

**ΜΑΠ - Επισκόπηση Μαθηματικών - Νοέμβριος 2020**  
**Δεύτερη Εργασία στην Επισκόπηση Ανάλυσης και Δ.Ε.**

**ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:**

**ΑΜ :**

- ΟΔΗΓΙΕΣ:** 1. Η παράδοση της εργασίας θα γίνει την ημέρα της εξέτασης Τρίτη 26/11/2019.  
2. Να λύσετε όλα τα προβλήματα. Τα προβλήματα είναι ισοδύναμα.  
3. Το σύνολο των εργασιών που θα παραδώσετε μπορεί να σας προσαυξήσει τη τελική βαθμολογία το πολύ κατά μία μονάδα, μόνο αν ο βαθμός της τελικής εξέτασης είναι τουλάχιστον 5.

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1.**

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x, & 0 < x \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- (α) Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο 0 και να μελετησθεί ως προς τη μονοτονία.  
(β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της  $f$ .  
(γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $x = e^{\frac{x}{x}}$  έχει δύο ρίζες για οποιοδήποτε  $\alpha > 0$ .  
(δ) Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη κυρτότητα και να αποδείξετε ότι  $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$  για κάθε  $x > 0$ .  
(Υπόδειξη: Όπως στην 11 των λυμένων).

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2.**

- (α) Να αποδείξετε ότι η σειρά  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^n}{n!}$  συγκλίνει.  
(β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^1 \frac{1 + e^{x+1}}{1 + e^x} dx$$

Υπόδειξη: Κάντε την αντικατάσταση  $u = 1 + e^x$ . (γ) Να υπολογίσετε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{+\infty} 9xe^{-3x} dx.$$

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3.**

- (α) Να λυθεί το Π.Α.Τ.  $xy' + \ln xy = \ln x$ ,  $y(1) = 2$  και να βρεθεί το σύνολο τιμών της ειδικής λύσης που βρήκατε.  
(β) Να λυθεί το Π.Α.Τ.  $y' = 2y(10 - y)$ ,  $y(0) = 5$  και να βρεθεί το σύνολο τιμών της ειδικής λύσης που βρήκατε.  
(γ) Να λυθεί η Δ.Ε.  $y' + y \sin x = -y^2 x e^{-\cos x}$ .

**ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.**

Να λυθεί το Π.Α.Τ.  $y'' - 2y' - 3y = 3xe^{2x}$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .