{vmatrix} = (x-1)(x-2) - (-3)(-2) = x^2 - 3x - 4.$$

Η εξίσωση $c_A(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ δίνει $\lambda_1 = 4$ και $\lambda_2 = -1$.

Παρατηρούμε ότι, ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος αφού είναι 2×2 και έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές. Για να βρούμε τον αντιστρέψιμο πίνακα P που διαγωνοποιεί τον A πρέπει να βρούμε τα ιδοδιανύσματα πο αντιστοιχούν στις ιδοτιμές $\lambda_1 = 4$ και $\lambda_2 = -1$..

$\underline{\lambda_1 = 4}$: Αναζητούμε τις μη μηδενικές λύσεις του ομογενούς $(\lambda_1 I - A)x = 0$, όπου $x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Ο επαυξημένος πίνακας είναι

$$[\lambda_1 I - A|0] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{3}R1 \to R1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-2}{3} & 0 \\ -3 & 2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R2+3R1 \to R2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{-2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Άρα, το ισοδύναμο σύστημα γράφεται $y_1 - \frac{2}{3}y_2 = 0$. Επειδή, η τάξη του επαυξημένου είναι 1 και $n = 2$, μόνο μία παράμετρος θα εμπλέκεται στη μορφή των άπειρων λύσεων.

Έστω, $y_2 = s,\ s \in \mathbb{R}$, τότε $y_1 = \frac{2}{3}s$ και τότε τα ιδιοδιάνυσματα που αντιστοιχούν στη $\lambda_1 = 4$ έχουν τη μορφή

$$x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}. \text{ ο ιδιόχωρος της } \lambda_1 = 4.$$

Άρα, το βασικό ιδιοδιάνυσμα (βάση του $V_A(4)$) που αντιστοιχεί στη $\lambda_1 = 4$ είναι το $x_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda_2 = -1}$: Όμοια γράφουμε το ομογενές σύστημα $(\lambda_2 I - A)x = 0$, με $x = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$ και αναζητούμε τις μη μηδενικές του λύσεις.
Ο επαυξημένος πίνακας σε αυτή τη περίπτωση είναι

$$[\lambda_2 I - A|0] = \left[\begin{array}{cc|c} -2 & -2 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{2} R1 \to R1} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R2+3R1 \to R2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Άρα, το ισοδύναμο σύστημα γράφεται $w_1 + w_2 = 0$ με τάξη 1 και $n = 2$, άρα, πάλι, μόνο μία παράμετρος εμπλέκεται στη μορφή των άπειρων λύσεων. Έστω $w_2 = s,\ s \in \mathbb{R}$, τότε $w_1 = -s$ και τα ιδιοδιανύσματα παίρνουν τη μορφή

$$x = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα, το βασικό ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_2 = -1$ είναι το $x_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ο πίνακας που διαγωνοποιεί τον A είναι ο $P = [x_1\ x_2] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ με διαγώνιο D τον $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ώστε να ισχύει $P^{-1}AP = D$.

(β) $A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

Λύση

$$c_A(x) = 0 \Rightarrow \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-7 & 0 & 4 \\ 0 & x-5 & 0 \\ -5 & 0 & x+2 \end{vmatrix} = (x-7) \begin{vmatrix} x-5 & 0 \\ 0 & x+2 \end{vmatrix} - 0 + 4 \begin{vmatrix} 0 & x-5 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-7)(x-5)(x+2) + 20(x-5) = (x-5)((x-7)(x+2)+20) = (x-5)(x^2-5x+6) =$$
$$= (x-5)(x-2)(x-3)$$

Άρα, ο A έχει τρείς ιδιοτιμές, τις $\lambda_1 = 5$, $\lambda_2 = 2$ και $\lambda_3 = 3$. Επιπλέον, ο A διαγωνοποιείται αφού είναι 3×3 πίνακας με 3 διακεκριμένες ιδιοτιμές. Προχωράμε στην εύρεση των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων.

$\underline{\lambda_1 = 5}$: Λύνουμε το ομογενές $(\lambda_1 I - A)x = 0$, με $x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$$[\lambda_1 I - A|0] = \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{-1}{2} R1 \to R1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R3+5R1\to R3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&-3&0\end{array}\right]\xrightarrow{\frac{-1}{3}R3\to R3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R2\leftrightarrow R3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-2&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

και άρα το ισοδύναμο σύστημα γράφεται $y_1-2y_3=0,\ y_3=0\Rightarrow y_1=0$, με ελεύθερη μεταβλητή την $y_2=t$. Άρα, τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στην $\lambda_1=5$ είναι τα

$$x=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=s\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

Άρα, ένα βασικό ιδιοδιάνυσμα για την $\lambda_1=5$ είναι το $x_1=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

<u>$\lambda_2=2$</u>: $(\lambda_2 I-A)x=0$, με $x=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}$

$$[\lambda_2 I-A|0]=\left[\begin{array}{ccc|c}-5&0&4&0\\0&-3&0&0\\-5&0&4&0\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{-1}{3}R2\to R2]{\frac{-1}{5}R1\to R1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{-4}{5}&0\\0&1&0&0\\-5&0&4&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R3+5R1\to R3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{-4}{5}&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Το τελευταίο γράφεται $w_1-\frac{4}{5}w_3=0$ και $w_2=0$, άρα $w_1=\frac{4}{5}w_3$ με ελεύθερη μεταβλητή την $w_3=t$.

$$x=\begin{bmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}t\\0\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Άρα, ένα βασικό ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_2=2$ είναι το $x_2=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\0\\1\end{bmatrix}$.

<u>$\lambda_3=3$</u>: $(\lambda_3 I-A)x=0$, με $x=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}$

$$[\lambda_3 I-A|0]=\left[\begin{array}{ccc|c}-4&0&4&0\\0&-2&0&0\\-5&0&5&0\end{array}\right]\xrightarrow[\frac{-1}{2}R2\to R2]{\frac{-1}{4}R1\to R1}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\-5&0&5&0\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{R3+5R1\to R3}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

Άρα από τον επαυξημένο παίρνω $z_1-z_3=0$ και $z_2=0\Rightarrow z_1=z_3$ με ελεύθερη μεταβλητή την $z_3=t$. Τα ιδιοδιανύσματα γράφονται

$$x=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\0\\t\end{bmatrix}=t\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},$$

και άρα ένα βασικό ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_3 = 3$ είναι το $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ο αντιστρέψιμος πίνακας P που διαγωνοποιεί τον A είναι ο

$$P = [x_1\ x_2\ x_3] = \begin{bmatrix} 0 & 4/5 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

με διαγώνιο πίνακα D τέτοιον ώστε: $P^{-1}AP = D$ τον

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

(γ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Λύση

$$c_A(x) = 0 \Rightarrow \det(xI - A) = \begin{bmatrix} x-1 & -1 & 3 \\ -2 & x & -6 \\ -1 & 1 & x-5 \end{bmatrix} =$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} x & -6 \\ 1 & x-5 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -1 & x-5 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & x \\ -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$(x-1)(x^2-5x+6) - 2(x-2) + 3(x-2) = (x-2)(x^2-4x+4) =$$

$$= (x-2)^3.$$

Άρα, ο A έχει μία ιδιοτιμή την $\lambda = 2$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 3.

Για να βρούμε τα ιδοδιανύσματα της $\lambda = 2$ λύνουμε το ομογενές γραμμικό $(\lambda_I - A)x = 0$, με $x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$

$$[\lambda I - A|0] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 \\ -2 & 2 & -6 & | & 0 \\ -1 & 1 & -3 & | & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[R2+2R1 \to R2]{R3+R1 \to R3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Άρα, το ισοδύναμο σύστημα γίνεται $y_1 - y_2 + 3y_3 = 0$ με ελέυθερες μεταβλητές τις $y_2 = t$ ανδ $y_3 = s$. Άρα $y_1 = t - 3s$ και τα ιδιοδιανύσματα γράφονται

$$x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t-3s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Άρα, στη λ αντιστοιχούν δύο βασικά ιδιοδιανύσματα τα $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $x_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Σε αυτή τη περίπτωση, ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος αφού η ιδιοτιμή έχει πολλαπλότητα 3 αλλά της αντιστοιχούν μόνο 2 βασικά ιδιοδιανύσματα $(dimV_A(3) = 2 < 3)$.

(δ) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 6 & -6 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$

Λύση

Παρατηρήστε ότι,

$$xI - E = \begin{bmatrix} x-1 & 2 & -3 \\ -2 & x-6 & 6 \\ -1 & -2 & x+1 \end{bmatrix}.$$

Για το χαρακτηριστικό πολυώνυμο έχουμε,

$$\det(xI - E) = \det\left(\begin{bmatrix} x-1 & 2 & -3 \\ -2 & x-6 & 6 \\ -1 & -2 & x+1 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= (x-1)\begin{vmatrix} x-6 & 6 \\ -2 & x+1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} -2 & 6 \\ -1 & x+1 \end{vmatrix} + (-3)\begin{vmatrix} -2 & x-6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)(x^2 - 5x + 6) - 2(-2x + 4) - 3(x - 2) =$$

$$= (x-2)^3$$

Άρα, η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 2$ με αλγεβρική πολλαπλότητα 3.

Για τα ιδιοδιανύσματα της $\lambda = 2$, λύνουμε το ομογενές

$$(2I - A)x = 0.$$

Άρα,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2-1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 2-6 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 2+1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & -4 & 6 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_2 + 2R_1 \to R_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{R_3 + R_1 \to R_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Άρα, η μορφή των άπειρων λύσεων είναι

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Άρα, η $\lambda = 2$ έχει πολλαπλότητα $m = 3$ αλλά μόνο δύο ιδιοδιανύσματα, τα $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, οπότε ο A δεν είναι διαγωνοποιήσιμος.

27. Να αποδείξετε ότι ο πίνακας A έχει ιδιοτιμή τη $\lambda = 0$ αν και μόνο αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Λύση

Αν το 0 είναι ιδιοτιμή του A, τότε είναι και ρίζα του χαρακτηριστικού πολυωνύμου. Άρα,

$$c_A(0) = 0 \Rightarrow \det(0I - A) = 0 \Rightarrow \det(-A) = 0 \Rightarrow (-1)^n \det(A) = 0,$$

από το οποίο προκύπτει ότι $\det(A) = 0$. Άρα, ο A δεν είναι αντιστρέψιμος.

Αντίστροφα, αν ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε $\det(A) = 0$, ή ισσοδύναμα $\det(0I - A) = 0$, και άρα το 0 είναι ιδιοτιμή.

28. Για $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A, να αποδείξετε τα παρακάτω

(α) ο A διαγωνοποιήσιμος αν και μόνο αν ο A^T είναι διαγωνοποιήσιμος.

Λύση

If A is diagonalizable, then there are an invertible matrix P and a diagonal D such that $P^{-1}AP = D$. Applying a transposition to this equality holds

$$P^{-1}AP = D \Rightarrow (P^{-1}AP)^T = D^T \Rightarrow P^T A^T (P^{-1})^T = D^T.$$

Since D is diagonal it is symmetric ($D^T = D$). So,

$$P^T A^T (P^{-1})^T = D \Rightarrow P^T A^T (P^T)^{-1} = D.$$

Setting $R = (P^T)^{-1}$, the last equality becomes

$$R^{-1} A^T R = D.$$

So, A^T is also diagonalizable and the matrix that diagonalizes A^T is $R = (P^T)^{-1}$. The diagonal D is the same.

(β) Για $r \neq 0$ οι ιδιοτιμές του rA είναι οι $r\lambda$, όπου λ ιδιοτιμή του A.

Λύση

If λ is an eigenvalue of A, then there is a nonzero vector x such that $Ax = \lambda x$. Multiplying both parts by r yields

$$rAx = r\lambda x \Rightarrow (rA)x = (r\lambda)x.$$

So for the matrix rA and the number $r\lambda$ there is a nonzero vector x such that the eigenvalue–eigenvector equation holds. $r\lambda$ is an eigenvalue of rA and x is the corresponding eigenvector.

29. Για A αντιστρέψιμο $n \times n$ πίνακα

(α) να αποδείξετε ότι οι ιδιοτιμές του A είναι μη μηδενικές.

Λύση

Αν η $\lambda = 0$ είναι ιδιοτιμή του A τότε

$$0 = \det(\lambda I - A) = \det(-A) = (-1)^n \det(A),$$

από τις ιδιότητες των οριζουσών. Από τη τελευταία προκύπτει ότι $\det(A) = 0$, και άρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, που καταλήγει σε άτοπο. Άρα η $\lambda = 0$ δεν είναι ιδιοτιμή του A.

(β) να αποδείξετε ότι οι ιδιοτιμές του A^{-1} είναι οι αριθμοί $1/\lambda$, όπου λ ιδιοτιμή του A.

Λύση

Έστω λ ιδιοτιμή του πίνακα A και x αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμά της. Τότε, $Ax = \lambda x$ και

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\lambda}x &= \\
\frac{1}{\lambda}Ix &= \\
\frac{1}{\lambda}(\underbrace{A^{-1}A}_{I})x &= \\
\frac{1}{\lambda}A^{-1}Ax &= \\
\frac{1}{\lambda}A^{-1}\lambda x &= \\
A^{-1}x.
\end{aligned}$$

Άρα ισχύει ότι, $A^{-1}x = \dfrac{1}{\lambda}x$, και η ιδιοτιμή του A^{-1} είναι η λ^{-1}.

30. Να βρεθεί η τετραγωνική μορφή που αντιστοιχεί σε κάθε έναν από τους παρακάτω συμμετρικούς πίνακες και να τη χαρακτηρίσετε (θετικά (αρνητικά) (ημί)ορισμένη).

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Λύση

Ο A είναι 2×2 πίνακας, άρα, μία τετραγωνική μορφή q του A θα έχει 2 μεταβλητές. Έστω $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

$$q = \boldsymbol{\xi}^T A \boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 - 2x_2 \end{bmatrix} =$$

$$= x_1^2 - x_1x_2 - x_2x_1 - 2x_2^2 = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2,$$

και, άρα η τεραγωική μορφή του A, είναι η $q = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_1x_2$.

Για τον χαρακτηρισμό της q αρκεί να βρω τις ιδιοτιμές του A, αφού είναι συμμετρικός.

Έχουμε ότι, το χαρακτηριστικό πολυώνυμο του A είναι το

$$c_A(x) = \det(xI - A) = \begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 1 & x+2 \end{vmatrix} = (x-1)(x+2) - 1 = x^2 + x - 3.$$

Η εξίσωση $c_A(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0$ δίνει $\lambda_1 = \frac{-1+\sqrt{13}}{2} > 0$ και $\lambda_2 = \frac{-1-\sqrt{13}}{2} < 0$. και άρα ο πίνακας είναι αόριστος. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι, ο πίνακας είναι διαγωνοποιήσιμος αφού είναι 2×2 και έχει δύο διακεκριμένες ιδιοτιμές.

(β) $B = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 2 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Λύση

Ο πίνακας B είναι 3×3, και άρα η τετραγωνική του μορφή q θα έχει 3 μεταβλητές. Έστω $\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
q &= \boldsymbol{\xi}^T B \boldsymbol{\xi} \\
q &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{2} & 2 \\ \frac{-1}{2} & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
q &= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - \frac{x_2}{2} + 2x_3 \\ -\frac{x_1}{2} + x_2 \\ 2x_1 - \sqrt{2}x_3 \end{bmatrix} \\
q &= x_1(x_1 - \frac{x_2}{2} + 2x_3) + x_2(-\frac{x_1}{2} + x_2) + x_3(2x_1 - \sqrt{2}x_3) \\
q &= x_1^2 + x_2^2 - \sqrt{2}x_3^2 - x_1x_2 + 4x_1x_3
\end{aligned}$$

Για τον χαρακτηρισμό της q αρκεί να βρω τις ιδιοτιμές του B, αφού είναι συμμετρικός.