(9) Η f είναι συνεχής στα $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$

ως πηλίκο συνεχών.

Για $x_0=1$ έχω $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\ln x}{1-x} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x\ln x)'}{(1-x)'}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + x\cdot\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to 1}(-\ln x - 1) = -1 = f(1)$$

άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=1 \Rightarrow f$ συνεχής

Επίσης $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{x\ln x}{1-x} - (-1)}{x-1} =$

$$= \lim_{x\to 1} -\frac{x\ln x + 1 - x}{(x-1)^2} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 1} -\frac{\ln x + x\cdot\frac{1}{x} + 0 - 1}{2(x-1)\cdot 1}$$

$$= \lim_{x\to 1} -\frac{\ln x}{2(x-1)} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 1} -\frac{\frac{1}{x}}{2\cdot 1} = \lim_{x\to 1} -\frac{1}{2x} = -\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f$ παραγ. στο $x_0=1$ με $f'(1) = -\dfrac{1}{2}$.

(10) Η f παραγ/μη στο $0 \Rightarrow f$ συνεχής στο 0

$$\Leftrightarrow f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^{\beta x} = 1$ και $f(0) = \sin 0 + \alpha = \alpha$. Άρα $\boxed{\alpha = 1}$

Για $a=1$ έχω $f(x)=\begin{cases} \sin x+1, & x\leq 0 \\ e^{\beta x}, & x>0 \end{cases}$

Η f είναι παραγ/μη στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

και $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}\overset{f(0)=1}{=}\lim\limits_{\substack{x\to 0^- \\ (x<0)}}\frac{\sin x+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{\beta x}-1}{x}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\beta e^{\beta x}}{1}=\beta$

Άρα $\boxed{\beta=1}$

και $f'(0)=1$.

(11) $f(x)=x-\ln(e^x+1)$, $x\in\mathbb{R}$

(α) $f'(x)=1-\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-e^x}{e^x+1}=\frac{1}{e^x+1}>0$, $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα

$f''(x)=-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}<0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ άρα f κοίλη.

(β) Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξη συνεχών, και γν. αύξουσα άρα το σύνολο τιμών της, είναι το

$$f(\mathbb{R}) = f((-\infty,+\infty)) \overset{f\nearrow}{=} \left(\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) =$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x - \ln(e^x+1)\right) \overset{-\infty}{=} -\infty - (0) = -\infty$$

• $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(e^x+1) \overset{u=e^x+1}{=} \lim\limits_{u\to1} \ln u = 0$

$u_0 = \lim\limits_{x\to-\infty}(e^x+1) = 0+1 = 1$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(e^x+1) \overset{u=e^x+1}{=} \lim\limits_{u\to+\infty} \ln u = +\infty$

$u_0 = \lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+1) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x - \ln(e^x+1)\right) \overset{+\infty-(+\infty)}{=} \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln(e^x+1)}{x}\right)$$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(e^x+1)}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\frac{e^x}{e^x+1}}{1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x} = 1$. (εδώ δε βγαίνει)

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x - \ln(e^x+1)\right) \overset{x=\ln e^x}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\ln e^x - \ln(e^x+1)\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}\right) \overset{u=\frac{e^x}{e^x+1}}{=} \lim\limits_{u\to1} \ln u = 0$

$u_0 = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{e^x+1} = 1$.

Άρα το $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 0)$.

γ) Κάνω Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0, x]$ για την $f(t)$

Η f είναι συνεχής στο $[0, x]$ $\forall x > 0$

παράγωγη στο $(0, x)$ $\forall x > 0$

Άρα από ΘΜΤ υπάρχει τουλάχιστον ένα $t \in (0, x)$

τέτοιο ώστε $f'(t) = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{f(0) = -\ln 2}{=} \dfrac{f(x) + \ln 2}{x}$

για κάθε $x > 0$

Όμως f κοίλη $\Rightarrow$ f' γνησίως φθίνουσα άρα

για $t < x$ $\overset{f' \downarrow}{\Rightarrow}$ $f'(t) > f'(x)$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{f(x) + \ln 2}{x} > f'(x) \Leftrightarrow x f'(x) < f(x) + \ln 2$

για κάθε $x > 0$

(12) $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, $0 < \alpha \neq 1$

Επειδή $f(0) = 1 - \ln 1 = 1$, ισχύει ότι $f(x) \geq 1 \Leftrightarrow f(x) \geq f(0)$

για κάθε $x > -1$. Άρα η f παρουσιάζει μέγιστο στο 0

Επιπλέον, f παράγωγη με $f'(x) = \alpha^x \ln \alpha - \dfrac{1}{x+1}$

Άρα από Θεώρημα Fermat ισχύει ότι $\boxed{f'(0) = 0} \Leftrightarrow$

$$a^{\circ} \ln a - \frac{1}{1} = 0 \Leftrightarrow \ln a = 1 \Leftrightarrow \ln a = \ln e$$ -5-

$$\overset{1-1}{\Leftrightarrow} \boxed{a = e}$$

Άρα $f(x) = e^x - \ln(x+1)$

(β) $f'(x) = e^x - \dfrac{1}{x+1} = \dfrac{(x+1)e^x - 1}{x+1}$, $x > -1$.

Έστω $g(x) = (x+1)e^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = e^x + (x+1)e^x = e^x(x+2) > 0$ για κάθε $x > -1$

άρα g γνησίως αύξουσα με $g(0) = 0$.

άρα για κάθε $x > 0 \overset{g\uparrow}{\Longrightarrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 0$

$x < 0 \overset{g\uparrow}{\Longrightarrow} g(x) < g(0) \Leftrightarrow g(x) < 0$

Όμως $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x+1}$, $x > -1$ μόνο $f'(0) = 0$

άρα $f'(x) > 0$ για $x > 0$ και $f'(x) < 0$ για $-1 < x < 0$

άρα f γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ και γνησίως φθίνουσα

στο $(-1, 0]$.

(γ) Θ. Bolzano

Έστω η $\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$ για $\beta, \gamma \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$

$\Leftrightarrow (f(\beta)-1)(x-2) + (x-1)(f(\gamma)-1) = 0$

Θεωρώ την $\varphi(x) = (f(\beta)-1)(x-2) + (f(\gamma)-1)(x-1)$

Η φ είναι συνεχής στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική.

$$\left.\begin{aligned} \varphi(1) &= -(f(\beta)-1) \\ \varphi(2) &= f(\gamma)-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi(1)\cdot\varphi(2) = -(f(\beta)-1)(f(\gamma)-1)$$

Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0 άρα $f(x) \geq f(0) = e^0 - \ln 1$

Άρα $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1 \Rightarrow$

$f(\beta), f(\gamma) > 1$ αφού $\beta, \gamma \in (-1,0) \cup (0,+\infty)$

άρα $f(\beta)-1>0$ και $f(\gamma)-1>0$

$\Rightarrow \varphi(1)\cdot\varphi(2) < 0$

Από Θ. Bolzano η $\varphi(x)=0$ έχει τουλ. μία ρίζα στο $(1,2)$

άρα και η $\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$

(13) $f(x)=(x-2)\ln x + x - 3 \,,\quad x>0$

(α) $f'(x) = \ln x + \dfrac{x-2}{x} + 1 \,,\quad x>0 \quad (f'(1)=0)$

$$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{x-(x-2)}{x^2} = \frac{x+x-x+2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2} > 0$$

για $x>0$

οπότε f' γνησίως αύξουσα.

άρα για $x>1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) > f'(1) = 0$

$0<x<1 \overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(1) = 0$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε.	$\nearrow$	

Επίσης $f((0,1]) \overset{f\downarrow}{=} [f(1), \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)) = [-2,+\infty)$

και $f([1,+\infty)) \overset{f\uparrow}{=} [f(1), \lim\limits_{x\to +\infty} f(x)) = [-2,+\infty)$

με $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}((x-2)\ln x + 3) = (0-2)(-\infty)+3 = +\infty$

$f(1) = 0 + 1 - 3 = -2.$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty}((x-2)\ln x + 3) = (+\infty)\cdot(+\infty) + 3 = +\infty$

Άρα $0 \in [-2,+\infty) = f((0,1])$ και $0 \in f([1,+\infty))$

Άρα η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0,1]$ και εσωτ. διάστημα $(1,+\infty)$ $(f(1)=-2\neq 0)$ λόγω ότι η f - Β -

είναι γνησίως μονότονη στα $(0,1]$ και $[1,+\infty)$

οι ρίζες της $f(x)=0$ σε κάθε διάστημα θα

είναι και μοναδικές

Άρα η $f(x)=0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες

μία $x_1\in(0,1)$ και $x_2\in(1,+\infty)$

$$f(x_1)=f(x_2)=0$$

(β) Θεωρώ την εξίσωση $x f'(x) - f(x)=0$, $x>0$

$$\Leftrightarrow \frac{x f'(x)-(x)' f(x)}{x^2}=0, \quad x>0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)'=0, \quad x>0$$

Θεωρώ την $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\in[x_1,x_2]\subset(0,+\infty)$

Η g είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$, παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2)

ως πηλίκο παραγωγίσιμων στο $[x_1,x_2]$ με $f(x_1)=f(x_2)=0$

Άρα από Θ. Rolle υπάρχει τουλ. ένα $k\in(x_1,x_2)$: $g'(k)=0$

$$\Leftrightarrow k f'(k)-f(k)=0$$

(14) (α) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 11$ $x \in \mathbb{R}$ συνεχής ως πολ/κή με

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 4x^2(x-3)$, $x \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 12x^2 - 24x = 12x(x-2)$, $x \in \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 3$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^2(x-3) > 0 \Leftrightarrow x > 3$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$

με

x		0		2	
f''	+	0	−	0	+

Άρα

x	$-\infty$	0		2		3	$+\infty$
f'	−	0	−		−	0	+
f''	+	0	−	0	+		+
f	$+\infty$ φθίνουσα κυρτή		φθίνουσα κοίλη		φθίνουσα κυρτή		αύξουσα κυρτή

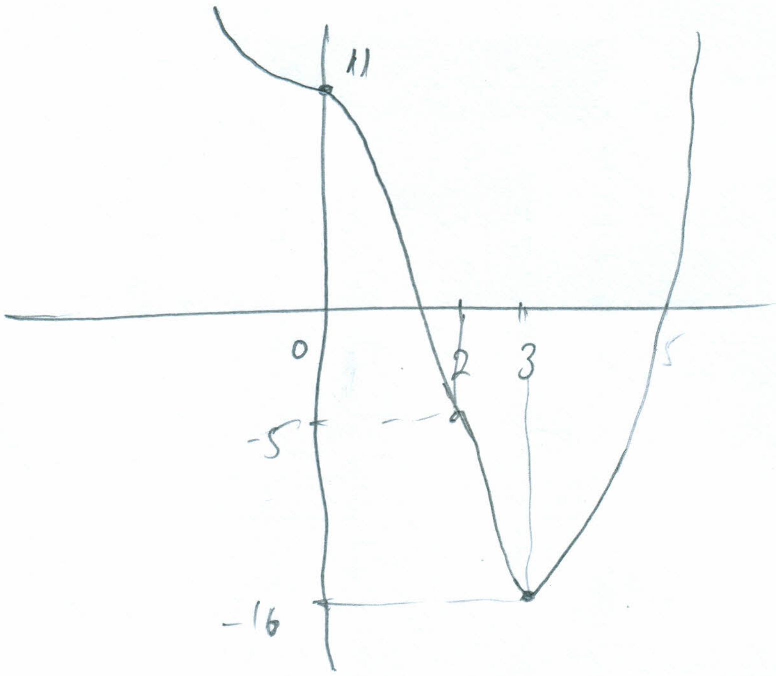
$f(0) = 11$ σημείο καμπής , $f(2) = 16 - 32 + 11 = -5$ σημείο καμπής

$f(3) = 81 - 108 + 11 = -16$ τοπικό ελάχιστο

Ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^4 - 4x^3 + 11 = \lim_{x \to -\infty} x^4 = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^4-4x^3+11 = \lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty$$



(β) $f(x) = \dfrac{x^2-x+4}{x-1}$, $x \neq 1$ συνεχής.

$$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1)-(x^2-x+4)\cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(2x-2)(x-1)^2-(x^2-2x-3)\cdot 2\cancel{(x-1)}}{(x-1)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{8}{(x-1)^3} > 0$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow x=3 \text{ ή } x=-1$$

$$\Delta = 4+12=16$$

$$x_{1,2} = \frac{2\pm 4}{2} \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f''		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
f	$-\infty$	↗	T.M.	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	T.E.	↗	$+\infty$

$\Rightarrow f$ κυρτή στο A

άρα χωρίς σημεία καμπής

$f(-1)=-3$ $\qquad f(3)=5$

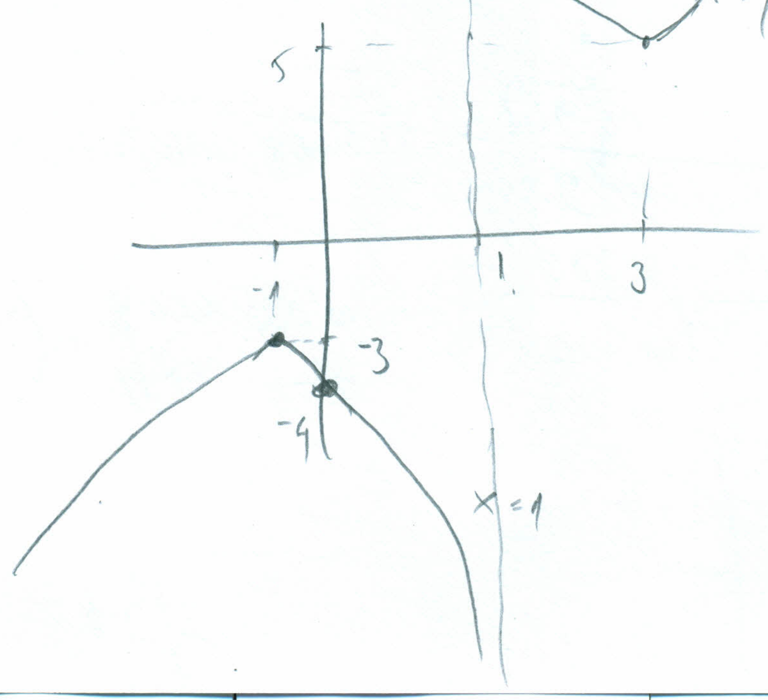
Ασυμπτωτική συμπεριφορά

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-x+4}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x+4}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-x+4}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1^-\\ x<1}} (x^2-x+4)\cdot\frac{1}{x-1} = 4(-\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{x^2-x+4}{x-1} = \lim_{\substack{x\to1^+\\ x>1}} (x^2-x+4)\frac{1}{x-1} = 4(+\infty) = +\infty$$



$f(0) = -4$

$f(x)=0 \Leftrightarrow$

$x^2-x+4=0$

$\Delta = 1-12<0$

δεν τέμνει τον $x'x$.

(15) $f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x>0$

(α) Η f συνεχής

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}, \quad x>0$$

$$f''(x) = \frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2 - 2x(1-\ln x)}{x^4} = -\frac{(3+2\ln x)}{x^3}, \quad x>0$$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

	0		e		$+\infty$
$1-\ln x$		$+$	0	$-$	

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3+2\ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x = e^{-3/2}$

	0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
$3+2\ln x$		$-$	0	$+$	

x	0		$e^{-3/2}$		e		$+\infty$
f'		$+$		$+$	0	$-$	
f''		$+$	0	$-$		$-$	
f	$-\infty$	↗	Σ.Κ.	↗	Τ.Μ.	↘	0

$x^2>0 \ \forall x>0$

$-x^3<0 \ \forall x>0$

$$f(e^{-3/2}) = \frac{\ln e^{-3/2}}{e^{-3/2}} = -\frac{3}{2}e^{3/2}$$

$$f(e) = \frac{1}{e} = e^{-1}$$

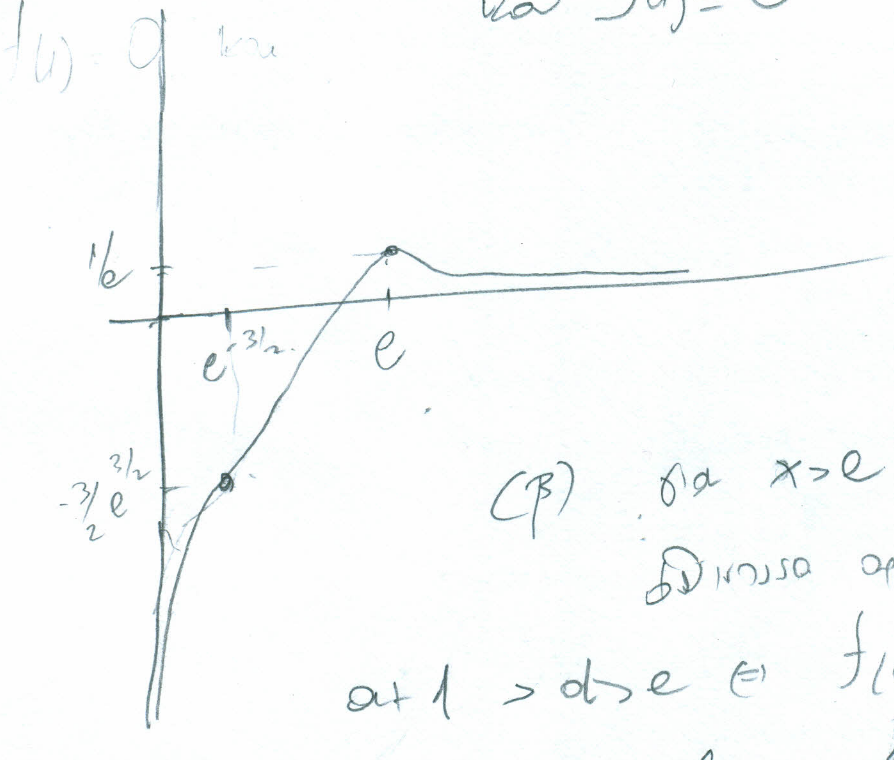
Ασυμπτωτική $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \frac{1}{x}$

$= (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\Rightarrow y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη.

και $f(1)=0$



(β) για $x>e$ η f είναι γνησίως

φθίνουσα άρα για

$a+1 > a > e \iff f(a) > f(a+1)$

$\iff \frac{\ln a}{a} > \frac{\ln(a+1)}{(a+1)}$

$\iff (a+1)\ln a > a\ln(a+1)$

$\iff \ln a^{a+1} > \ln(a+1)^{a}$

$\iff a^{a+1} > (a+1)^{a}$

(16) $f(x)=e^x-\lambda x\ ,\ \lambda>0$

(α) $f'(x)=e^x-\lambda$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x-\lambda=0 \Leftrightarrow e^x=\lambda \Leftrightarrow x=\ln\lambda$.

$f'(x)>0 \Leftrightarrow e^x-\lambda>0 \Leftrightarrow e^x>\lambda \Leftrightarrow x>\ln\lambda$

x	$-\infty$		$\ln\lambda$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$	

άρα η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=\ln\lambda$ με ελάχιστο το

$$f(\ln\lambda)=e^{\ln\lambda}-\lambda\ln\lambda=\lambda(1-\ln\lambda)$$

(β) Για να ισχύει $e^x\geq\lambda x\ \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow e^x-\lambda x\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow f(x)\geq 0\ \forall x\in\mathbb{R}$ αρκεί το ελάχιστο να είναι το 0 δηλ. $\lambda(1-\ln\lambda)=0$

$\Leftrightarrow \lambda=0$ ή $1-\ln\lambda=0$

$\Leftrightarrow \lambda=0$ ή $\lambda=e$ → μεγαλύτερη τιμή

(17) (α) $\displaystyle\int \frac{2x+3}{2x+1}\,dx = \int \frac{2x+1+2}{2x+1}\,dx =$

$$= \int \left(1 + \frac{2}{2x+1}\right)dx = \int 1\,dx + \int \frac{2}{2x+1}\,dx$$

$$= x + \int \frac{2}{2x+1}\,dx \;\underset{du=2dx}{\overset{u=2x+1}{=\!=}}\; x + \int \frac{1}{u}\,du = x + \ln u + c$$

$$= x + \ln(2x+1) + c$$

(β) $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}\,dx = \int \frac{x^2-5x+6+2x+1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \left(1 + \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\right)dx$

$$= x + \int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx$$

→ παραγοντοποίηση επειδή με

$$x^2-5x+6 = (x-2)(x-3)$$

αναγωγή σε απλά κλάσματα $\displaystyle\frac{2x+1}{(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3}$

$$\Leftrightarrow \quad 2x+1 = (A+B)x - 3A - 2B$$

$$\Leftrightarrow \quad \left.\begin{aligned} A+B&=2 \\ -3A-2B&=1 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} 2A+\cancel{2B}&=4 \\ -3A-\cancel{2B}&=1 \\ \hline -A = 5 &\Leftrightarrow A=-5 \\ B &= 7 \end{aligned}$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-5x+6}\,dx = \int \left(\frac{-5}{x-2} + \frac{7}{x-3}\right)dx$$

$$= -5\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + c$$

Άρα $\displaystyle\int \frac{x^2-3x+7}{x^2-5x+6}\,dx = x - 5\ln|x-2| + 7\ln|x-3| + c$

(γ) $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,dx = \int \frac{2}{(x-1)(x+1)}\,dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)dx =$

$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + c.$

(δ) $\displaystyle\int \frac{1+x-x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx = \int \frac{1-x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx + \int \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$

$\displaystyle= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$

Σημείωση $\displaystyle\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt$

και $\displaystyle\int \frac{2x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx \underset{du=2x\,dx}{\overset{u=1-x^2}{=}} \int \frac{-du}{u^{3/2}}$

$\displaystyle= -\frac{u^{-5/2}}{-5/2} + c = \frac{2}{5}\cdot(1-x^2)^{-5/2} + c$

άρα $\displaystyle\int \frac{1+x-x^2}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx = \arcsin x + \frac{2}{5}(1-x^2)^{-5/2} + c.$

(ε) $\displaystyle\int \frac{e^x}{(1+e^x)^2}\,dx \underset{du=e^x dx}{\overset{u=1+e^x}{=}} \int u^{-2}\,du = \frac{u^{-3}}{-3} + c$

$\displaystyle= -\frac{1}{3}(1+e^x)^{-3} + c$

(δ2) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx \overset{\text{Με παραγοντική}}{=\!=} \int \left(-\frac{1}{x}\right)' \ln x\,dx =$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x}\cdot(\ln x)'\,dx$$

$$= -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + c = -\frac{\ln x + 1}{x} + c$$

(ζ) $\displaystyle\int \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx \overset{\text{παραγοντική}}{=\!=} \int (x)' \ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)dx$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int x\left(\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)'dx$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int x\cdot\frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \int 2x\,\frac{\cancel{x+\sqrt{1+x^2}}}{\cancel{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - 2\int \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\,dx$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - 2\int \left(\sqrt{1+x^2}\right)'dx$$

$$= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - 2\sqrt{1+x^2} + c$$

(n) $I=\int e^x\cos 2x\,dx \overset{\text{παρ.}}{=} \int (e^x)'\cos 2x\,dx =$

$= e^x\cos 2x - \int e^x(-2\sin 2x)\,dx$

$= e^x\cos 2x + \int (e^x)'\sin 2x\,dx = e^x\cos 2x + e^x\sin 2x$

$- \int e^x 2\cos 2x\,dx \Leftrightarrow I = e^x\cos 2x + e^x\sin 2x - 2I$

$\Leftrightarrow 3I = e^x\cos 2x + e^x\sin 2x$

$\Leftrightarrow I = \frac{1}{3}e^x\cos 2x + \frac{1}{3}e^x\sin 2x + c.$

(18) α) $I = \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x}\,dx \underset{du=\frac{1}{x}dx}{\overset{u=\ln x}{=}} \int_0^1 u^2\,du = \frac{u^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$

$\ln 1 = 0$
$\ln e = 1$

β) $I = \int_{-2}^{2} \frac{e^x - e^{-x}}{1+x^2}\,dx = \int_{-2}^{0} \frac{e^x-e^{-x}}{1+x^2}\,dx + \int_0^2 \frac{e^x-e^{-x}}{1+x^2}\,dx$

$\Big\| \; u=-x$
$du = -dx$

$-\int_2^0 \frac{e^{-u}-e^{u}}{1+u^2}\,du + \int_0^2 \frac{e^x-e^{-x}}{1+x^2}\,dx$

$= \int_0^2 \frac{e^{-x}-e^x}{1+x^2}\,dx + \int_0^2 \frac{e^x-e^{-x}}{1+x^2}\,dx$

$$= \int_0^2 \left(\frac{e^{-x} - e^{x}}{1+x^2} - \frac{e^{-x} - e^{x}}{1+x^2} \right) dx = 0$$

Όλο το I βγαίνει 0 θέτοντας $u = -x$ γιατί περιττή είναι

η $f(x) = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$ είναι περιττή.

Πράγματι $f(-x) = \dfrac{e^{-x} - e^{x}}{1+(-x)^2} = -\dfrac{e^{x} - e^{-x}}{1+x^2} = -f(x)$

(19) Επειδή η f είναι πολλαπλού τύπου το

$$I = \int_0^3 f(x) = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)\,dx + \int_1^2 0\,dx + \int_2^3 (2-x)^2\,dx$$

$$= x - \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 0 + \int_2^3 (4 - 4x + x^2)\,dx$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) - 0 + \left[4x - 2x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \left(4 - 2 + \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{17}{6}$$

(20) Η $f(x) = e^{x^2}$, $x \in [0,1]$ έχει $f'(x) = 2xe^{x^2} \geq 0 \Rightarrow f$ γνησίως αύξουσα

άρα για $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(1) \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq e$

Ολοκληρώνω κατά μέλη στο $[0,1]$ και έχω $\int_0^1 1\,dx \leq \int_0^1 f(x)\,dx \leq \int_0^1 e\,dx$

(21) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt}{x^3} dx$

Επειδή η $F(x)=\int_0^{x^2} \sin\sqrt{t}\,dt$ είναι παρ/μη με $F'(x)=\sin\sqrt{x^2}\cdot(x^2)' = 2x\sin\sqrt{x^2}$

είναι και συνεχής άρα $\lim_{x\to 0}\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt = F(0)=\int_0^0 \sin\sqrt{t}\,dt = 0$

άρα $\lim_{x\to 0}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt}{x^3} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x\to 0}\dfrac{\left(\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,dt\right)'}{(x^3)'}$

$= \lim_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x^2}\cdot 2x}{3x^2} \overset{x\to 0}{=} \lim_{x\to 0}\dfrac{2}{3}\dfrac{\sin x}{x} = \dfrac{2}{3}\cdot 1 = \dfrac{2}{3}.$

(22) a) $\int_2^{+\infty}\dfrac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_2^t \dfrac{1}{x}dx = \lim_{t\to+\infty}[\ln t]_2^t$

$= \lim_{t\to+\infty}(\ln t - \ln 2) = +\infty$ άρα το

$\int_2^{+\infty} 1/x\,dx$ δεν υπάρχει

β) $\int_0^{+\infty} 3e^{-3x}dx = \lim_{t\to+\infty}\int_0^t 3e^{-3x}dx = \lim_{t\to+\infty}\left[-e^{-3x}\right]_0^t$

$= \lim_{t\to+\infty}\left(-e^{-3t}+1\right) = 0 + 1 = 1.$