Δευτέρα 30/9/19
Μάθημα 1ο

Παραδείγματα: (i) $U_t = U_{xx}$ με λύσεις: $\rightarrow U_0(x,t) = e^{-a^2 t}\cdot \sin(ax), a\in\mathbb{R}$
$\rightarrow u(x,t) = x^2 + 2t$

(ii) $(y+u)U_x + yU_y = x - y$ με λύση $u(x,y) = \frac{2}{y} + x - y$

Εύκολες περιπτώσεις:

Λύσεις το χρησιμοποιώ ως θεωρία

1) $U_x = 0$ (*) στο $\mathbb{R}^2$ $\forall y$ = σταθ. αυτή είναι μία ΣΔΕ

$U_x = 0 \Rightarrow u(x,y) = c(y)$ εξαρτάται από το y γιατί για κάθε διαφορετικό y που σταθεροποιώ, παίρνω διαφορετικό c

Αντίστροφα, $\forall c \in C^1(\mathbb{R})$ η $c(y)$ λύνει την (*)

Εναλλακτικά: $U_x(x,y) = 0 \Rightarrow \int_0^x u_x(s,y)ds = 0 \Leftrightarrow u(x,y) - u(0,y) = 0$
$\Leftrightarrow u(x,y) = u(0,y) = c(y)$

2) $U_{xy} = 0$ στο $\mathbb{R}^2$ Από (1) αφού $U_y = 0$ θα έχουμε $U_x(x,y) = a(x)$ (θα εξάρτ. από το x)

$U_{xy} = 0 \rightarrow U_x(x,y) = a(x) \Rightarrow \int_0^x U_x(s,y)ds = \int_0^x a(s)ds$

$\Leftrightarrow u(x,y) - u(0,y) = \int_0^x a(s)ds$

$\Leftrightarrow u(x,y) = f(x) + g(y)$ με $f, g \in C^1(\mathbb{R})$

Αντίστροφα, αν $u(x,y) = f(x) + g(y)$ τότε $U_{xy} = (f'(x))_y = 0$

προσπαθώ να την κάνω ΣΔΕ

3) $U_{xy} + U_x = 0 \Rightarrow (U_x)_y + U_x = 0 \Leftrightarrow e^y (U_x)_y + e^y \cdot U_x = 0$

$\Leftrightarrow (e^y \cdot U_x)_y = 0 \Leftrightarrow e^y \cdot U_x = c(x)$, για $c \in C^1(\mathbb{R})$

$\Leftrightarrow U_x = e^{-y}\cdot c(x)$

$\downarrow$

$u(x,y) = e^{-y}\int_0^x c(s)ds + \tilde{c}(y)$, $\tilde{c}(y) = u(0,y)$

Άρα, $u(x,y) = e^{-y} A(x) + B(y)$, $A, B \in C^1(\mathbb{R})$

4) $U_{xx} = 0 \Rightarrow U_x = c(y) \Rightarrow \int_0^x U_x(s,y)ds = \int_0^x c(y)ds$

$\Rightarrow u(x,y) - u(0,y) = c(y)\cdot x \Rightarrow u(x,y) = c(y)\cdot x + u(0,y)$

Για εύρεση λύσεων ΜΔΕ : ΜΔΕ $\longrightarrow$ ΣΔΕ
- Μέθοδος χαρακτηριστικών
- Εξίσωση μεταφοράς: $u_t + c \cdot u_x = 0$
- Εξίσωση κύματος: $u_{tt} = c^2 \cdot u_{xx}$
- Εξίσωση θερμότητας: $u_t = k \cdot u_{xx}$, $k>0$
- Στοιχεία σειρών Fourier
- Μέθοδος χωρισμού μεταβλητών
- Εξίσωση Laplace: $u_{xx} + u_{yy} = 0$
- Ταυτότητες Green
- Μη γραμμικές ΜΔΕ

Π.Σ.Τ (πρόβλημα συνοριακών τιμών)
Δίνεται ΜΔΕ για τη u σε ένα $U \subset \mathbb{R}^n$ και η απαίτηση $u(x) = g(x)$ $\forall x \in \Gamma$, όπου $\Gamma \subset \partial U$ και g δεδομένη συνάρτηση

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ης ΤΑΞΗΣ στο $\mathbb{R}^2$:
$a(x,y)\, u_x + b(x,y) \cdot u_y + c(x,y) \cdot u = d(x,y)$
$\forall x,y \in \underbrace{U}_{\text{ανοικτό}}$ $a, b \in C^\infty$ και $|a|+|b| \neq 0$

$\boxed{\text{1ος τρόπος}}$ Αλλαγή συντεταγμένων (αλλαγή μεταβλητών)

1. Ορίζουμε νέες μεταβλητές $\xi = f(x,y)$, $n = g(x,y)$, όπου $f, g \in C^1(U)$

Το μετασχηματισμό αυτό τον θέλουμε αντιστρέψιμο, ώστε να λύσουμε ως προς x και y, δηλαδή ώστε:
$x = h(\xi, n)$ και $y = k(\xi, n)$
Δηλαδή, μετασχηματισμός $T: U \to \mathbb{R}^2$ με:
$T(x,y) = (f(x,y), g(x,y)) = (\xi, \eta)$, αντιστρέψιμο (τοπικά)
με αντίστροφο $T^{-1}(\xi, \eta) = (h(\xi,n), k(\xi,n)) = (x,y)$
Τσεκάρω αντιστρεψιμότητα $\rightarrow$ Θέλω Ιακωβιανή $\neq 0$

2. Θέτω $\bar{u}(\xi,\eta) = u(T^{-1}\overset{(x,y)}{(\xi,\eta)})$ (*) $\quad (u(x,y) = \bar{u}(\xi,\eta))$

3. Δείχνω ότι η ① ισοδυναμεί με ΣΔΕ και τη λύνω

4. Επιστρέφω στην (*) και βρίσκω $u(x,y) = \bar{u}(T(x,y))$

ΚΥΡΙΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ: Εύρεση f,g (του μετασχηματισμού)

• Θεωρώ τη ΣΔΕ $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b(x,y)}{a(x,y)}$ και την μετασχηματίζω σε σχέση της μορφής $f(x,y) = c$

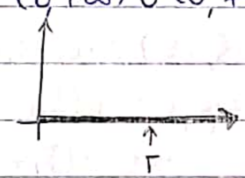
• f, τη θέλω για $\xi = f(x,y)$

για την g: $\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \neq 0$ $\quad$ (Συνήθως, $g(x,y) = x$ ή $g(x,y) = y$)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.8

$xy\,u_x - x^2 u_y - yu = xy$ στο $U = (0,+\infty) \cup (0,+\infty)$

με $u(x,0) = g(x)$ $\forall x > 0$



$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-x^{\cancel{2}}}{xy} = \dfrac{-x}{y} \Rightarrow yy' = -xx' \Leftrightarrow$

$(y^2)' = -(x^2)' \Leftrightarrow y^2 + x^2 = c$ $\qquad \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2y \neq 0$ ✓

Παίρνω μετασχηματισμούς: $\begin{cases} \xi = f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \eta = g(x,y) = x \end{cases}$

Αντίστροφος μετασχηματισμός: $\begin{cases} x = \eta \\ y = \sqrt{\xi - \eta^2} \end{cases}$

$\bar{u}(\xi,\eta) = u(T^{-1}(\xi,\eta)) = u(\overset{x}{\eta}, \underset{y}{\sqrt{\xi - \eta^2}})$

Δηλαδή, $u(x,y) = \bar{u}(\underbrace{x^2+y^2}_{\xi}, \underbrace{x}_{\eta})$

• $u_x = 2x \cdot \bar{u}_\xi + \bar{u}_\eta$

• $u_y = 2y \cdot \bar{u}_\xi + 0 \cdot \bar{u}_\eta$

Οπότε η αρχική εξίσωση γίνεται: $xy(2x\bar{u}_\xi + \bar{u}_\eta) - x^2 y\,\bar{u}_\xi - y\bar{u} = xy$

$\Leftrightarrow x\cdot \bar{u}_\eta - \bar{u} = x \overset{x=\eta}{\Longleftrightarrow} \eta\cdot\bar{u}_\eta - \bar{u} = \eta$

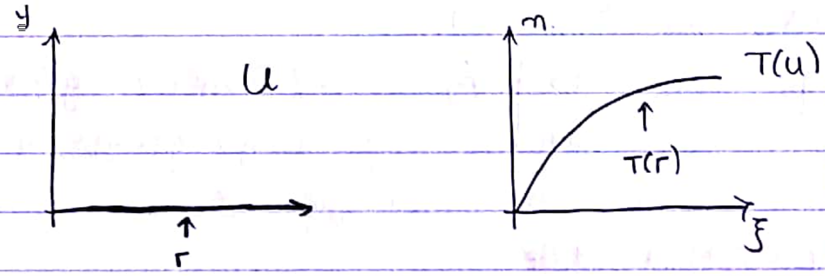
$\overset{\eta>0}{\Leftrightarrow} \dfrac{\eta \bar{u}_\eta - \bar{u}}{\eta^2} = \dfrac{1}{\eta} \Leftrightarrow \partial_\eta\left(\dfrac{\bar{u}_\eta}{\eta}\right) = \partial_\eta(\ln\eta)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\bar{u}}{\eta} = \ln\eta + c(\xi) \Leftrightarrow \bar{u}(\xi,\eta) = \eta\ln\eta + \eta\, c(\xi)$

↳ για κάποια συνάρτηση c.

$\boxed{\text{Δευτέρα 7/10/19} \quad \text{Μάθημα 2º}}$

(συνέχεια άσκησης από προηγούμενο μάθημα)



$(\xi,\eta) = T(x,y) = (x^2+y^2, x)$

$T(x,y) = (\xi,\eta)$

$\eta>0,\ \xi>\eta^2$

$\bar{u}(\xi,\sqrt{\xi}) = u(\sqrt{\xi},0) = g(\sqrt{\xi})$

Επίσης, $\bar{u}(\xi,\sqrt{\xi}) = \sqrt{\xi}\cdot\log\sqrt{\xi} + \sqrt{\xi}\cdot c(\xi)$

$\Rightarrow c(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{\xi}}\left(g(\sqrt{\xi}) - \sqrt{\xi}\cdot\log\sqrt{\xi}\right)$

Άρα, $\bar{u}(\xi,\eta) = \eta\log\eta + \dfrac{\eta}{\sqrt{\xi}}\left(g(\sqrt{\xi}) - \sqrt{\xi}\cdot\log\sqrt{\xi}\right)$

Και άρα, $u(x,y) = \bar{u}(\xi,\eta) = \bar{u}(x^2+y^2,x) = x\log x + \dfrac{x}{r}\left(g(r) - r\log r\right)$

όπου $r = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{\xi}$

$y=0 \Rightarrow r = \sqrt{x^2+y^2} = x$

$x\log x + g(x) - x\log x = g(x)$

Γιατί λειτουργεί η μέθοδος;

Είχαμε την $a(x,y)\cdot u_x + b(x,y)\cdot u_y + c(x,y)\cdot u = d(x,y)$ ① $\forall (x,y) \in U$

Θεωρήσαμε την $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{b(x,y)}{a(x,y)}$ ②

Την μετασχηματίσαμε σε $f(x,y) = 0$ $\quad x^2+y^2=c$

Θέσαμε $\xi = f(x,y)$ και $\eta = g(x,y)$ ώστε:

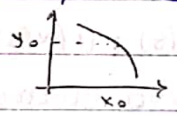
$$\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix} \neq 0$$

Η $u(x,y) = \bar{u}\left(f(x,y), g(x,y)\right)$ δίνει

$$u_x = \bar{u}_\xi \cdot f_x + \bar{u}_\eta \cdot g_x$$
$$u_y = \bar{u}_\xi \cdot f_y + \bar{u}_\eta \cdot g_y$$

Άρα στο U θα έχουμε

$$d(x,y) = \{a(x,y) f_x(x,y) + b(x,y) f_y(x,y)\} \bar{u}_\xi + \{a(x,y)\cdot g_x(x,y) + b(x,y)\cdot g_y(x,y)\}\cdot \bar{u}_\eta(T(x,y))\} + c(x,y)\cdot \bar{u}\,(T(x,y)) \quad ③$$



Θέτουμε $(x,y) = T^{-1}(\xi,\eta)$

ώστε η παραπάνω ορίζουσα $\neq 0$

Έστω $(x_0,y_0) \in U$. Υποθέτουμε ότι $f_x(x_0,y_0) \neq 0$

Τότε, κοντά στο (x_0,y_0) η $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ λύνεται μοναδικά ως προς $x = x(y)$

Δηλαδή, $f(x(y),y) = f(x_0,y_0)$ ④ $\forall y$ κοντά στο y_0

Η $x(y)$ λύνει την ② γιατί ικανοποιεί την:

$f(x(y),y) = c = f(x_0,y_0)$

Δηλαδή, $x'(y) = \dfrac{a(x,y)}{b(x,y)}$

Επίσης, παραγωγίζοντας την ④ ως προς y έχουμε:

$$f'(x_0,y_0) = 0 = f_x \cdot x'(y) + f_y = f_x \cdot \frac{a}{b} + f_y$$

$$\Rightarrow a\cdot f_x + b\cdot f_y = 0$$

Άρα, η ③ γίνεται:
$d(T^{-1}(\xi,\eta)) = \bar{A}(\xi,\eta)\cdot \bar{u}_\eta(\xi,\eta) + \bar{B}(\xi,\eta)\cdot \bar{u}(\xi,\eta) \quad \forall \xi$,
αυτή είναι μια ΣΔΕ

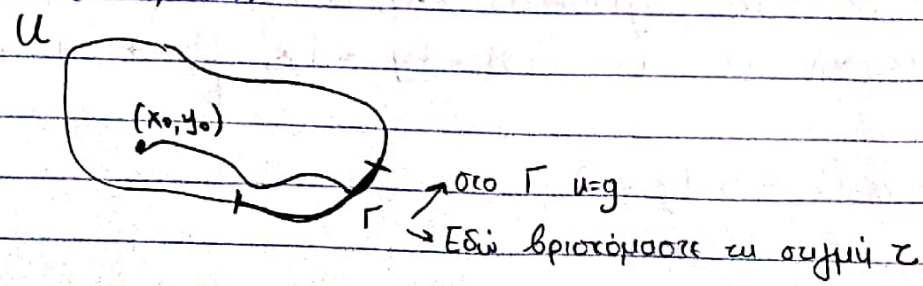
$\boxed{2^{ος} \text{ τρόπος}}$ Η μέθοδος των χαρακτηριστικών

Έχουμε μια ΜΔΕ στο $U \subset \mathbb{R}^2$ για τη συνάρτηση u και μια συνθήκη $u(x,y) = g(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Gamma \subset \bar{U}$. Συνήθως $\Gamma \subset \partial U$. Ψάχνουμε μια $u \in C(U \cup \Gamma)$ που να ικανοποιεί τη ΜΔΕ και να έχει τιμές g στο Γ

Η μέθοδος: Υποθέτουμε ότι η u είναι μια λύση του προβλήματος. Για δεδομένο $(x_0,y_0) \in U$, βρίσκουμε μια καμπύλη $\gamma: s \longmapsto (x(s),y(s))$, ώστε:
(i) $(x(0),y(0)) = (x_0,y_0)$
(ii) Η $z(s) = u(x(s),y(s))$ να ικανοποιεί μια ΣΔΕ
(iii) Η γ να συναντά το Γ σε πεπερασμένο χρόνο τ.

Γνωρίζοντας το $z(\tau) = g(\underbrace{x(\tau),y(\tau)}_{\text{σημείο της } \Gamma})$ και την ΣΔΕ, βρίσκουμε τις τιμές της u σε κάθε σημείο της γ, άρα και στο (x_0,y_0)
Στο τέλος επαληθεύουμε ότι η u που βρήκαμε λύνει το πρόβλημα.

Η καμπύλη $s \longmapsto (x(s),y(s),z(s))$ λέγεται χαρακτηριστική της ΜΔΕ. Πολλές φορές, χαρακτηριστική λέμε και την $s \longmapsto (x(s),y(s))$



Για την $a(x,y)\cdot u_x + b(x,y)\cdot u_y + c(x,y)\cdot u = d(x,y)$ ①

Επιλέγουμε ως γ μια καμπύλη που ικανοποιεί τις:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{d\,x(s)}{ds} = a\,(x(s), y(s)) \\[2ex] \dfrac{dy(s)}{ds} = b(x(s), y(s)) \end{array}\right\} \quad ②$$

Τότε, $z(s) = u(x(s), y(s))$ ικανοποιεί την:

$$z'(s) = u_x \cdot x'(s) + u_y \cdot y'(s) = u_x\,(x(s),y(s))\cdot a(x(s),y(s)) + u_y(x(s),y(s))b(x,y)$$
$$= d(x(s),y(s)) - c\,(x(s),y(s))\cdot z(s),$$

η οποία είναι μια ΣΔΕ για την z.

Οι $x(s), y(s)$ προκύπτουν από τη ②

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$x\cdot u_x + u_y = 0$ στο $\mathbb{R}^2$

$u(x,0) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$, όπου $f \in C^1(\mathbb{R})$

Έστω u μια λύση της $(x(s), y(s), z(s))$ (χαρακτηριστική)

Οι εξισώσεις για τις x, y, z είναι:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{d\,x(s)}{ds} = x(s) \\[2ex] \dfrac{dy(s)}{ds} = 1 \\[2ex] \dfrac{dz(s)}{ds} = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x(s) = c\cdot e^s \\ y(s) = s + s_0 \\ z(s) = \bar{c} \end{array} \quad , c, s_0, \bar{c} \text{ ελεύθερα}$$

Όταν "ορίσαμε" τη μέθοδο είπαμε $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$

Από αυτές τις σχέσεις προκύπτουν αυτά

Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Επιλέγουμε $c = x_0$, $s_0 = y_0$

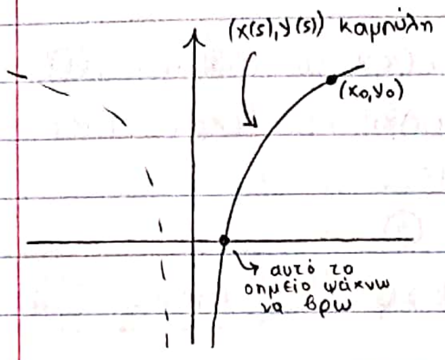
τότε $z(s) = u\,(\underbrace{x_0\cdot e^s}_{x}, \underbrace{y_0 + s}_{y})$ είναι σταθερή ως προς s

$\to s = y - y_0$

$x = x_0\cdot e^{y-y_0} = x_0\cdot e^{-y_0}\cdot e^y$

$u(x_0, y_0) = z(0) = z(-y_0) = u(x_0\cdot e^{-y_0}, 0) = f(x_0\cdot e^{-y_0})$

είμαι πάνω στον άξονα των x_0



Θεωρούμε την $u(x,y) = f(x\cdot e^{-y}) \in C^1(\mathbb{R}^2)$

$x\cdot u_x + u_y = x\cdot f'(x\cdot e^{-y})\cdot e^{-y} + f'(x\cdot e^{-y})(-x\cdot e^{-y}) = 0$

$u(x,0) = f(x)$

Εναλλακτικά:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx}{ds} = x \\ \\ \dfrac{dy}{ds} = 1\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{dx}{dy} = x \Rightarrow x(y) = c\cdot e^{y}$$

θεωρώ το x συνάρτηση του y.

$\left[\frac{1}{x}dx = dy \Rightarrow \ln x = y + c \quad x = e^{y} e^{c} \Rightarrow x = c\cdot e^{y}\right]$

Θεωρούμε δηλαδή το y ως μία ανεξάρτητη μεταβλητή

$x(y) = c\cdot e^{y}$

$z(y) = \underset{\underset{u(c\cdot e^{y},y)}{\parallel}}{u(x(y),y)} \Rightarrow z'(y) = 0 \Rightarrow z$ σταθερή

Έστω $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$. Επιλέγουμε $c = x_0\cdot e^{-y_0}$

$z(0) = z(y_0) \Rightarrow u(c,0) = u(x(y_0),y_0) \Rightarrow f(c) = u(x_0,y_0)$

$\Rightarrow u(x_0,y_0) = f(x_0\cdot e^{-y_0})$

HW **ΑΣΚΗΣΗ**

Με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών λύστε τη ΜΔΕ

$xy\cdot u_x - x^2\cdot u_y - yu = xy$ στο $U = (0,\infty)\cup(0,\infty)$ με

$u(x,0) = g(x) \ \forall x > 0$

(Αλικάκος 2η έκδοση, σελ. 43 παράδειγμα 1.8)

Τετάρτη 9/10/19
Μάθημα 3ο

$a(x,y)\cdot u_x + b(x,y)\cdot u_y + c(x,y)\cdot u = d(x,y)$

Οι χαρακτηριστικές είναι οι:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= a(x(s),y(s)) \\ \frac{dy}{ds} &= b(x(s),y(s)) \end{aligned}\right\} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b(x,y)}{a(x,y)}$$

$z(s) = u(x(s),y(s))$ $\qquad \xi(x,y) = c$

Αυτή δίνει την $\xi(x,y)$ στην τεχνική αλλαγής συντεταγμένων.

ΑΣΚΗΣΗ 7 §1.2 (Strauss)

α) Να λυθεί η $y\cdot u_x + x\cdot u_y = 0$ στο $\mathbb{R}^2$
$u(0,y) = e^{-y^2}$ $\forall y \in \mathbb{R}$

β) Σε ποια περιοχή του $\mathbb{R}^2$ προσδιορίζεται η λύση μοναδικά;

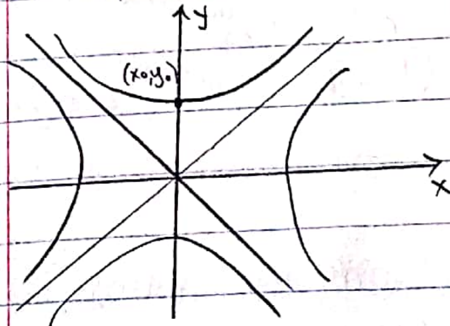
Λύση: α) Χαρακτηριστικές

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= y(s) \\ \frac{dy}{ds} &= x(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Leftrightarrow y y' = x x'$$

$$\Leftrightarrow (y^2)' = (x^2)'$$

$$\Leftrightarrow y^2 - x^2 = c, \ c \in \mathbb{R}$$

Χαρακτηριστικές είναι όλες οι υπερβολές με ασύμπτωτες τις $y = x$, $y = -x$.



(Το προβάλλω σε ένα σημείο για το οποίο ξέρω πράγματα)

Έστω $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

• Αν $|y_0| \geq |x_0|$, θέτουμε $c = y_0^2 - x_0^2 \geq 0$ (οι πάνω & κάτω υπερβολές)

Υποθέτουμε ότι $y_0 \geq 0$

Η $z(x) = u(x, \sqrt{x^2+c})$ ικανοποιεί την:

$$z'(x) = u_x(x, \sqrt{x^2+c}) + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+c}} u_y(x, \sqrt{x^2+c})$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+c} \cdot u_x(x, \sqrt{x^2+c}) + x \cdot u_y(x, \sqrt{x^2+c})}{\sqrt{x^2+c}} = 0$$

$$z(x_0) = z(0) \Rightarrow u(x_0, \underset{\sqrt{x_0^2+c}}{\underbrace{y_0}}) = u(0, \sqrt{c}) = e^{-(\sqrt{c})^2} = e^{-c} = e^{x_0^2 - y_0^2}$$

• Αν $|y_0| < |x_0|$ δουλεύουμε όμοια και βρίσκουμε ότι:

$u(x_0, y_0) = g(\sqrt{x_0^2 - y_0^2})$, όπου $u(x,0) = g(x)$

Θέτουμε $c = y_0^2 - x_0^2 < 0$ (δεξιά + αριστερά υπερβολές)

Παρατηρούμε ότι:

1) Η $u(x,y) = e^{x^2-y^2}$ λύνει το πρόβλημα στο $\mathbb{R}^2$

2) Η $u(x,y) = \begin{cases} e^{x^2-y^2} & |x| \leq |y| \\ g(\sqrt{x^2-y^2}) & |x| > |y| \end{cases}$

λύνει επίσης το πρόβλημα, αρκεί να ανήκει στο $C^1(\mathbb{R}^2)$

Θα πρέπει να ισχύει: $g(0) = 1$, $g'(0) = 0$ και $g \in C^1(\mathbb{R})$

ΟΡΟΛΟΓΙΑ

Πολυδείκτες $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n$, ορίζουμε $|a| = a_1 + \dots + a_n$

$$\partial^a u = \frac{\partial^{a_1}}{\partial x_1^{a_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{\partial^{a_n}}{\partial x_n^{a_n}} \cdot u = \frac{\partial^{|a|}}{\partial_{x_1}^{a_1} \dots \partial_{x_n}^{a_n}} \cdot u$$

Παράγωγος k-τάξης της $u : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ανοιχτό

$k = |a|$

ΜΔΕ k-τάξης λέμε κάθε εξίσωση της μορφής

$F(x, (\partial^a u) \; |a| \leq k) = 0$ στο U

Scanned by CamScanner

Δηλαδή, $F\left(x,u,\left(\frac{\partial u}{\partial x_{i_1}}\right)_{1\le i\le n},\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}}\right)_{1\le i_1,i_2\le n},\dots,\left(\frac{\partial^k u}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}\right)_{1\le i_1\dots i_k\le n}\right)=0$ (1)

όπου $F: U\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\dots\times\mathbb{R}^{n^k}\longrightarrow\mathbb{R}$ συνάρτηση

$u_t+u_{xx}+u^2=0$

Κλασική λύση της (1) λέμε κάθε συνάρτηση $u:U\to\mathbb{R}$ με τις ιδιότητες:

1) $u\in C^k(U)$, δηλαδή όλες οι παράγωγοι τάξης ως και k για την u να υπάρχουν και να είναι συνεχείς.

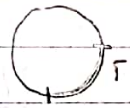
2) Η u να ικανοποιεί την (1)

Συνοριακές συνθήκες σε ένα $\Gamma\subset\partial U$ λέμε συνθήκες πάνω στις τιμές των $(\partial^a u)_{|a|\le k-1}$ στο Γ

Τα κυριότερα είδη συνοριακών συνθηκών:

• **Dirichlet**

Είναι της μορφής $u(x)=g(x)$ $\forall x\in\Gamma$ (2), όπου g δεδομένη συνάρτηση. Η λύση είναι μια $u: U\cup\Gamma\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο $U\cup\Gamma$ και ικανοποιεί τις (1),(2)

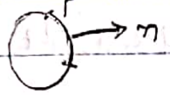


• **Neumann**

Είναι της μορφής $\frac{\partial u}{\partial n}(x)=h(x)$ $\forall x\in\Gamma$ (3), όπου n το κάθετο διάνυσμα στο Γ.

Η λύση είναι μια $u: U\cup\Gamma\to\mathbb{R}$ ώστε $u,\nabla u$ είναι συνεχείς στο $U\cup\Gamma$, η u ικανοποιεί την (1) και την (3)

$F(x,(\partial^a u)_{|a|\le k})=0$



• **Rodin**

(a) Γραμμική (Linear), αν η F είναι γραμμική στις $(\partial^a u)_{|a|\le k}$

Δηλαδή είναι της μορφής $\sum_{|a|\le k} c_a(x)\partial^a u(x)=f(x)$, c_a, f δεδομένες

(β) Ημιγραμμική (Semilinear), αν η F είναι γραμμική στις παραγώγους ανώτερης τάξης $(\partial^a u)_{|a|=k}$

Δηλαδή, είναι της μορφής $\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha(x)\partial^\alpha u(x) + g\left((\partial^\beta u)_{|\beta|\le k-1}, x\right) = 0$

(γ) Σχεδόν γραμμική, αν είναι της μορφής:

$$\sum_{|\alpha|=k} c_\alpha\left((\partial^\beta u)_{|\beta|\le k-1}, x\right)\partial^\alpha u(x) + g\left((\partial^\beta u)_{|\beta|\le k-1}, x\right) = 0$$

(δ) Πλήρως μη γραμμική, αν εξαρτάται με μη γραμμικό τρόπο από τις παραγώγους ανώτερης τάξης

<u>π.χ</u> $u_x^2 + u_y^2 = 1$

Η $u_{xx} + u_{yy} = u^2$ είναι μη γραμμική αλλά <u>όχι</u> πλήρως μη γραμμική.

ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑΣ

A Ομογενής

$u_t + c u_x = 0 \qquad (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,+\infty)$

$u(x,0) = g(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$

$c\in\mathbb{R}$ σταθερά, $g\in C^1(\mathbb{R})$

<u>Λύση με χαρακτηριστικές</u>

Έστω $(x(s), t(s), z(s) = u(x(s),t(s)))$ μια χαρακτηριστική

$x'(s) = c \Rightarrow x(s) = x_0 + cs$

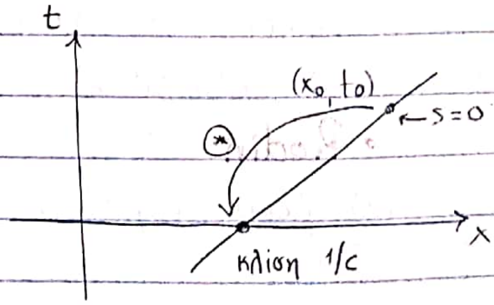
$t'(s) = 1 \Rightarrow t(s) = t_0 + s$

$\Big\} \; x(s) = x_0 + c(t(s) - t_0)$

$x = x_0 + c(t - t_0)$

$z(s) = u(x_0 + cs, t_0 + s)$

$z'(s) = c\cdot u_x + u_t = 0$



$u(x_0,y_0) = z(0) = z(-t_0) = u(x_0 - ct_0, 0)$

$= g(x_0 - ct_0)$

⊛ Το μεταφέρω εκεί, γιατί εκεί ξέρω να λύσω.

Θεωρούμε την $u(x,t) = g(x-ct)$

Η $u\in C^1(\mathbb{R}\times(0,+\infty))$, $u\in C(\mathbb{R}\times[0,+\infty))$

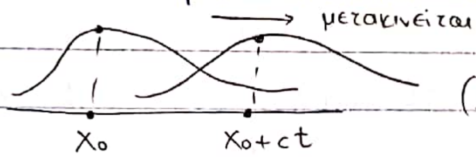
$u_t + cu_x = (-c)\cdot g'(x-ct) + c\cdot g'(x-ct) = 0$

$u(x,0) = g(x)$

$c>0$: προς δεξιά
$c<0$: προς αριστερά

Σχόλιο: Μια συνάρτηση της μορφής $g(x-ct)$ λέγεται οδεύον κύμα. Αυτό γιατί τη στιγμή $t=0$ δίνει στιγμιότυπο $g(x)$.

Ας υποθέσουμε ότι $c>0$. Η τιμή $g(x_0)$ στο γράφημα της g του χρόνου t, θα βρίσκεται πάνω από το σημείο x_0+ct. Η τιμή μετακινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα c. (Σχήμα 1) $(x-ct=x_0 \Rightarrow x=x_0+ct)$
Αν $c>0$ το κύμα κινείται προς τα δεξιά
Αν $c<0$ το κύμα κινείται προς τ' αριστερά



(Σχήμα 1)

$\boxed{B}$ Μη ομογενής

$$u_t + cu_x = f(x,t) \quad \text{για } (x,t)\in \mathbb{R}\times(0,+\infty) \quad (1)$$
$$u(x,0)=g(x)$$

"Σπάω" σε δύο εξισώσεις, λύνω τα εξής δύο προβλήματα:

$$v_t + cv_x = 0, \quad (x,t)\in U \quad (2) \qquad w_t + cw_x = f(x,t), \quad (x,t)\in U \quad (3)$$
$$v(x,0)=g(x), \quad x\in\mathbb{R} \qquad w(x,0)=0, \quad x\in\mathbb{R}$$

Η $u=v+w$ είναι λύση του (1) γιατί:
$$u_t + cu_x = v_t + cv_x + w_t + cw_x = 0 + f(x,t) = f(x,t)$$
και $u(x,0)=v(x,0)+w(x,0)=g(x)+0=g(x)$

Η λύση (μοναδική) της (2) είναι η $v(x,t)=g(x-ct)$

Δευτέρα 14/10/19
Μάθημα 4º

$$u_t + c u_x = f(x,t), \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$$
$$u(x,0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R} \qquad (1)$$

$$v_t + c v_x = 0 \qquad (2) \qquad\qquad w_t + c w_x = f(x,t) \qquad (3)$$
$$v(x,0) = g(x) \qquad\qquad\qquad w(x,0) = 0$$

$v(x,t) = g(x-ct)$

Η $v + w$ είναι λύση της (1)

Λύση της 3: Χαρακτηριστικές

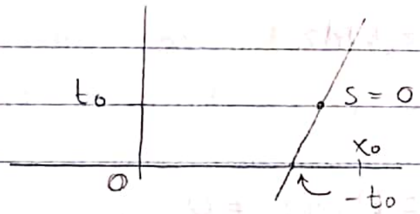
Έστω $(x(s), t(s), z(s))$

$z(s) = w(x(s), t(s))$

$x'(s) = c \Rightarrow x(s) = cs + x_0, \quad t_0 > 0$

$t'(s) = 1 \quad\quad t(s) = s + t_0$

$z'(s) = w_x \cdot x'(s) + w_t \cdot t'(s) = c w_t + w_t = f(x(s), t(s))$
$= f(cs + x_0, s + t_0)$



$$\int_{-t_0}^{0} z'(s)\,ds = \underbrace{\int_{-t_0}^{0} f(cs + x_0, s + t_0)\,ds}_{(*)} \Rightarrow w(x_0, t_0) = z(-t_0) + (*)$$

$z(-t_0) = w(x_0 - t_0 c, 0) = 0$

$$\Rightarrow w(x_0, t_0) = \int_{-t_0}^{0} f(cs + x_0, s + t_0)\,ds$$

$r = s + t_0$ (αλλαγή μεταβλητής)

$$\Rightarrow w(x_0, t_0) = \int_{0}^{t_0} f(c(r - t_0) + x_0, r)\,dr$$

Λύση του ③ :

$$w(x,t) = \int_0^t f(x-c(t-s),s)\,ds$$

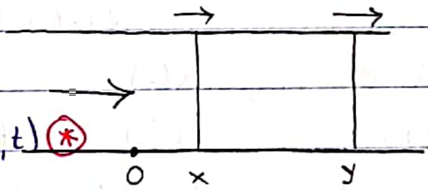
Άρα, λύση της ① :

$$u(x,t) = g(x-ct) + \int_0^t f(x-c(t-s),s)\,ds$$

Προέλευση της εξίσωσης:

Έστω νερό που διατρέχει οριζόντιο αγωγό διατομής 1 με ταχύτητα c προς τα δεξιά. Ρίχνουμε χρωματισμένο υγρό στον αγωγό. Έστω $u(x,t)$ η συγκέντρωση του υγρού στο x στο χρόνο t.

Για $x<y$ έχουμε:



$$\frac{d}{dt}\int_x^y u(z,t)\,dz = c\cdot u(x,t) - c\cdot u(y,t) \quad (*)$$

$$= -c\int_x^y u_x(z,t)\,dz$$

$$\Rightarrow \int_x^y \left(u_t(z,t) + c\cdot u_x(z,t)\right)dz = 0$$

$$\Rightarrow u_t(x,t) + c\cdot u_x(x,t) = 0$$

Εναλλακτικά

Αν $M(t) = \int_x^y u(z,t)\,dz$

Για $t_1 < t_2$:

$$M(t_2) = M(t_1) + c\int_{t_1}^{t_2} u(x,t)\,dt - c\int_{t_1}^{t_2} u(y,t)\,dt$$

Παραγωγίζουμε ως προς t_2 και παίρνουμε:
$M'(t_2) = c\cdot u(x,t_2) - c\cdot u(x,t_2)$
και προκύπτει δηλαδή η σχέση ⊛

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να λυθεί η $\begin{cases} u_t + c u_x + \beta u = f(x,t), & (x,t)\in \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0) = g(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$
όπου $c\neq 0$, $\beta\in\mathbb{R}$, $g\in C^1(\mathbb{R})$

Λύση (δουλεύουμε με χαρακτηριστικές)
Έστω $(x(s), t(s), z(s))$ χαρακτηριστική που διέρχεται από το $(x_0, t_0)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$ $\quad z(s) = u(x(s), t(s))$
$x'(s) = c \Rightarrow x(s) = cs + x_0$
$t'(s) = 1 \Rightarrow t(s) = s + t_0$
$z'(s) + \beta z(s) = f(x(s), t(s)) \Rightarrow z'(s) + \beta z(s) = f(cs + x_0, s + t_0)$

$\Rightarrow \left(e^{\beta\cdot s} z(s)\right)' = e^{\beta\cdot s} f(sc + x_0, s + t_0)$
ολοκληρώνουμε από $-t_0$ έως 0 και προκύπτει:
$\Rightarrow e^0\cdot z(0) - e^{-\beta\cdot t_0} z(-t_0) = \int_{-t_0}^{0} e^{\beta\cdot s} f(cs + x_0, s + t_0)\,ds$

$r = s + t_0$
$u(x_0,t_0) = e^{-\beta\cdot t_0} u(x_0 - ct_0, 0) + \int_0^{t_0} e^{\beta(r-t_0)} f(x_0 + c(r - t_0), r)\,dr$

$u(x_0,t_0) = e^{-\beta t_0} g(x_0 - ct_0) + \int_0^{t_0} e^{-\beta(t_0-s)} f(x_0 - c(t_0 - s), s)\,ds$

Λύση είναι η:
$u(x,t) = e^{-\beta t} g(x-ct) + \int_0^{t} e^{-\beta(t-s)} f(x - c(t-s), s)\,ds$
↳ Περιέχει και την ομογενή και την μη-ομογενή

2) Έστω το πρόβλημα :
$$\begin{cases} u_t + c u_x = 0 & (x,t)\in(0,\infty)\times(0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & x \geq 0 \\ u(0,t) = g(t) & t \geq 0 \end{cases}$$

Με $f,g \in C^1(\mathbb{R})$ $\quad f(0) = g(0)$, $c > 0$

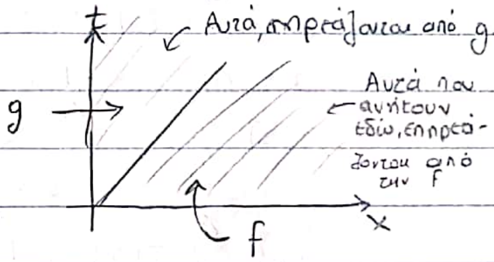
ⓐ Για ποιες f,g έχουμε κλασική λύση; Ποια είναι αυτή;

ⓑ Ποια χωρία επηρεάζονται από τις f,g ;

<u>Λύση</u>: (Χαρακτηριστικές)

$$\left.\begin{aligned} x'(s) = c &\Rightarrow x(s) = cs + x_0 \\ t'(s) = 1 &\Rightarrow t(s) = s + t_0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x - x_0 &= c(t - t_0) \\ t - t_0 &= \tfrac{1}{c}(x - x_0) \end{aligned}$$

$$z'(s) = 0 \Rightarrow z(s) = A \ , \ \forall s \in \mathbb{R}$$



Η χαρακτηριστική από το (x_0, t_0) συναντά τον άξονα x για $s = -t_0$, στο σημείο $(x_0 - ct_0, 0)$

– Αν $x_0 - ct_0 \geq 0$ τότε:

$z(0) = z(-t_0) \Rightarrow u(x_0, t_0) = u(x_0 - ct_0, 0) = f(x_0 - ct_0)$

– Αν $x_0 - ct_0 < 0$ τότε:

$z(0) = z\left(-\frac{x_0}{c}\right) \Rightarrow$

$s + t_0$

Θέλω : $x_0 + cs = 0$

$\Rightarrow s = -\frac{x_0}{c}$

$$u(x_0, t_0) = u\left(x_0 + c\left(-\frac{x_0}{c}\right), t_0 - \frac{x_0}{c}\right)$$

$$= u\left(0, t_0 - \frac{x_0}{c}\right) = g\left(t_0 - \frac{x_0}{c}\right)$$

Άρα, αν υπάρχει κλασική λύση, πρέπει:

$$u(x,t) = \begin{cases} f(x - ct) & , \text{αν } x \geq ct \\ g\left(t - \frac{x}{c}\right) & , \text{αν } x \leq ct, \quad x,t \geq 0 \end{cases}$$

Θα χρειαστούμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση: Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής στο a, παραγωγίσιμη στο (a,b) και $\lim_{x \to a} f'(x) = \ell \in \mathbb{R}$, τότε υπάρχει $f'(a)$ και $f'(a) = \ell$.

Η u είναι C^1 στο $U \setminus \{(x,t) : x = ct\}$. Είναι συνεχής στο $\bar{U}$ γιατί $f(0) = g(0)$

(μένει να δούμε τη διαφορισιμότητα)

Η συνθήκη για να είναι η u C^1 στο U είναι:

$g'(0) + c\, f'(0) = 0$ (ας δούμε γιατί:)

Για $x < ct$, $u_x(x,t) = g'\left(t - \frac{x}{c}\right)\left(-\frac{1}{c}\right)$

Για $x \geq ct$, $u_x(x,t) = f'(x - ct)$

Αν πάρουμε x_0, t_0 με $x_0 = ct_0$, πρέπει:

$u_x(x_0^-, t_0) = u_x(x_0^+, t_0)$

$\Rightarrow g'(0)\left(-\frac{1}{c}\right) = f'(0) \Rightarrow c \cdot f'(0) + g'(0) = 0$

Όμοια και για την u_t.

Ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι η λύση μας κλασική:

- $f(0) = g(0)$
- $f'(0) \cdot c + g'(0) = 0$

Διόρθωση από προηγούμενο μάθημα (άσκηση 7-Strauss)

↓

Είχαμε βρει:

$$u(x,y) = \begin{cases} f\sqrt{y^2 - x^2} & |y| \geq |x| \\ g\left(\sqrt{x^2 - y^2}\right) & |x| > |y| \end{cases}$$

Συνθήκη; ώστε $u \in C^1(\mathbb{R}^2)$:

$g(0) = f(0) = 1$

$g'(0) = 0$

$g''(0) = 2$

(Πρέπει η g "να ακολουθεί" την f μέχρι τη 2η παράγωγο)

ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ

Αυτή είναι η $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ ① $(x,t)\in\mathbb{R}^2$, $c>0$

Πρόταση: Η γενική της λύση είναι η:
$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ ② , όπου $f,g \in C^2(\mathbb{R})$

Απόδειξη

• Ισχυρισμός 1:
Κάθε u της μορφής ② είναι λύση.

$$\left.\begin{array}{l} u_{tt} = c^2 f''(x+ct) + c^2 g''(x-ct) \\ u_{xx} = f''(x+ct) + g''(x-ct) \end{array}\right\} \Rightarrow u_{tt} = c^2 u_{xx}$$

και βέβαια $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$

• Ισχυρισμός 2:
Κάθε λύση γράφεται στη μορφή ②
Η ① γράφεται $0 = (\partial_t^2 - c^2\partial_x^2)u = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u$

1ος τρόπος: Έστω $v = (\partial_t + c\partial_x)u = u_t + cu_x$
τότε η ① γίνεται $(\partial_t - c\partial_x)v = 0$
(αυτή είναι εξίσωση μεταφοράς, για την οποία ξέραμε τη γενική λύση)
Αυτή έχει λύση (γενική): $v(x,t) = h(x+ct)$, $h \in C^1(\mathbb{R})$
Άρα, $u_t + cu_x = h(x+ct)$ (μη-ομογενής εξ. μεταφοράς)

Τετάρτη 16/10/19
Μάθημα 5ο

$u_{tt} - c^2 u_{xx}$

$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u = 0$

$v = u_t + c u_x$

$v_t - c v_x = 0 \Rightarrow v(x,t) = h(x+ct)$ με $h \in C^1(\mathbb{R})$

Άρα, $u_t + c u_x = h(x+ct)$

$$\left[\begin{rcases} u_t + c u_x = f(x,t) \\ u(x,0) = g(x) \end{rcases} \Rightarrow u(x,t) = g(x-ct) + \int_0^t f(x - c(t-s), s)\,ds \right]$$

$$\Rightarrow u(x,t) = a(x-ct) + \int_0^t v(x - c(t-s), s)\,ds$$

Για κάποιο $a \in C^1(\mathbb{R})$

$a(x) = a(x,0)$

$$= a(x-ct) + \int_0^t h(\underbrace{x - c(t-s) + cs}_{x-ct+2cs})\,ds$$

$r = x - ct + 2cs$

$$= a(x-ct) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} h(r)\,dr$$

Είναι C^2 γιατί $h \in C^1$

$$= a(x-ct) - \frac{1}{2c}\int_0^{x-ct} h(r)\,dr + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct} h(r)\,dr$$

$$= f(x-ct) + g(x+ct)$$

• Η a είναι C^2 γιατί $a(x-c) = u(x,1)$

2ος τρόπος: Με αλλαγή συντεταγμένων

Θέτουμε $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$ και για οποιανδήποτε $A(x,t)$

Θεωρούμε την $\tilde{A}(\xi,\eta) = A(x,t) = A\left(\frac{\xi+\eta}{2}, \frac{\xi-\eta}{2}\right)$

$\hookrightarrow \tilde{A}(x+ct, x-ct)$

Τότε $\partial_x A(x,t) = \partial_\xi \tilde{A}(\xi,\eta) - c\,\partial_\eta \tilde{A}(\xi,\eta)$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \partial_x = \partial_\xi + \partial_\eta \\ \partial_t = c\partial_\xi - c\partial_\eta \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \partial_t - c\partial_x = -2c\,\partial_\eta \\ \partial_t + c\partial_x = 2c\,\partial_\xi \end{array}$$

Το αριστερό μέλος δρα σε μια $A(x,t)$
Το δεξί στην $\tilde{A}(\xi,\eta)$ και μετά θέτουμε:
$\xi = x+ct$
$\eta = x-ct$

Άρα $0 = (\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)u$
$= -4c^2\partial_\eta\partial_\xi \tilde{u}(\xi,\eta)$

$\Rightarrow \partial_\eta\partial_\xi \tilde{u}(\xi,\eta) = 0 \Rightarrow \partial_\xi \tilde{u}(\xi,\eta) = a(\xi),\ a \in C^1(\mathbb{R})$

ολοκληρ.

$$\Rightarrow \tilde{u}(\xi,\eta) - \tilde{u}(0,\eta) = \int_0^\xi a(r)dr \Rightarrow \tilde{u}(\xi,\eta) = \underbrace{\underbrace{\tilde{u}(0,\eta)}_{=g}}_{\tilde{u}\in C^2} + \underbrace{\int_0^\xi a(r)dr}_{=f,\ f\in C^2,\ \text{γιατί } a\in C^1}$$

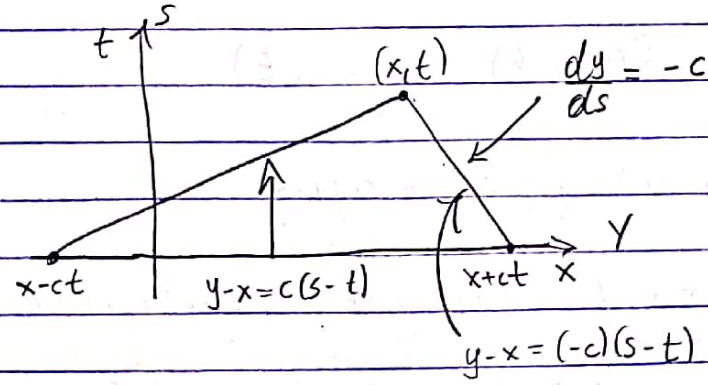
$$\Rightarrow u(x,t) = \tilde{u}(\xi,\eta) = f(x+ct) + g(x-ct) \qquad f(\xi)+g(\eta)$$

Επειδή $f+g=\varphi$ πρέπει $A+B=0$
Άρα, $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct)+\varphi(x-ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{0}\psi(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^{x+ct}\psi(s)ds$$

$$= \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)ds$$

Τύπος d'Alembert



Περιοχή εξάρτησης ενός (x,t)

Είναι το διάστημα $I_{x,t} = [x-ct, x+ct]$

Περιοχή επιρροής ενός $(x^*,0)$

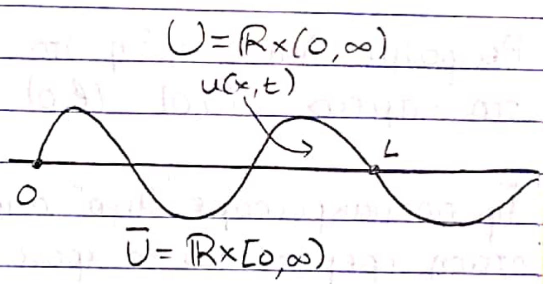
Είναι το χωρίο:

$$D_{x^*} = \left\{ (x,t) : x^* - ct \leq x \leq x^* + ct \right\}$$
$$t \geq 0$$

Δηλαδή, όλα τα (x,t) ώστε $x^* \in I_{x,t}$, οι τιμές των φ, ψ στο x^* επηρεάζουν την $u(x,t)$ μόνο για $(x,t) \in D_{x^*}$

Το πρόβλημα αρχικών τιμών (ΠΑΤ)

$$\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{στο } \mathbb{R}\times(0,\infty) \\ &u(x,0) = \varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ &u_t(x,0) = \psi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned} \qquad (1)$$



Πρόταση: Έστω ότι $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Τότε υπάρχει ακριβώς μια λύση του (1) και δίνεται από τον τύπο:

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds \qquad (2)$$

<u>Απόδειξη:</u> Η (2) είναι λύση γιατί είναι της μορφής $f(x+ct) + g(x-ct)$ με $f,g \in C^2(\mathbb{R})$ και

$$u(x,0) = \frac{1}{2}\left(\varphi(x) + \varphi(x)\right) = \varphi(x)$$

$$u_t(x,0) = \frac{1}{2}\left(-c\varphi(x) + c\varphi(x)\right) + \frac{1}{2c}\left(c\psi(x) + c\psi(x)\right) = \psi(x)$$

Έστω u μια άλλη λύση. Τότε υπάρχουν $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ ώστε:

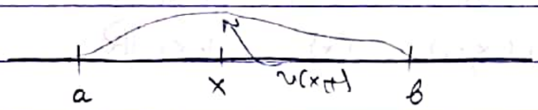
$$\left.\begin{aligned} u(x,t) &= f(x+ct) + g(x-ct) \\ \text{τότε} \quad u_t(x,t) &= c f'(x+ct) - c g'(x-ct) \end{aligned}\right\} \overset{t=0}{\Longrightarrow} \left.\begin{aligned} f(x) + g(x) &= \varphi(x) \\ f'(x) + g'(x) &= \frac{1}{c}\psi(x) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} f' + g' &= \varphi' \\ f' - g' &= \frac{1}{c}\psi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} f' &= \frac{1}{2}\left(\varphi' + \frac{1}{c}\psi\right) \\ g' &= \frac{1}{2}\left(\varphi' - \frac{1}{c}\psi\right) \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{ολοκληρ.}} \begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\,ds + A \\ g(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\,ds + B \end{aligned}$$

Η εξίσωση κύματος στην ταλάντωση χορδής

Θεωρούμε λεπτή χορδή στο $\mathbb{R}^2$ με τα άκρα σταθεροποιημένα στα σημεία $(a,0)$, $(b,0)$ τεντωμένα.

Την απομακρύνουμε "λίγο" από την κατάσταση ηρεμίας και το χρόνο $t=0$ την αφήνουμε ελεύθερη.



Έστω $u(x,t)$ = η τεταγμένη του σημείου της χορδής με τετμημένη x του χρόνου t.

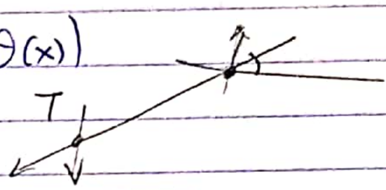
Υποθέτουμε ότι η χορδή έχει πυκνότητα ρ (μάζα ανά μονάδα μήκους) και τάση T.

Πρόταση: Η u ικανοποιεί την $u_{tt} = \dfrac{T}{\rho} u_{xx}$ $\forall t>0$, $\forall x \in (a,b)$ και τις $u(a,t) = u(b,t) = 0$

Απόδειξη: Έστω $x \in (a,b)$ κοιτάμε το τμήμα της χορδής στο $[x, x+\Delta x]$ και έστω $\theta(x)$ η γωνία που σχηματίζει η χορδή με την οριζόντια διεύθυνση στο x το χρόνο t.
Τότε $\tan\theta(x) = u_x(x,t)$

Δύναμη που ασκείται στο τμήμα $[x, x+\Delta x]$ της χορδής κατά μήκος του κατακόρυφου άξονα

$$T\sin\theta(x+\Delta x) - T\sin\theta(x) \simeq T(\tan\theta(x+\Delta x) - \tan\theta(x))$$



$$= T(u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)) \simeq T u_{xx}(x,t)\Delta x$$

Θέση: u
ταχύτητα: u_t
επιτάχυνση: u_{tt}

Η μάζα αυτού του τμήματος είναι $\rho\Delta x$

$$F = m\cdot\gamma \Rightarrow T u_{xx}(x,t)\Delta x = \rho\Delta x\, u_{tt}(x,t)$$

$$\Rightarrow u_{tt} = \frac{T}{\rho} u_{xx}$$

Ενέργεια της χορδής

• Κινητική: Το τμήμα $[x, x+\Delta x]$ έχει κινητική ενέργεια

$$\frac{1}{2}\rho\Delta x\, u_t^2(x,t)$$

Συνολική κινητική ενέργεια $= \frac{1}{2}\rho\int_a^b u_t^2(x,t)\,dx$

επειδή αλλάξαμε το μήκος της

• Δυναμική: Στο $[x, x+\Delta x]$ το μήκος της χορδής αυξήθηκε κατά $\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} - \Delta x = \Delta x\left(\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} - 1\right)$

$$= \Delta x\left(\sqrt{1+u_x^2(x,t)} - 1\right) \qquad \Big| \; \sqrt{1+x^2} \simeq 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$\simeq \Delta x \frac{1}{2} u_x^2(x,t)$$

Το έργο που προσφέρθηκε γι' αυτήν την αύξηση είναι

$$T\frac{1}{2}u_x^2(x,t)\Delta x$$

Άρα, Δυναμική ενέργεια $= T\frac{1}{2}\int_a^b u_x^2(x,t)\,dx$

Δευτέρα 21/10/19
Μαθημα 6ο

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (1)$$

$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$ γενική λύση

Η (1) με αρχικές συνθήκες $u(x,0) = \varphi(x)$, $u_t(x,0) = \psi(x)$ έχει λύση:
Για τις φ, ψ: $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(x-ct) + \varphi(x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Τι σημαίνει;
ασυνέχεια σε πεπερασμ. πλήθος και πλευρικά όρια στα σημεία αυτά.

Αν οι φ, ψ είναι απλώς τμηματικά συνεχείς, τότε ο τύπος D'Alebert έχει νόημα και δίνει "ασθενή λύση" της $u_{tt} = c^2 u_{xx}$

• Αν $\iint_{\mathbb{R}^2} (u_{tt} - c^2 u_{xx})\, s(x,t)\,dx\,dt = 0$, $s \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ τότε $\iint_{\mathbb{R}^2} u\,(s_{tt} - c^2 s_{xx})\,dx\,dt = 0$

Κάναμε ολοκλήρωση κατά μέρη

ΑΣΚΗΣΗ

Αν φ, ψ περιττές συναρτήσεις, τότε και η $u(x,t)$ είναι περιττή ως προς x $\forall t \in \mathbb{R}$

Λύση: 1ος τρόπος

Έστω $t \in \mathbb{R}$:

$$u(-x,t) = \frac{1}{2}\Big(\varphi(-x-ct) + \varphi(-x+ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{-x-ct}^{-x+ct} \psi(s)\,ds$$

$s=-y$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\Big) + \frac{1}{2c}\int_{x+ct}^{x-ct} \psi(-y)\,dy$$

$$= -\frac{1}{2}\Big(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)\Big) - \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds = -u(x,t)$$

* Αν οι ψ, φ είναι άρτιες τότε $u(x,t)$ είναι άρτια *

2ος τρόπος

Θέτουμε $a:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ με $a(x,t) = u(x,t) + u(-x,t)$

Η a ικανοποιεί την $a_{tt}(x,t) = u_{tt}(x,t) + u_{tt}(-x,t)$

και άρα $a_{tt}(x,t) = c^2\left(u_{xx}(x,t) + u_{xx}(-x,t)\right) = c^2 a_{xx}(x,t)$

$a(x,0) = \varphi(x) + \varphi(-x) = 0$ (αφού φ περιττή)

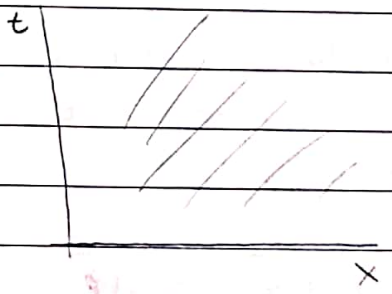
$a_t(x,0) = u_t(x,0) + u_t(-x,0) = \psi(x) + \psi(-x) = 0$ (αφού ψ περιττή)

Επειδή η κυματική εξίσωση με δεδομένα $u(x,0)$, $u_t(x,0)$ έχει μοναδική λύση, έπεται ότι $a \equiv 0$

Άρα, $u(-x,t) = -u(x,t)$ $\forall x,t \in \mathbb{R}$

(Κυματική εξίσωση στην ημιευθεία - Strauss §3.2)

Η ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΤΗΝ ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ



Έστω $\Omega = (0,\infty) \times (0,\infty)$

Ζητάμε $v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$

ώστε: $v_{tt} = c^2 u_{xx}$ $\forall (x,t) \in \Omega$

$v(x,0) = \varphi(x)$ $\forall x \geq 0$

$v_t(x,0) = \psi(x)$ $\forall x \geq 0$

$v(0,t) = 0$ $\forall t \geq 0$

Υποθέτουμε ότι $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$, $\varphi(0) = \psi(0) = 0$, $\varphi''(0) = 0$

(Η $u(0,t) = 0$ μας "δυσκολεύει" να βρούμε τη λύση. Για να ικανοποιείται αυτή η συνθήκη σκεφτόμαστε να επεκτείνουμε τη u σε περιττή, καθώς μία συνάρτηση f είναι σίγουρα 0 στο 0 αν είναι περιττή)

Επεκτείνουμε τις φ, ψ με περιττό τρόπο.

Δηλαδή $\varphi_{\pi\varepsilon\rho.}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0 \end{cases}$ και

Scanned by CamScanner

$$\psi_{\pi\varepsilon\rho.}(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x<0 \end{cases}$$

Η $\varphi_{\pi\varepsilon\rho.}$ είναι $C^2(\mathbb{R})$

Προφανώς η $\varphi_{\pi\varepsilon\rho.} \in C^2(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Για το 0 η $\varphi_{\pi\varepsilon\rho.}$ είναι συνεχής γιατί $\varphi_{\pi\varepsilon\rho.}(0)=0$

$$\varphi'_{\pi\varepsilon\rho.} = \begin{cases} \varphi'(x), & x \geq 0 \\ \varphi'(-x), & x<0 \end{cases} = \underset{\text{δεξιά παραγ.}}{\varphi'_{\pi\varepsilon\rho.}(0^+)} = \underset{\text{αριστ. παράγωγος}}{\varphi'_{\pi\varepsilon\rho.}(0^-)} = \varphi'(0)$$

$\Rightarrow \varphi'_{\pi\varepsilon\rho}(0)$ υπάρχει και ισούται με $\lim_{x\to 0} \varphi'_{\pi\varepsilon\rho}(x) \Rightarrow \varphi_{\pi\varepsilon\rho.} \in C^1(\mathbb{R})$

$$\varphi''_{\pi\varepsilon\rho.} = \begin{cases} \varphi''(x), & x \geq 0 & = \varphi''_{\pi\varepsilon\rho.}(0^+) = \varphi''(0) = 0 \\ -\varphi''(-x), & x<0 & = \varphi''_{\pi\varepsilon\rho.}(0^-) = -\varphi''(0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \varphi''_{\pi\varepsilon\rho}(0)$ υπάρχει και ισούται με $\lim_{x\to 0} \varphi''_{\pi\varepsilon\rho}(x) \Rightarrow \varphi_{\pi\varepsilon\rho.} \in C^2(\mathbb{R}^2)$

Η $\psi_{\pi\varepsilon\rho.} \in C^1(\mathbb{R})$. Σίγουρα $\psi_{\pi\varepsilon\rho.} \in C(\mathbb{R})$ γιατί $\psi(0)=0$
Επιπλέον $\psi_{\pi\varepsilon\rho} \in C^1(\mathbb{R})$ όμοια όπως για την $\varphi_{\pi\varepsilon\rho}$

Έστω $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ η λύση του προβλήματος

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$
$$u(x,0) = \varphi_{\pi\varepsilon\rho.}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$u_t(x,0) = \psi_{\pi\varepsilon\rho.}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Έστω $v := u|_{\bar{\Omega}}$ $\quad \Omega = (0,\infty) \times (0,\infty)$
Η v ικανοποιεί την $v_{tt} = c^2 v_{xx}$ στο Ω
$v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, ενώ για $x \geq 0$ έχουμε:
$v(x,0) = u(x,0) = \varphi_{\pi\varepsilon\rho}(x) = \varphi(x)$
$v_t(x,0) = u_t(x,0) = \psi_{\pi\varepsilon\rho.}(x) = \psi(x)$

Άρα, από την προηγούμενη η $u(x,t)$ είναι περιττή ως προς x. Άρα, $u(0,t)=0$. Άρα, $v(0,t)=0$ $\forall t \geq 0$
Ο τύπος για την v: $v(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_{\pi\varepsilon\rho.}(x-ct) + \varphi_{\pi\varepsilon\rho.}(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds$ (*)

H/W Άσκηση 2.26 (Αλικάκος)

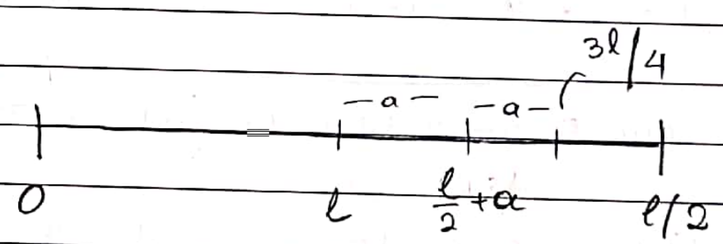
Ίδιο πρόβλημα αλλά αντί για $v(0,t)=0$ έχουμε την $v_x(0,t)=0$

(Άρτια επέκταση)

ΑΣΚΗΣΗ 3 (§2.1 Strauss)

Κεφαλή σφυριού έχει διάμετρο $2a$ και χτυπά το μέσο της χορδής ενός πιάνου τάσης T, πυκνότητας ρ. Ένας ψύλλος κάθεται στο $3\ell/4$ $(a < \ell/4)$

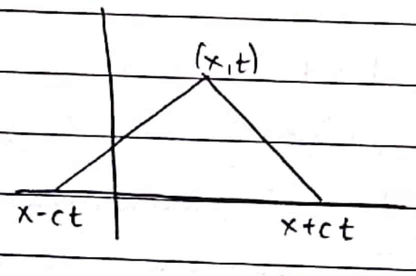
Πόσο χρόνο χρειάζεται για να φτάσει η διαταραχή στον ψύλλο;

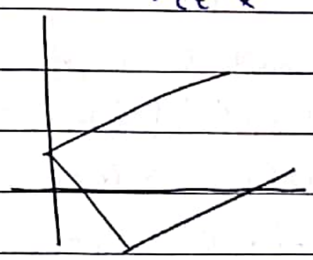


ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΗΝ ΚΥΜΑΤΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΣΤΗΝ ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

- Αν $x-ct \geq 0$ τότε στον τύπο (*), όπου $\varphi_{περ.}, \psi_{περ.}$ βάζουμε φ, ψ
- Αν $x-ct<0$ τότε

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\Big(\varphi(x+ct)-\varphi(ct-x)\Big)+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{x+ct}\psi(s)\,ds$$





Περιοχή εξάρτησης

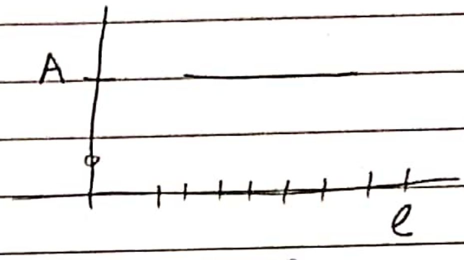
Περιοχή επιρροής

Λύση άσκησης 3

Η μετατόπιση $u(x,t)$ του σημείου x του χρόνου t, ικανοποιεί την $u_{tt} = c^2 u_{xx}$, όπου $c = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$

$u(x,0) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$u_t(x,0) = A \cdot \mathbb{1}_{|x - \frac{\ell}{2}| \leq a} = \psi(x)$



Η $u(x,t) = \dfrac{1}{2c} \displaystyle\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s)\,ds \quad (1)$

Για $x_0 = \frac{3\ell}{4}$ ποιο είναι το $\inf\{t>0 : u(x_0,t) \neq 0\}$

Η (1) μπορεί να γραφτεί:

$u(x,t) = \dfrac{A}{2c} \displaystyle\int_{x_0-ct}^{x_0+ct} \mathbb{1}_{(\frac{\ell}{2}-a, \frac{\ell}{2}+a)}(s)\,ds$ Αυτό είναι θετικό

αν και μόνο αν: $x_0 - ct < \frac{\ell}{2} + a \Leftrightarrow ct > -a + \frac{\ell}{4} \Leftrightarrow$

$t > \frac{1}{c}\left(\frac{\ell}{4} - a\right)$

→ Ελάχιστος χρόνος

ΑΣΚΗΣΗ 4 (§2.2 Strauss) (ο Strauss την έχει για $c=1$)

Μια $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ικανοποιεί την $u_{tt} = c^2 u_{xx} \Longleftrightarrow$

$u(x+ch, t+k) + u(x-ch, t-k) = u(x+ck, t+h) + u(x-ck, t-h)$

$\forall x, t, h, k \in \mathbb{R}$ (1)

Λύση: "$\Rightarrow$" Υπάρχουν $f, g \in C^2(\mathbb{R})$ ώστε:

$u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$

Αντικαθιστούμε στην (1) και βλέπουμε ότι ισχύει

"$\Leftarrow$" Έστω $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ σταθερό. Από θεώρημα Taylor

$$u(x+h, t+k) = u(x,t) + u_x(x,t)h + u_t(x,t)k + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t)h^2 + \frac{1}{2}u_{tt}(x,t)k^2 + u_{xt}(x,t)hk + R(h,k)$$

με $\displaystyle\lim_{(h,k)\to 0} \frac{R(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$

Τετάρτη 23/10/19
Μάθημα 7ο

Συνέχεια άσκησης από προηγούμενο μάθημα.

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \Leftrightarrow u(x+ch, t+k) + u(x-ch, t-k) = u(x+ck, t+h) + u(x-ck, t-h)$$

"$\Leftarrow$" Θεώρημα Taylor:

$$u(x+h, t+k) = u(x,t) + u_x(x,t)\cdot h + u_t(x,t)k + \frac{1}{2}u_{xx}(x,t)h^2 + \frac{1}{2}u_{tt}(x,t)k^2 + u_{xt}\, hk + R(h,k)$$

$$\frac{R(h,k)}{\|(h,k)\|^2} = \frac{R(h,k)}{h^2+k^2} \xrightarrow{(h,k)\to 0} 0$$

Μετά από πράξεις και απαλοιφές:

$$(c^2 u_{xx} - u_{tt})(h^2-k^2) = -R(ch,k) - R(-ch,-k) + R(ck,h) + R(-ck,-h)$$

Θέτουμε $k=0$

$$c^2 u_{xx} - u_{tt} = \frac{1}{h^2}\left(-R(ch,0) - R(0,h) - R(0,-h)\right) \xrightarrow{h\to 0} 0$$

Ορισμός: Έστω $I \subseteq \mathbb{R}$ διάστημα. Μια $f: I \to \mathbb{R}$ λέγεται τμηματικά συνεχής αν $\forall M>0$, η $f|_{I\cap[-M,M]}$ είναι ασυνεχής σε πεπερασμένο πλήθος σημείων και στα σημεία ασυνέχειας, τα πλευρικά όρια υπάρχουν και είναι πεπερασμένα (το ίδιο και στα άκρα του I αν αυτά είναι σημεία του $\mathbb{R}$)

→ Βιβλίο Strauss στο παράρτημα

ΔΙΑΦΟΡΙΣΗ ΚΑΤΩ ΑΠΟ ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

(παράγωγος της $\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,dx$ ως προς t)

ΠΡΟΤΑΣΗ: Έστω $\Omega = \mathbb{R}\times(\gamma,\delta)$ και $f: \Omega \to \mathbb{R}$ ώστε:

(1) $\forall t\in(\gamma,\delta)$ η $f(\cdot,t)$ είναι μετρήσιμη (π.χ τμηματικά συνεχής)

(2) $\int_{\mathbb{R}} |f(x,t)|\,dx < \infty \quad \forall t\in(\gamma,\delta)$

(3) Η $\partial_t F(x,t)$ υπάρχει $\forall (x,t) \in \Omega$

(4) $\int_{\mathbb{R}} \sup_{t \in (\gamma,\delta)} |\partial_t F(x,t)| \, dx < \infty$

Τότε η $I(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,dx$ είναι παραγωγίσιμη στο (γ,δ) και

$$I'(t) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t f(x,t)\,dx$$

Απόδειξη

Έστω $t \in (\gamma,\delta)$. Θέτουμε $h_0 = \boxed{(t-\gamma) \wedge (\delta - t)}$ $\min((t-\gamma),(\delta-t))$

$\gamma \quad t \quad \delta$

Για $h \neq 0$ με $|h| < h_0$ έχουμε:

$$\frac{1}{h}\left(I(t+h) - I(t)\right) = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\frac{1}{h}\left(f(x,t+h) - f(x,t)\right)}_{g_h(x)} dx = \int_{\mathbb{R}} g_h(x)\,dx$$

Έχουμε: • $\lim_{h \to 0} g_h(x) = \partial_t f(x,t)$

(από Θεώρημα μέσης τιμής)

• $|g_h(x)| \leq \sup_{s \in (\gamma,\delta)} |\partial_t f(x,s)| =: g(x) \quad \forall h \in (-h_0, h_0)$

και • $\int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx < \infty$

Από θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: $\lim_{h\to 0} \int_{\mathbb{R}} g_h(x)\,dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \lim_{h \to 0} g_h(x)\,dx$

$$= \int_{\mathbb{R}} \partial_t f(x,t)\,dx$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Προφανώς το θεώρημα ισχύει και για το ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x,t)\,dx$

(Εδώ αρκεί $\partial_t f$ συνεχής στο $[a,b] \times (\gamma,\delta)$ αντί της ιδιότητας (4)

Το βιβλίο ζητάει $\int_{\mathbb{R}} \partial_t f(x,s)\,dx$ συνεχής ως προς s αντί για (4))

(Δεν κάνει θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης στο βιβλίο)

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \int_a^t \partial_t f(x,s)\,ds\,dx + \int_{\mathbb{R}} f(x,a)\,dx$$

$$= \int_a^t \int_{\mathbb{R}} \partial_t f(x,s)\,dx\,ds + \int_{\mathbb{R}} f(x,a)\,dx$$

Παράδειγμα: Θα δείξουμε ότι $A = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

Απόδειξη: $I(t) = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} e^{-t^2(1+x^2)} dx$

$$I(0) = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} dx = \tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}$$

$$I(\infty) = 0$$

Εφαρμόζεται το παραπάνω θεώρημα και άρα έχουμε:

$$I'(t) = \int_0^\infty \frac{1}{1+x^2} e^{-t^2(1+x^2)} (-2t(1+x^2)) dx$$

$$= -2t e^{-t^2} \int_0^\infty e^{-x^2 t^2} dx \overset{xt=y}{=} -2t e^{-t^2} \int_0^\infty \frac{e^{-y^2}}{t} dy$$

$$= -2e^{-t^2} \cdot A$$

Δηλαδή $I'(t) = -2e^{-t^2} A$

Ολοκληρώνουμε τη σχέση αυτή και έχουμε:

$$I(\infty) - I(0) = -2A \int_0^\infty e^{-t^2} dt = -2A^2 \Rightarrow \frac{\pi}{4} = A^2 \Rightarrow A = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Κανόνας Leibniz:

Έστω $I \subset \mathbb{R}$ διάστημα και $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$ με $\gamma < \delta$.

$f: [\gamma, \delta] \times I \to \mathbb{R}$ και $a, \beta: I \to [\gamma, \delta]$ ώστε:

- $a, \beta \in C^1(I)$
- $f(-, t)$ συνεχής $\forall t$
- $\partial_t f(x,t)$ υπάρχει $\forall (x,t) \in [\gamma, \delta] \times I$
- $\int_\gamma^\delta \sup_{t \in I} |\partial_t f(x,t)| dx < \infty$

Τότε $$\frac{d}{dt} \underbrace{\int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t) dt}_{I(t)} = f(b(t), t) b'(t) - f(a(t), t) a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t f(x,t) dx$$

Απόδειξη

Εστω $H(u,v,t) = \int_u^v f(x,t)\,dx \qquad \partial_u H = -f(u,t)$

τότε $I(t) = H(a(t), b(t), t)$

$I'(t) = \partial_u H(\ \ )\,a'(t) + \partial_v H(\ \ )\,b'(t) + \partial_t H(a(t), b(t), t)$

$= -f(a(t),t)\,a'(t) + f(b(t),t)\,b'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} \partial_t f(x,t)\,dx$

Η ενέργεια στην εξίσωση κύματος

Έστω $u \in C^2(\mathbb{R}\times(0,\infty)) \cap C^1(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ που ικανοποιεί τις:

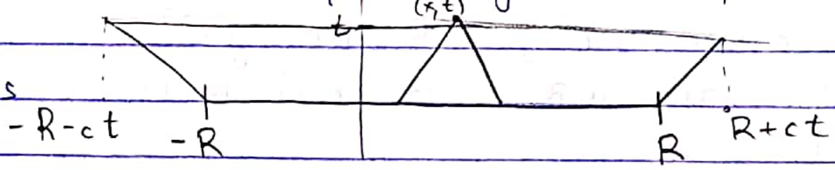
$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad \text{για } (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$
$$u_t(x,0) = \psi(x) \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$\varphi \in C^2(\mathbb{R})$, $\psi \in C^1(\mathbb{R})$

Υποθέτουμε ότι $\exists R>0$ ώστε $\varphi(x) = \psi(x) = 0$ $\forall x$ με $|x| \geq R$, $\forall t \geq 0$ ορίζουμε:

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\right) dx$$

(Το ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο γιατί $u_t(x,t) = u_x(x,t)$ για $|x| \geq R + ct$ και u_t, u_x συνεχείς)



ΠΡΟΤΑΣΗ: Η ενέργεια διατηρείται, δηλαδή $E(t) = E(0)$ $\forall t \geq 0$

Απόδειξη: Εστω $f(x,t) = \frac{1}{2}\left(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\right)$

Η f είναι συνεχής και $f(x,t) = 0$ για $|x| \geq R + ct$

Εύκολα βλέπουμε ότι $E(t)$ είναι συνεχής

$\partial_t f(x,t) = u_t u_{tt} + c^2 u_x u_{xt}$

Για δεδομένο $t_0 \geq 0$ παίρνουμε $\epsilon > 0$ ώστε $t_0 - \epsilon > 0$. Η $|\partial_t f|$ είναι φραγμένη στο $[-R-c(t_0+\epsilon), R+c(t_0+\epsilon)] \times [t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]$ και έστω M ένα φράγμα της.

Άρα, $\int_{\mathbb{R}} \sup_{t\in[t_0-\epsilon, t_0+\epsilon]} |\partial_t f(x,t)| dx \leq M \cdot 2(R+c(t_0+\epsilon)) < \infty$

Άρα, $E'(t) = \int_{\mathbb{R}} \partial_t f(x,t)\, dx = \int_{-R-ct}^{R+ct} \partial_t f(x,t)\, dx$

Στόχος είναι να κάνω την παράγωγο ως προς $x \xrightarrow{\text{να γίνει}}$ παράγωγος ως προς t.

$\partial_t f(x,t) = u_t\, c^2 u_{xx} + c^2 u_x u_{xt} = c^2 (u_x u_t)_x$

Οπότε, $E'(t) = c^2 \left[u_x u_t\right]_{-R-ct}^{R+ct} = 0$, γιατί:

$u_x = u_t = 0$ στα σημεία $(-R-ct, t)$, $(t, R+ct)$

* Η ενέργεια μας βοηθά να αποδεικνύουμε θεωρήματα ισότητας.

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω $\overset{f(x,t)}{f} : \mathbb{R}\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ ώστε f, f_x να είναι συνεχείς. Τότε το ΠΑΤ (πρόβλημα αρχικών τιμών):

$$u_t + c u_x = f(x,t), \quad (x,t)\in \mathbb{R}\times(0,\infty)$$
$$u(x,0) = g(x), \quad x\in\mathbb{R}$$

έχει μοναδική λύση την: $u(x,t) = \left(\int_0^t f(x-c(t-s), s)\, ds\right) + g(x-ct)$ (*)

$(g \in C^1(\mathbb{R}))$

<u>Λύση</u>: Η (*) είναι λύση γιατί:

- είναι συνεχής στο $\mathbb{R}\times[0,\infty)$
- $u(x,0) = g(x)$

$u_x = \underbrace{g'(x-ct)}_{\text{συνεχής}} + \underbrace{\int_0^t f_x(x-c(t-s), s)\, ds}_{\text{συνεχής γιατί } f \text{ συνεχής}} \Rightarrow u_x$ συνεχής

$u_t \overset{\text{κανόνας Leibniz}}{=} -c\, g'(x-ct) + f(x-c(t-t), t) + \int_0^t f_x(x-c(t-s), s)(-c)\, ds$

$$= -cg'(x-ct) + f(x,t) - c\int_0^t f_x(x-c(t-s),s)\,ds$$

Προσθέτω κατά μέλη και προκύπτει:

$$u_t + cu_x = f(x,t)$$

Scanned by CamScanner

Τετάρτη 30/10/19
Μάθημα 8ο

$u_t + c u_x = f(x,t)$ $\quad \Omega = \mathbb{R}\times(0,\infty)$

$u(x,0)=0$

$f, \partial_x f \in C(\bar{\Omega})$

$\Rightarrow u(x,t) = \int_0^t f(x-c(t-s),s)\,ds$

Η ΜΗ ΟΜΟΓΕΝΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗ ΚΥΜΑΤΟΣ

$\Omega = \mathbb{R}\times(0,\infty)$

Ζητάμε $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ ώστε:

$$\left.\begin{array}{lll} u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) & & (x,t)\in\Omega \\ u(x,0) = \varphi(x) & x\in\mathbb{R} & \\ u_t(x,0) = \psi(x) & x\in\mathbb{R} & \end{array}\right\} ①$$

όπου $\varphi \in C^2(\mathbb{R}), \psi\in C^1(\mathbb{R})$ $\quad f,\partial_x f \in C(\bar{\Omega})$

Πρόταση: Το ΠΑΤ ① έχει μοναδική λύση την

② $$u(x,t) = \underbrace{\frac{1}{2}\left[\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\,ds}_{ⓐ} + \underbrace{\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau}_{ⓑ}$$

Απόδειξη: Το ① έχει το πολύ μια λύση, γιατί αν u_1, u_2 είναι λύσεις τότε $u = u_1 - u_2$ ικανοποιεί τις:

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$

$u(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$

$u_t(x,0) = \dots = 0$

Αυτή έχει μοναδική λύση την $u=0$ (στον τύπο d'Alembert βάζουμε όπου $\varphi,\psi = 0$)

(Θέλουμε τώρα να δούμε πως προκύπτει ο τύπος)

Αρκεί να λύσουμε το ① όταν $\varphi=\psi=0$, γιατί αλλιώς λύνουμε τα:

$$\begin{cases} v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x,t) \\ v(x,0) = 0 \\ v_t(x,0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0 \\ w(x,0) = \varphi(x) \\ w_t(x,0) = \psi(x) \end{cases}$$

↳ Αυτό μας δίνει το ⓑ $\qquad$ ↳ Αυτό μας δίνει το ⓐ

$u = v + w$

Λυση με αναγωγή στην εξίσωση μεταφοράς:

$$(\partial_t - c\partial_x)(\partial_t + c\partial_x)\, u(x,t) = f(x,t)$$

Έστω $v = u_t + c u_x$ τότε:

$$v_t - c v_x = f(x,t)$$

$$v(x,0) = u_t(x,0) + c u_x(x,0) = 0$$

και έχουμε επιπλέον ότι $f, \partial_x f \in C(\bar{\Omega})$ άρα:

$$v(x,t) = \int_0^t f(x + c(t-s), s)\, ds \quad (*)$$

Άρα $u_t + c u_x = v(x,t)$ (Πρέπει εδώ να τσεκάρουμε ότι $v(x,t) \in C(\bar{\Omega})$ και $v_x(x,t) \in C(\bar{\Omega})$)

$u(x,0) = 0$

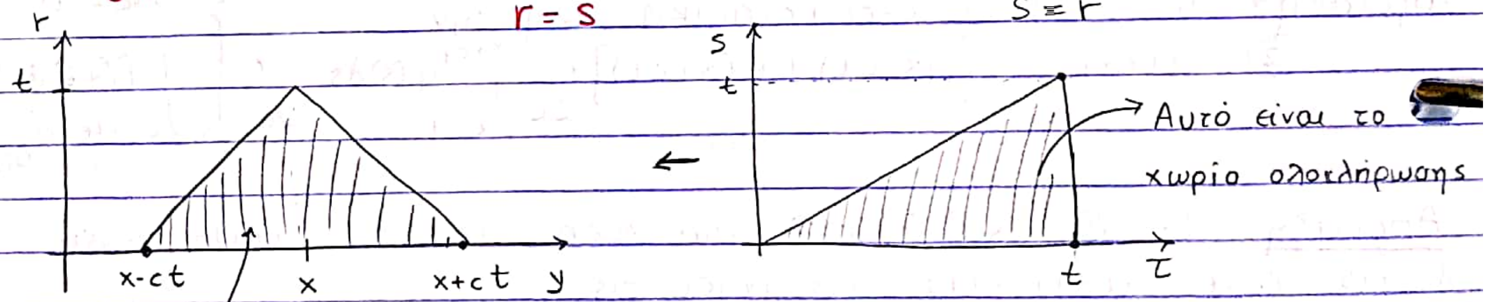
$$\Rightarrow u(x,t) = \int_0^t v(x - c(t-\tau), \tau)\, d\tau$$

Εφαρμόσαμε την $(*)$ για $x = x - c(t-\tau)$

$$\overset{(*)}{=} \int_0^t \int_0^\tau f(x - c(t-\tau) + c(\tau - s), s)\, ds\, d\tau \quad \odot$$

Αλλαγή μεταβλητών : $x - ct + 2c\tau - cs = y$ $\quad \tau = (y + cr - x + ct)\frac{1}{2c}$

$r = s$ $\quad s = r$



Τρίγωνο εξάρτησης για την εξίσωση κύματος

Βρίσκουμε την Ιακωβιανή για το διπλό ολοκλήρωμα

$$\left|\frac{\partial(\tau,s)}{\partial(y,r)}\right| = \left|\begin{vmatrix} 1/2c & 1/2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right| = \frac{1}{2c}$$

Οπότε η $\odot$ γίνεται:

$$u(x,t) = \int_0^t \int_{x-c(t-r)}^{x+c(t-r)} f(y,r)\frac{1}{2c}\, dy\, dr \quad (\text{Ειδική περίπτωση για } \varphi = \psi = 0)$$

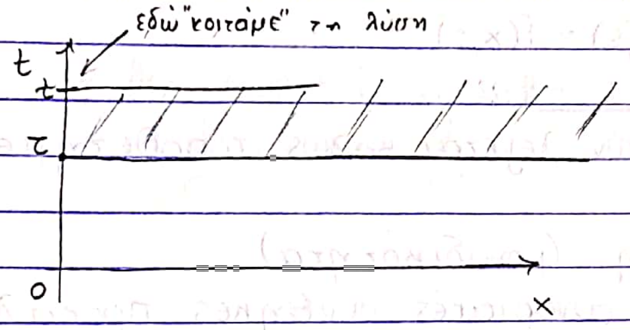
Η αρχή Duhamel

Στο ① υποθέτουμε ότι $\varphi = \psi = 0$

Έστω $t > 0$, δεδομένο

$\forall \tau \in [0,t]$ θεωρούμε το χωρίο $\Omega_\tau = \mathbb{R} \times (\tau, \infty)$ και Ω_τ το ΠΑΤ:

$$
\begin{aligned}
&W_{ss}(x,s) = c^2 W_{xx}(x,s) && (x,s) \in \Omega_\tau \\
&W(x,\tau) = 0 && \forall x \in \mathbb{R} \\
&W_s(x,\tau) = f(x,\tau) && \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}
$$



(Η αρχή του χρόνου είναι η χρονική στιγμή τ.)

Έστω $w(\tau; x, s)$ η λύση $\left((x,s) \in \overline{\Omega}_\tau\right)$

Τότε η u από την ② γράφεται:

$$u(x,t) = \int_0^t w(\tau; x, t)\, d\tau \quad ③$$

Πράγματι, η $w(\tau; x, t) = \dfrac{1}{2c} \displaystyle\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\, dy$

Ας δούμε γιατί η ③ λύνει το ① (Το γνωρίζω ότι είναι και απλοί τοεκαίρω)

$$u(x,0) = 0$$

$$u_t(x,t) = w(t; x, t) + \int_0^t w_t(\tau; x, t)\, d\tau = \int_0^t w_t(\tau; x, t)\, d\tau$$

$$u_t(x,0) = w(0; x, 0) = 0$$

(Άρα και οι δύο αρχικές συνθήκες ικανοποιούνται)

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= w_t(t; x, t) + \int_0^t w_{tt}(\tau; x, t)\, d\tau \\
&= f(x,t) + c^2 \int_0^t w_{xx}(\tau; x, t)\, d\tau \\
&= f(x,t) + c^2 u_{xx}
\end{aligned}
$$

Η αρχή Duhamel στην εξίσωση μεταφοράς

Είδαμε ότι: $u_t + cu_x = f(x,t)$

$u(x,0)=0$ $\quad f, \partial_x f \in C(\overline{O})$

τότε: $u(x,t) = \int_0^t \underbrace{f(x-c(t-s),s)}_{u(s;x,t)} ds$

Η $u(s;x,t)$ λύνει το: $u_t + cu_x = 0$ στο $\mathbb{R}\times(s,\infty)$

$u(x,s) = f(x,s)$

Ένα πρόβλημα συνοριακών τιμών λέγεται καλώς τοποθετημένο αν:
1) έχει λύση (ύπαρξη)
2) η λύση είναι μοναδική (μοναδικότητα)
3) μικρή μεταβολή στις συνοριακές συνθήκες προκαλεί μικρή μεταβολή στη λύση (ευστάθεια)

Το πρόβλημα αρχικών τιμών για τη μη ομογενή εξίσωση κύματος στο $\mathbb{R}$, είναι καλώς τοποθετημένο.

Ύπαρξη ✓
Μοναδικότητα ✓
Ευστάθεια ←

Για $h : \mathbb{R}\times[0,\infty) \to \mathbb{R}$ θέτουμε: $\|h\|_T = \sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ t\in[0,T]}} |h(x,t)|$

Για $k:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $\quad \|k\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |k(x)|$

Έστω $u^{(1)}, u^{(2)}$ λύσεις των: $u^{(i)}_{tt} - c^2 u^{(i)}_{xx} = f_i(x,t)$

$u^{(i)}(x,0) = \varphi_i(x)$, $x\in\mathbb{R}$

$u^{(i)}_t(x,0) = \psi_i(x)$, $x\in\mathbb{R}$

Τότε:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi_1(x-ct)+\varphi_1(x+ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi_1(y)\,dy + \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f_1(y,\tau)\,dy\,d\tau$$

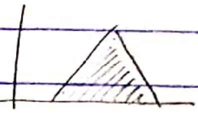
Αντίστοιχα για u_2.

Για $T>0$ δεδομένο:

$$\|u_1-u_2\|_T \le \frac{1}{2}\|\varphi_1-\varphi_2\| + \frac{1}{2}\|\varphi_1-\varphi_2\| + \frac{1}{2c}\cdot 2cT\,\|\psi_1-\psi_2\| +$$

$$+\frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}\|f_1-f_2\|_T\,dy\,d\tau$$

Εμβαδόν αυτού του τριγώνου



$$= \|\varphi_1-\varphi_2\| + T\|\psi_1-\psi_2\| + \frac{1}{2c}\|f_1-f_2\|_T\cdot\frac{1}{2}2cT\cdot T$$

$$= \underset{C^2}{\|\varphi_1-\varphi_2\|} + T\underset{C^1}{\|\psi_1-\psi_2\|} + \frac{T^2}{2}\|f_1-f_2\|_T$$

συνεχής και με 1η παράγωγο.

Τετάρτη 6/11/19
Μάθημα 9ο

Η μη ομογενής εξίσωση στην ημιευθεία

ΑΣΚΗΣΗ

$$\left.\begin{aligned} &u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t) \quad , \quad (x,t)\in \Omega = (0,\infty)\times(0,\infty) \\ &u(x,0) = \varphi(x) \quad , \quad x>0 \\ &u_t(x,0) = \psi(x) \quad , \quad x>0 \\ &u(0,t) = 0 \quad , \quad t>0 \end{aligned}\right\} (1)$$

όπου $\varphi \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$ και $\varphi(0)=\psi(0)=0$ και $\varphi''(0)=0$

$f, \partial_x f \in C([0,\infty)\times[0,\infty))$, $f(0,t)=0 \quad \forall t>0$

Να βρεθεί η u.

Λύση: Επεκτείνουμε τις $\varphi, \psi, f(\cdot,t) \ \forall t>0$ σε περιττές στο $\mathbb{R}$

Δηλαδή παίρνουμε τις: $\varphi_{περ.}, \psi_{περ.}, f_{περ.}(\cdot,t)$ και λύνουμε το:

$$\left.\begin{aligned} &\bar{u}_{tt} = c^2 \bar{u}_{xx} + f_{περ.}(x,t) \quad , \quad (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty) \\ &\bar{u}(x,0) = \varphi_{περ.}(x) \quad , \quad x\in\mathbb{R} \\ &\bar{u}_t(x,0) = \psi_{περ.}(x) \quad , \quad x\in\mathbb{R} \end{aligned}\right\} (2)$$

Έχουμε ότι: $\varphi_{περ.}\in C^2(\mathbb{R})$ ($\xrightarrow{sos}$ δες προηγούμενη άσκηση, γιατί ισχύει αυτό!)

↳[το $\varphi(0)=0$ μας εξασφαλίζει ότι η φ είναι συνεχής]

$\psi_{περ.}\in C'(\mathbb{R})$ (Γιατί; $\rightarrow \psi_n(-x) = -\psi(x)$

$-\psi_n'(-x) = \psi'(x) \overset{x=0}{\Rightarrow} \psi_n'(0^-) = \psi'(0^+)$)

$= \psi_n'(0^+)$

$\partial_x f, f_{περ.} \in C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$

Άρα, το (2) έχει λύση:

$$\bar{u}(x,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_{περ.}(x-ct) + \varphi_{περ.}(x+ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi_{περ.}(s)ds$$

$$+ \frac{1}{2c}\int_0^t \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} f(y,\tau)\,dy\,d\tau$$

Θέτουμε $u = \bar{u}\big|_{[0,\infty)\times[0,\infty)}$

Η u λύνει το πρόβλημα (1)

Αρκεί να δείξουμε την $u(0,t)=0 \quad \forall t>0$ (οι άλλες συνθήκες ισχύουν!)

$$\bar{u}(0,t) = \frac{1}{2}\left(\varphi_{περ.}(-ct) + \varphi_{περ.}(ct)\right) + \frac{1}{2c}\int_{-ct}^{ct}\psi_{περ.}(s)ds + \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{-c(t-\tau)}^{c(t-\tau)} f_{περ.}(y,\tau)\,dy\,d\tau = 0$$

Στα ολοκληρώματα έχω συμμετρικά άκρα ⇒ 0 →

Scanned by CamScanner

ΑΣΚΗΣΗ

$\underline{\Omega} = (0,\infty)\times(0,\infty)$

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $(x,t)\in \underline{\Omega}$

$u(x,0) = \varphi(x)$, $x>0$

$u_t(x,0) = \psi(x)$, $x>0$

$u(0,t) = h(t)$, $t>0$

όπου $\varphi, h \in C^2([0,\infty))$, $\psi \in C^1([0,\infty))$

$h'(0) = \varphi(0)$, $h'(0) = \psi(0)$, $h''(0) = c^2\varphi''(0)$

Να βρεθεί λύση $u \in C^2(\underline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\underline{\Omega}})$

$\boxed{1^{os}\ \text{τρόπος:}}$ Θέτουμε $v(x,t) = u(x,t) - h(t)$

τότε: $v_{tt} + h''(t) = c^2 v_{xx}$

$v_{tt} - c^2 v_{xx} = -h''(t)$ → Κατάφερα να την κάνω μη ομογενή.

Συνθήκες

$v(x,0) = u(x,0) - h(0)$
$= \varphi(x) - h(0)$
$= \varphi(x) - \varphi(0)$
$= \hat{\varphi}(x)$

$v_t(x,0) = u_t(x,0) - h'(0)$
$= \psi(x) - h'(0)$
$= \hat{\psi}(x)$

Τώρα εφαρμόζουμε τα ίδια που κάναμε στην προηγούμενη άσκηση.
Δηλαδή θεωρούμε περιττή επέκταση κτλ.

$\boxed{2^{os}\ \text{τρόπος:}}$ Η λύση έχει τη μορφή: $u(x,t) = f(x+ct) + g(x-ct)$

Για $x>0$ πρέπει: $f(x) + g(x) = \varphi(x)$
$c f'(x) - c\, g'(x) = \psi(x)$

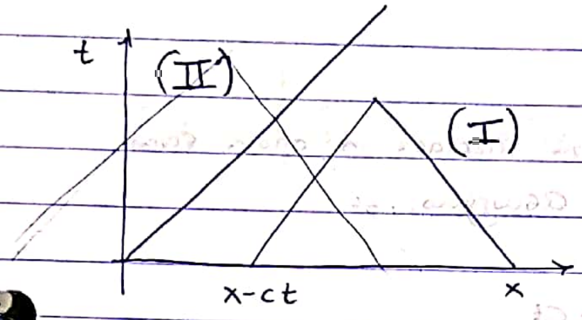
$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} f' + g' = \varphi' \\ f' - g' = \frac{1}{c}\psi' \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} f' = \frac{1}{2}\left(\varphi' + \frac{1}{c}\psi'\right) \\ g' = \frac{1}{2}\left(\varphi' - \frac{1}{c}\psi'\right) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\,ds + A \\ g(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2c}\int_0^x \psi(s)\,ds + B \end{cases}$$

Η $f+g=\varphi$ δίνει $A+B=0$

Για $t>0$: $u(0,t)=h(t) \Rightarrow f(ct)+g(-ct)=h(t)$

$$\xrightarrow{\text{για } x>0} g(-x)=h\left(\frac{x}{c}\right)-f(x)$$



► Αν $x \geq ct$ τότε $u(x,t)=\frac{1}{2}\left(\varphi(x-ct)+\varphi(x+ct)\right)+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}\psi(s)\,ds$
↳ χωρίο (I)

► Αν $x<ct$ τότε $u(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)$
↳ χωρίο (II)

$$=f(x+ct)-f(ct-x)+h\left(\frac{ct-x}{c}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\varphi(x+ct)-\varphi(ct-x)\right)+\frac{1}{2c}\int_{ct-x}^{ct+x}\psi(s)\,ds+h\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

Θέλουμε ν.δ.ο ότι $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$

Παρατηρούμε ότι $u(0,t)=h(t)$

Για το ότι $u\in C(\bar{\Omega})$ → Στην $x=ct$ έστω (x_0,t_0) με $x_0=ct_0$

→ Για $x<ct$ και $(x,t)\to(x_0,t_0)$

τότε $u(x,t)\to\frac{1}{2}\left(\varphi(2x_0)-\varphi(0)\right)+\frac{1}{2c}\int_0^{2x_0}\psi(s)\,ds+h(0)$

→ Για $x>ct$ και $(x,t)\to(x_0,t_0)$

τότε $u(x,t)\to\frac{1}{2}\left(\varphi(0)+\varphi(2x_0)\right)+\frac{1}{2c}\int_0^{2x_0}\psi(s)\,ds$

Τα παραπάνω είναι ίσα $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\varphi(0)=h(0)}$

Για το ότι $u\in C^1(\bar{\Omega})$: Παραγωγίζω τις 2 σχέσεις και δείχνω ότι ταυτίζονται στο $x=ct$

Για το ότι $u\in C^2(\Omega)$: Ομοίως

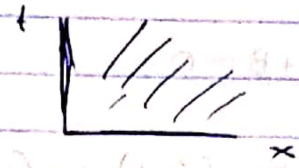
Άσκηση 13 Strauss (σελ 83)

$u_{tt} = c^2 u_{xx}$, $x>0, t>0$

$u(x,0) = x$

$u_t(x,0) = 0$

$u(0,t) = t^2$ $\quad t>0$



Λύση

Θεωρούμε την $V(x,t) = u(x,t) - t^2$

$$V_{tt} = c^2 V_{xx} - 2$$
$$V(x,0) = x$$
$$V_t(x,0) = 0$$
$$V(0,t) = 0$$

Κάνω περιττή επέκταση η οποία είναι ασυνεχής....

Τελικά βρίσκω:

$$u(x,t) = \begin{cases} x + \left(t - \frac{x}{c}\right)^2 , & x \leq ct \\ x , & x \geq ct \end{cases}$$

$u \in C([0,\infty) \times [0,\infty))$

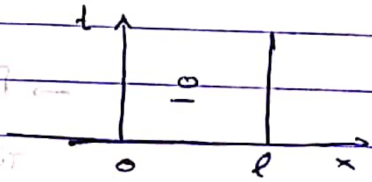
$u_t = \begin{cases} 2\left(t - \frac{x}{c}\right) \\ 0 \end{cases}$ συνεχής , $u_x = \{$ συνεχής

~~$u_{tt} = \begin{cases} 2 \\ 0 \end{cases}$ ασυνεχής δηλ $u \notin C^2$~~

Άσκηση 2.35 (Αλικάκος)

Θεωρούμε το Π.Α.Τ $u_{tt} = c^2 u_{xx}$ $\quad (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty)$ $\quad \ell > 0$

$$u(x,0) = \varphi(x)$$
$$u_t(x,0) = \psi(x)$$
$$u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0$$



a) Ν.δ.ο έχει το πολύ μια λύση

β) Δώστε συνθήκες στις φ, ψ ώστε να υπάρχει λύση $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ και δώστε μια αναπαράσταση της λύσης.

Λύση

a) Έστω V_1, V_2 2 λύσεις. Τότε η $u = V_1 - V_2$ λύνει το

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = 0$$
$$u(0,t) = u_x(\ell,t) = 0$$

Θ.δ.ο $u \equiv 0$

Θεωρούμε την $E: [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \left(u_t^2(x,t) + c^2 u_x^2(x,t)\right) dx$

$$E(0) = \frac{1}{2}\int_0^\ell \Big(\underbrace{u_t^2(x,0)}_{0} + c^2 \underbrace{u_x^2(x,0)}_{0 \text{ επειδή } u(x,0)=0}\Big)\, dx = 0$$

$$E'(t) = \int_0^\ell \left(u_t u_t + c^2 u_x u_{xt}\right) dx = c^2 \int_0^\ell \left(u_t u_{xx} + u_x u_{xt}\right) dx$$

$$= c^2 \int_0^\ell (u_t u_x)_x \, dx$$

$$= c^2 \Big(\underbrace{u_t(\ell,t)}_{0} u_x(\ell,t) - u(0,t)\underbrace{u_x(0,t)}_{0} \Big) = 0$$

Επομένως: $\left.\begin{array}{l} E(t): \text{σταθερή} \\ E(0) = 0 \end{array}\right\}$ $E(t) = 0, \ \forall t \geq 0$

$\Rightarrow u_t(x,t) = u_x(x,t) = 0, \ \forall (x,t) \in \Omega$

$\Rightarrow \nabla u = 0$ στο Ω $\Rightarrow$ $u = \tilde{c}$ (σταθερή) στο Ω

$\xrightarrow{u(x,0)=0}$ $\tilde{c} = 0 \Rightarrow V_1 = V_2$

(β) • Κάνουμε άρτια επέκταση στο $[0, 2\ell]$ με κέντρο στο ℓ

$$\varphi_{επ} = \varphi(\ell - (x-\ell)) = \varphi(2\ell - x), \quad x \in [\ell, 2\ell]$$

• Κάνουμε περιττή επέκταση στο $[-2\ell, 2\ell]$ με κέντρο το 0

• Κάνουμε περιοδική επέκταση με περίοδο 4ℓ

Δευτέρα 11/11/19
Μάθημα 10ο

Η εξίσωση Θερμότητας / διάχυσης στο $\mathbb{R}$

$u_t = k u_{xx}$ για $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,\infty) = \Omega$ ①
$u(x,0) = \varphi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$ ②

Ζητάμε $u \in C^{2,1}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ που ικανοποιεί τις ①, ②
$\partial_x^i \partial_t^j$ $i \le 2$, $j \le 1$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Αν η u ικανοποιεί την ① τότε οποιαδήποτε παράγωγος της, που ανήκει στο $C^{2,1}(\Omega)$, την ικανοποιεί
π.χ η u_x, παραγωγίζουμε την ① ως προς x.

$$u_{tx} = k u_{xxx} \Rightarrow (u_x)_t = k (u_x)_{xx}$$

2) Αν η u ικανοποιεί την ① τότε $\forall a \in \mathbb{R}$ η $u(ax, a^2 t)$ $\forall (x,t)$ επίσης την ικανοποιεί

$u(x,t) \longrightarrow \varphi$
$u(ax,a^2t) \longrightarrow \varphi$
$\varphi(x) = 1$ $x>0$

$$\left.\begin{aligned} V_t &= a^2 u_t(ax,a^2t) = a^2 k\, u_{xx}(ax,a^2t) \\ V_x &= a u_x(ax,a^2t) \\ V_{xx} &= a^2 u_{xx}(ax,a^2t) \end{aligned}\right\} = k u_{xx}$$

3) Το u συνήθως εκφράζει: (α) τη θερμοκρασία στο σημείο x, τον χρόνο t
(β) τη συγκέντρωση μιας ουσίας σε ένα υγρό (στο σημείο x τον χρόνο t)

Για τη λύση της ① μπορούμε να έχουμε:

$$u(ax,a^2t) = u(x,t) \quad \forall a,x \in \mathbb{R} \quad \forall t>0$$

Αν ναι, τότε για $a = \dfrac{1}{\sqrt{t}}$, θα έχουμε:

$$u(x,t) = u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right)$$

Αναζητούμε λύση της μορφής: $Q(x,t) = g\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)$

Έστω $p = \frac{x}{\sqrt{t}}$:

$$Q_t(x,t) = g'(p)\, x \left(-\frac{1}{2}\right) t^{-3/2}$$

$$Q_{xx}(x,t) = g''(p)\, \frac{1}{t}$$

$p = \frac{x}{\sqrt{t}} \Rightarrow x = p\sqrt{t}$

$-\frac{p}{2t} g'(p) - \frac{k}{t} g''(p)$

Άρα, $0 = Q_t - kQ_{xx} = -\frac{1}{2t^{3/2}}\, x\, g'(p) - \frac{k}{t} g''(p)$

$$= -\frac{k}{t}\left(g''(p) + \frac{x}{2k\sqrt{t}} g'(p)\right)$$

$$= -\frac{k}{t}\left(g''(p) + \frac{p}{2k} g'(p)\right)$$

$$g''(p) + \frac{p}{2k} g'(p) = 0 \Rightarrow \left(e^{p^2/4k} g'(p)\right)' = 0$$

$$\Rightarrow g'(p) = C_1 \cdot e^{-\frac{p^2}{4k}}$$

$$g(p) = C_1 \int_0^p e^{\frac{-s^2}{4k}} ds + C_2 \Rightarrow Q(x,t) = C_1 \int_0^{\frac{x}{\sqrt{t}}} e^{\frac{-s^2}{4k}} ds + C_2$$

Από την παρατήρηση 1), η Q_x ικανοποιεί την ①.

Επίσης,

$$Q_x(x,t) = C_1 \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}\, e^{-\frac{x^2}{4kt}}$$

Επιλέγουμε $C_1 = \frac{1}{\sqrt{4k\pi}}$

Θέτουμε $S(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\, e^{-x^2/4kt}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$

Ιδιότητες της $s(x,t)$

(i) $\forall t>0$ η $x \longmapsto s(x,t)$ είναι η πυκνότητα μιας $N(0,2kt)$

Άρα, έχει ολοκλήρωμα 1.

(ii) $S \in C^{\infty}(\mathbb{R}\times(0,\infty))$

(iii) $S_t = kS_{xx}$

(iv) $\forall \delta>0$ $\quad \lim\limits_{t\to 0^+} \int_{|x|>\delta} s(x,t)\,dx = 0$

Απόδειξη

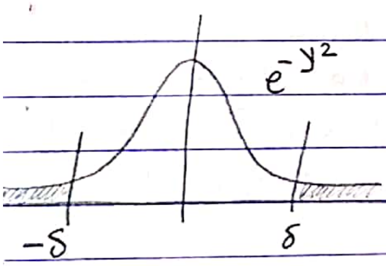
(i) Θεωρία

(ii) ✓

(iii) Ισχύει γιατί: $S = Q_x$ για κατάλληλο C_1 και Q_x ικανοποιεί την ①

(iv) $\displaystyle\int_{|x|>\delta} \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} e^{-x^2/4kt}\,dx =$

↳ θέτω $y = x/\sqrt{4kt}$



$$= \int_{|y|>\frac{\delta}{\sqrt{4kt}}} e^{\frac{-y^2\sqrt{4kt}}{\sqrt{4k\pi t}}}\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{|y|>\frac{\delta}{\sqrt{4kt}}} e^{-y^2}\,dy \longrightarrow 0$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \longrightarrow 0$$
$$= \ell - S_n$$

Θεώρημα

Έστω $\mathcal{O} = \mathbb{R}\times(0,\infty)$ και $\varphi \in C(\mathbb{R})$ με $|\varphi(x)| \le M$, $\forall x\in\mathbb{R}$, $M<\infty$ σταθ.

Θέτουμε:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} s(x-y,t)\,\varphi(y)\,dy \quad ④$$

$U_t = kU_{xx}$ ①

$u(x,0) = \varphi(x)$ ②

$s(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} e^{-x^2/4kt}$ ③

Ισχύει ότι:

1) $u \in C^{\infty}(\mathcal{O})$ και $\displaystyle\frac{\partial^{k+x}}{\partial x^k \partial t^x} u = \int \frac{\partial^{k+x}}{\partial x^k \partial t^x}\big(s(x-y,t)\big)\varphi(y)\,dy$

$U_t = kU_{xx}$ $\forall (x,t)\in\mathcal{O}$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ t\to 0^+}} u(x,t) = \varphi(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

① Σχόλιο: Ορίζοντας την u στο $\overline{\Omega}$ όπως στην ④ και με χρήση της $u(x,0)=\varphi(x)$ έχουμε ότι η $\varphi \in C(\overline{\Omega})$

Απόδειξη:
Η u είναι καλά ορισμένη γιατί το ολοκλήρωμα στην ④ συγκλίνει απολύτως.

$$\int_{\mathbb{R}} |S(x-y,t)\varphi(y)|\,dy \leq M \int_{\mathbb{R}} S(y-x,t)\,dy \overset{z=y-x}{=\!=} M\int_{\mathbb{R}} S(z,t)\,dz = M < \infty$$

Θδο $\quad u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial}{\partial t}(S(x-y,t))\varphi(y)\,dy$

Έστω $(x_0,t_0) \in \Omega$. Επιλέγουμε $\epsilon > 0$ ώστε $t_0 - \epsilon > 0$
Θέτουμε:

$$I = (t_0-\epsilon, t_0+\epsilon) \;,\; f: \mathbb{R}\times I \to \mathbb{R} \text{ με } f(y,t) = S(x_0-y,t)\,\varphi(y)$$

$0 \quad t_0-\epsilon \quad t_0$

$J(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,dx \quad , \quad t \in I \to$ διάστημα

(i) $f(\cdot,t)$ μετρήσιμη
(ii) $\int |f(x,t)|\,dx < \infty$
(iii) $\partial_t f(x,t)$ υπάρχει $\forall t \in I, \forall x \in \mathbb{R}$
(iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \sup_{t\in I} |\partial_t f(x,t)|\,dx < \infty$

Τα (i), (ii), (iii) είναι εντάξει.
Για το (iv): $\partial_t f(x,t) = \varphi(x)\left(-\frac{1}{2t} + \frac{(x-y)^2}{4kt^2}\right) S(x-y,t)$

$$\sup_{t\in I} |\partial_t f(y,t)| \leq M \left(\frac{1}{2(t_0-\epsilon)} + \frac{(x-y)^2}{4k(t_0-\epsilon)^2}\right) \frac{1}{\sqrt{4k\pi(t_0-\epsilon)}}\, e^{-\frac{(x-y)^2}{4k(t_0+\epsilon)}}$$

$$= g(y)$$

Ισχύει $\int_{\mathbb{R}} g(y)\,dy < \infty$

Άρα το κριτήριο για το $J'(t)$ εφαρμόζεται.

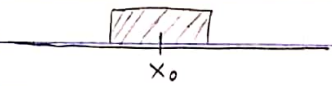
(β) Από το (α) έχουμε:

$$u_t - k u_{xx} = \int \left(\frac{\partial}{\partial t} - k\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) S(x-y,t)\,\varphi(y)\,dy = 0$$

γιατί $k\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} S(x-y,t) = k S_{xx}(x-y,t) = S_t(x-y,t)$

$$= \frac{\partial}{\partial t}\big(S(x-y,t)\big)$$

(γ) $u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} S(x-y,t)\,\varphi(y)\,dy$ $\qquad \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ t\to 0^+}} u(x,t) = \varphi(x_0)$



Έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ώστε
$|x-x_0| < \delta \Rightarrow |\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \epsilon$

Αν $|x-x_0| < \dfrac{\delta}{2}$ τότε $|u(x,t) - \varphi(x_0)| = \left|\int_{\mathbb{R}} S(x-y,t)\big(\varphi(y)-\varphi(x_0)\big)dy\right|$

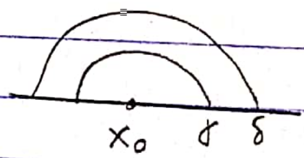
$$= \left|\int_{|y-x_0|<\delta} + \int_{|y-x_0|\geq\delta}\right| \leq \epsilon \int_{|y-x_0|<\delta} S(x-y,t)\,dy + 2M\int_{|y-x_0|\geq\delta} S(x-y,t)\,dy$$

$\delta \leq |y-x_0| \leq |y-x| + |x-x_0| < |y-x| + \dfrac{\delta}{2}$ (*)

$\Rightarrow |y-x| > \dfrac{\delta}{2}$

$$\leq \epsilon + 2M\int_{|y-x|>\frac{\delta}{2}} S(x-y,t)\,dy = \epsilon + 2M\int_{|z|>\frac{\delta}{2}} S(z,t)\,dz$$

$\exists \delta' > 0$ ώστε $t \in (0,\delta') \Rightarrow 2M\int_{|z|>\frac{\delta}{2}} S(z,t)\,dz < \epsilon$



Άρα, $\left.\begin{array}{l} |x-x_0| < \delta \\ t\in(0,\delta') \end{array}\right\} \Rightarrow |u(x,t) - \varphi(x_0)| < 2\epsilon$

Δευτέρα 18/11/19

Μάθημα 11ο

Εξίσωση Θερμότητας

$u_t = k u_{xx}$, $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$ $k>0$ $\rightarrow$ Δεν έχει μοναδική λύση.

$u(x,0)=\phi(x)$, $x\in\mathbb{R}$ Μια λύση της είναι η (*)

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}} \phi(y)\, S(x-y,t)\,dy \quad , t>0 \quad (*)$$

με $s(x,t)=\dfrac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\, e^{-x^2/4kt}$

$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ t\to 0^+}} u(x,t) = \phi(x_0)$ (υποθέτουμε ότι η ϕ είναι συνεχής στο x_0)

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Αν η ϕ είναι απλώς φραγμένη και μετρήσιμη (π.χ κατά τμήματα συνεχής) τότε η (*) ικανοποιεί την $u_t = k u_{xx}$ στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$ και η $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ t\to 0^+}} u(x,t)=\phi(x_0)$ ισχύει στα σημεία x_0 συνέχειας της ϕ.

2) Για σταθερό $t>0$ η u της (*) είναι C^∞ ως προς x αν και η ϕ μπορεί να είναι απλώς φραγμένη και μετρήσιμη.
Δηλαδή η κατανομή θερμοκρασίας εξομαλύνεται με το χρόνο.
Αυτό δεν ισχύει στην εξίσωση κύματος.

- Η u τείνει να γίνει σταθερή καθώς $t\longrightarrow\infty$

π.χ αν $u_{xx}(x_0,t_0)<0$ τότε $u_t(x_0,t_0)<0$. Τα σημεία κοντά στο t_0 θα πέσουν στο t_0^+

3) Πεδίο επιρροής ενός $x_0\in\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι ϕ συνεχής στο x_0.
Η τιμή $\phi(x_0)$ επηρεάζει την τιμή $u(x,t)$ $\forall x\in\mathbb{R}$, $\forall t>0$ οσοδήποτε μικρό
Δηλαδή έχουμε άπειρη ταχύτητα διάδοσης. π.χ $\phi(x)=1_{|x|<1}$ τότε
$u(x,t)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall t>0$
Ενώ στην εξίσωση κύματος η ταχύτητα είναι c, πεπερασμένη.

4) Επειδή $s(x-y,t)\geq 0$ και $\int s(x-y,t)\,dy = 1$ έχουμε ότι:

$-M \leq \phi(y) \leq M$, $\forall y \in \mathbb{R}$ $\Big\} \Rightarrow -M \leq u(x,t) \leq M \quad \forall x,t$

5) Η λύση ⊛ δεν είναι η μοναδική λύση του προβλήματος

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} \\ u(x,0) = \phi(x) \end{cases}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ

Θεωρούμε ομογενή, λεπτή, μεταλλική μπάρα, μεγάλου μήκους.
Έστω $u(x,t)$ = η θερμοκρασία στο x τον χρόνο t.
Παίρνουμε $a<\beta$ αυθαίρετα.
Συνολική θερμική ενέργεια μεταξύ a και β $= c\int_a^\beta u(x,t)\,dx = J_t$

Η μεταβολή της ως προς το χρόνο είναι:

$$\frac{d}{dt} c\int_a^b u(x,t)\,dx - c\int_a^b u_t(x,t)\,dx$$

ΝΟΜΟΣ ΔΙΑΤΗΡΗΣΗΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ

$\frac{dJ_t}{dt}$ = εισροή ενέργειας στο a και
— // — στο β

$$= \underbrace{-\lambda u_x(a,t) + \lambda u_x(\beta,t)}_{\text{Νόμος Fourier } (\lambda>0)}$$

$$= \lambda\int_a^\beta u_{xx}(x,t)\,dx$$

$$\Rightarrow \int_a^\beta c(u_t - \lambda u_{xx})\,dx = 0 \quad \forall a<\beta \Rightarrow c u_t = \lambda u_{xx} \quad \forall x\in\mathbb{R},\ \forall t>0$$

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΤΗΝ ΗΜΙΕΥΘΕΙΑ

$\Omega = (0,\infty)\times(0,\infty)$ $\quad \nearrow \{f:\Omega\to\mathbb{R} : f, \partial_x f, \partial_{xx} f, \partial_t f$ συνεχείς στο $\Omega\}$

Ζητάμε $v\in C(\bar{\Omega})\cap C^{2,1}(\Omega)$ και v_x συνεχής στο $[0,\infty)\times(0,\infty)$ ($\hookrightarrow x=0, t>0$)

που να ικανοποιεί τα εξής:

$v_t = k v_{xx}$, στο Ω

$v(x,0) = \phi(x)$, $\forall x\geq 0$ $\quad \phi$ συνεχής

$v_x(0,t) = 0$, $\forall t>0$ $\quad$ συνθήκη Neumann

Λύση: Επεκτείνουμε την ϕ με άρτιο τρόπο.

$$\varphi_{αρ.}(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x\geq 0 \\ \varphi(-x), & x<0 \end{cases}$$

$\varphi_{αρτ.}\in C(\mathbb{R})$ και φραγμένο

Το πρόβλημα $\tilde{v}_t = k\tilde{v}_{xx}$, $(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty)$

$\tilde{v}(x,0) = \varphi_{αρτ.}(x)$, $\forall x\in\mathbb{R}$

έχει λύση την $\tilde{v}(x,t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \varphi_{αρτ.}(y) S(x-y,t)\,dy, & t>0, x\in\mathbb{R} \\ \varphi_{αρτ.}(x), & t=0, x\in\mathbb{R} \end{cases}$

Θέτουμε $v = \tilde{v}\big|_{\bar{\Omega}} = \tilde{v}\big|_{[0,\infty)\times[0,\infty)}$

Η $v\in C^\infty(\Omega)$ αφού $\tilde{v}\in C^\infty(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ άρα v_t είναι συνεχής στο $[0,\infty)\times(0,\infty)$.

Επίσης, $v\in C(\bar{\Omega})$

$v_t = k v_{xx}$ στο Ω αφού $\tilde{v}_t = k\tilde{v}_{xx}$ στο $\mathbb{R}\times(0,\infty)$

$v(x,0) = \varphi_{αρτ.}(x) = \varphi(x)$ για $x\geq 0$

[Για την $v_x(0,t)=0$

Η $\tilde{v}$ είναι άρτια ως προς x $\forall t>0$:

$$\tilde{v}(-x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{αρτ.}(x)\, S(-x-y,t)\,dy \overset{z=y}{=\!=} \int_{\infty}^{-\infty} \varphi_{αρτ.}(-z)\, S(-x+z,t)(-1)\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{αρτ.}(z)\, \underbrace{S(-x+z,t)}_{\substack{\text{'' αφού S άρτια} \\ S(x-z,t)}}\,dz = \tilde{v}(x,t)$$

$$\Rightarrow -\tilde{v}_x(-x,t) = \tilde{v}_x(x,t) \overset{x=0}{\Longrightarrow} \tilde{v}_x(0,t) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\left(\tilde{v}(-x,t)\right) = -\tilde{v}_x(-x,t)$$

ΑΣΚΗΣΗ: Έστω ότι στο πρόβλημα $\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x), & \forall x\in\mathbb{R}\end{cases}$

η $\varphi\in C(\mathbb{R})$ φραγμένη και $\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,dx < \infty$

Για τη λύση u που δίνει η ⊛ ν.δ.ο $\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$, ομοιόμορφα ως προς $x\in\mathbb{R}$

Λύση: $u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(\,)\cdot e^{-(x-y)^2/4kt}\,dy$

Ισχύει ότι: $|u(x,t)| \leq \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(y)|\,dy$

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(x,t)| \xrightarrow{t\to\infty} 0$

ΑΣΚΗΣΗ: Αν φ φραγμένη, μετρήσιμη και στο $x_0\in\mathbb{R}$ υπάρχουν τα $\varphi(x_0^-)$, $\varphi(x_0^+)$ τότε: $\lim_{t\to0^+} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, S(x_0-y,t)\,dy}_{= u(x_0,t)} = \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0^-)+\varphi(x_0^+)\right)$

$= I(t)$

Λύση:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{x_0} \varphi(y) S(x_0-y,t)\,dy + \int_{x_0}^{\infty} \varphi(y)\, S(x_0-y,t)\,dy$$

$$I(t) - \frac{1}{2}\left(\varphi(x_0^-)+\varphi(x_0^+)\right) =$$

$$= \int_{-\infty}^{x_0} \left(\varphi(y)-\varphi(x_0^-)\right) S(x_0-y,t)\,dy + \int_{x_0}^{\infty} \left(\varphi(y)-\varphi(x_0^+)\right) S(x_0-y,t)\,dy$$

$\int_{-\infty}^{x_0} S(x_0-y,t)\,dy = \int_{-\infty}^{0} S(-z,t)\,dz = \int_{-\infty}^{0} S(z,t)\,dz = \frac{1}{2}$

αφού S άρτια και $\int_{-\infty}^{\infty} S\ldots = 1$

Όμοια και για το $\int_{x_0}^{\infty} S\ldots = \frac{1}{2}$

Για $\varepsilon>0$ $\exists\,\delta>0$ ώστε $\left.\begin{array}{l} y<x_0 \\ |y-x_0|<\delta \end{array}\right\} \Rightarrow |\varphi(y)-\varphi(x_0^-)|<\varepsilon$

$$\int_{-\infty}^{x_0} |\varphi(y)-\varphi(x_0^-)|\, S(x_0-y,t)\,dy \leq \int_{-\infty}^{x_0-\delta} \ldots + \int_{x_0-\delta}^{x_0} \ldots$$

$$\leq 2M \int_{-\infty}^{x_0-\delta} s(x_0-y,t)\,dy + \epsilon \underbrace{\int_{x_0-\delta}^{x_0} s(x_0-y,t)\,dy}_{\leq 1}$$

$$\leq 2M \int_{|z|\geq\delta} s(z,t)\,dz + \epsilon \qquad |\varphi(x)| \leq M \quad \forall x$$

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{-\infty}^{x_0} |\varphi(y) - \varphi(x_0^-)|\, s(x_0-y,t)\,dy \leq \epsilon$$

• Με αντίστοιχο τρόπο δουλεύω και για το άλλο ολοκλήρωμα

ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΡΟΟΔΟ (11.00-13.30 Σάββατο 23/11/19)

Χαρακτηριστικές

Αλλαγή συντεt

όχι εξίσωση θερμότητας

• εξίσωση μεταφοράς (ομογ + μη ομογ.)

εξίσωση κύματος

• τύπος Leibniz (παρ. κάτω από ολοκλήρωμα)

Μέθοδος ενέργειας

Έλεγχος ομαλότητας (π.χ πως βρίσκω λύση που να είναι C^1)

Περιοχές επιρροής και εξάρτησης

όχι "περίεργες" αποδείξεις

Scanned by CamScanner

Τετάρτη 20/11/19
Μάθημα 12ο

Για την εξίσωση θερμότητας:
Είχαμε κάνει άρτια επέκταση και φτάσαμε σε λύση της μορφής:

$$u(x,t)=\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\alpha\rho\tau.}(y)\, s(x-y,t)\, dy \qquad x>0,\ t>0$$

$$=\int_0^{\infty} \varphi(y)\, s(x-y,t)\, dy + \int_{-\infty}^{0} \overset{\varphi_{\alpha\rho\tau.}}{\varphi(-y)}\, s(x-y,t)\, dy$$

$$\overset{z=-y}{=} \int_0^{\infty} \varphi(y)\, s(x-y,t)\, dy + \int_0^{\infty} \varphi(z)\, s(x+z,t)\, dz$$

$$=\int_0^{\infty} \varphi(y)\left(s(\underset{y-x}{x-y},t)+s(\underset{y+x}{x+y},t)\right) dy$$

Η μη ομογενής εξίσωση θερμότητας

$$(1)\ \begin{cases} U_t = kU_{xx} + f(x,t) & ,\forall (x,t)\in \underline{O} = \mathbb{R}\times(0,\infty) \qquad k>0 \\ u(x,0)=\varphi(x) & ,\forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

όπου $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής, φραγμένη
$f:\mathbb{R}\times[0,\infty)\to\mathbb{R}$ συνεχής και $f|_{\mathbb{R}\times[0,T]}$ φραγμένη $\forall T>0$
Ζητάμε $u\in C^{2,1}(\underline{O})\cap C(\overline{O})$ που να ικανοποιεί την (1)

Αν οι v,w λύνουν τις:

$$\begin{cases} V_t = kV_{xx}+f(x,t) \\ v(x,0)=0 \end{cases} (2) \quad \underline{\text{και}} \quad \begin{cases} W_t = kW_{xx} \\ w(x,0)=\varphi(x) \end{cases} (3)$$

τότε η $u=v+w$ λύνει την (1), διότι:

$$U_t = V_t + W_t = kV_{xx}+kW_{xx}+f(x,t) = kU_{xx}+f(x,t)$$

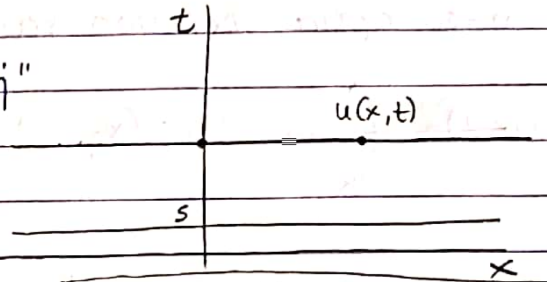
$$u(x,0)=v(x,0)+w(x,0)=0+\varphi(x)=\varphi(x)$$

(*) Για να είναι αυτό το ολοκλήρωμα καλά ορισμένο, θα πρέπει η f να είναι φραγμένη, το οποίο ισχύει. Άρα είμαι οκ!

Μια λύση της ③ είναι η $w(x,t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\, S(x-y,t)\, dy, & t>0,\ x\in\mathbb{R} \\ \varphi(x) & t=0,\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$

Για την ②:

Για κάθε $s \geq 0$ θεωρούμε τη "γνωστή" λύση του $\begin{cases} V_t = k V_{xx}, & (x,t)\in \mathbb{R}\times(s,\infty) \\ v(x,s) = f(x,s), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$



το s το θεωρώ παράμετρο (*)

$$v(x,t;s) = \int f(y,s)\, S(x-y,t-s)\, dy$$

Θέτουμε $v(x,t) = \int_0^t v(x,t;s)\, ds$ (I) Πρέπει να δείξω ότι είναι καλά ορισμένο.

$$= \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(y,s)\, S(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

Αυτή είναι λύση της ② (Αρχή Duhamel)

ΣΚΕΨΗ

$\tilde{v}(x,r) = \tilde{v}(x,s+r),\ r \geq 0$

$\tilde{v}_r = k \tilde{v}_{xx}$

$\tilde{v}(x,0) = f(x,s)$

↓

$\tilde{v}(x,r) = \int f(y,s)\, S(x-y,r)\, dy$

→ Αυτό το κάναμε διότι θέλουμε ο χρόνος να ξεκινάει από το 0 (γιατί έτσι έχω μάθει να δουλεύω). Με αυτόν τον μετασχηματισμό το καταφέρνω.

Τότε: $v(x,t) = \tilde{v}(x,t-s) = \int f(y,s)\, S(x-y,t-s)\, dy$

Η v είναι καλά ορισμένη (I):

$$\int_0^t \int_{\mathbb{R}} |f(y,s)\, S(x-y,t-s)|\, dy\, ds \leq \|f\|_t \int_0^t \int_{\mathbb{R}} S(x-y,t-s)\, dy\, ds$$

$\|f\|_t = \{\sup |f(x,s)| : (x,s) \in \mathbb{R}\times[0,T]\}$

$$= \|f\|_t \int_0^t ds = t\, \|f\|_t < \infty$$

Η $v \in C^{1,2}(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ και $\lim_{t\to 0^+} v(x,t) = 0$ (αφού $|v(x,t)| \leq t\|f\|_t \xrightarrow{t\to 0^+} 0$)

Οπότε τελικά:

$$v(x,t) = \begin{cases} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(y,s)\, S(x-y,t-s)\, dy\, ds, & t>0 \\ 0, & t=0 \end{cases}$$

Επίσης, η v ικανοποιεί την πρώτη από τη ② "πρακτικά"

είναι το όριο της (I) όταν το $s \to t$

$$V_t = v(x,t;t) + \int_0^t v_t(x,t;s)\,ds$$

$$= f(x,t) + \int_0^t k\,V_{xx}(x,t;s)\,ds$$

$$= f(x,t) + k\left(\int_0^t v(x,t;s)\,ds\right)_{xx}$$

$$= f(x,t) + k\,V_{xx}$$

Άρα, μια λύση της ① είναι η:

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(y)\,S(x-y,t)\,dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f(y,s)\,S(x-y,t-s)\,dy\,ds$$

ΑΣΚΗΣΗ 3 (§ 3.3 Strauss)

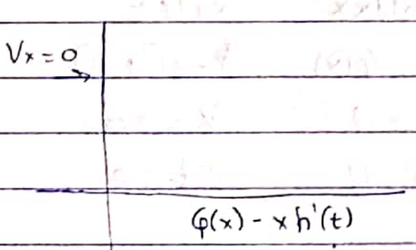
Να λυθεί η
$$\begin{aligned} &W_t = k\,W_{xx}, && x>0,\ t>0 \\ &W(x,0) = \varphi(x), && x>0 \\ &W_x(0,t) = h(t), && t>0 \end{aligned}$$

Λύση: Ορίζουμε $v(x,t) = w(x,t) - x\,h(t)$ τότε:

$$V_t = W_t - x\,h'(t) = k\,W_{xx} - h'(t) = k\,V_{xx} \underbrace{- x\,h'(t)}_{f(x,t)}$$

$$v(x,0) = \varphi(x) - x\,h(0) = \tilde{\varphi}(x), \quad x>0$$

$$V_x(0,t) = W_x(0,t) - h(t) = 0$$



$$\left.\begin{aligned} &V_t = k\,V_{xx} + f(x,t) \\ &v(x,0) = \tilde{\varphi}(x) \\ &V_x(0,t) = 0 \end{aligned}\right\} (*)$$

Κάνω άρτια επέκταση, άρα η u θα βγει άρτια, άρα η πρώτη παράγωγος θα βγει περιττή

Λύνουμε το
$$U_t = k\,U_{xx} + f_{αρτ.}(x,t)$$
$$u(x,0) = \tilde{\varphi}_{αρτ.}(x)$$

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{αρτ.}(y)\,S(x-y,t)\,dy + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} f_{αρτ.}(y,s)\,S(x-y,t-s)\,ds\,dy$$

Δείχνουμε ότι η u είναι άρτια:

$$u(-x,t)=u(x,t) \Rightarrow -u_x(-x,t)=u_x(x,t)$$
$$u_x(0,t)=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{\alpha\rho\tau.}(y)\, S(-x-y,t)\,dy \overset{z=-y}{=\!=} \int_{\infty}^{-\infty}\varphi_{\alpha\rho\tau.}(-z)\, S(-x+z,t)\,(-dz)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_{\alpha\rho\tau.}(z)\, S(x-z,t)\,dz$$

Άρα, $v=u\big|_{[0,\infty)\times[0,\infty)}$ λύνει το ⊛

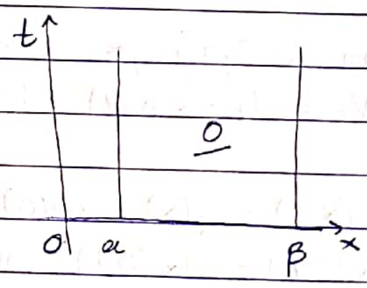
$$W(x,t)=v(x,t)+x\,h(t)$$
$$x>0$$
$$v(x,t)=u(x,t)$$

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\rho\tau}(x)=\varphi(|x|)-|x|\,h(0)$$
$$f_{\alpha\rho\tau}(x,t)=-|x|\,h'(t)$$

Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΘΕΡΜΟΤΗΤΑΣ ΣΕ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΟ ΔΙΑΣΤΗΜΑ

$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $\alpha<\beta$, $\Omega=(\alpha,\beta)\times(0,\infty)$, $k>0$

Θεωρούμε το ΠΑΣΤ:



$$\left.\begin{array}{ll} u_t=k\,u_{xx}, & (x,t)\in\Omega \\ u(x,0)=\varphi(x), & \forall x\in[\alpha,\beta] \\ u(\alpha,t)=0, & \forall t>0 \\ u(\beta,t)=0, & \forall t>0 \\ & \\ u\in C^{2,1}\big([\alpha,\beta]\times[0,\infty)\big) & \end{array}\right\} \quad (5)$$

Πρόταση: Αν η u είναι λύση του (5), τότε η ενέργεια

$$E(t) = \int_a^b u^2(x,t)\,dx$$ είναι φθίνουσα ως προς t.

Απόδειξη: Η E είναι συνεχής στο $[0,\infty)$. Επίσης, είναι διαφορίσιμη με:

$$E'(t) = 2\int_a^b u(x,t)\,u_t(x,t)\,dx = 2k\int_a^b u(x,t)\,u_{xx}(x,t)\,dx$$

$$= 2k\left([u(x,t)\,u_x(x,t)]_a^b - \int_a^b u_x^2(x,t)\,dx \right)$$

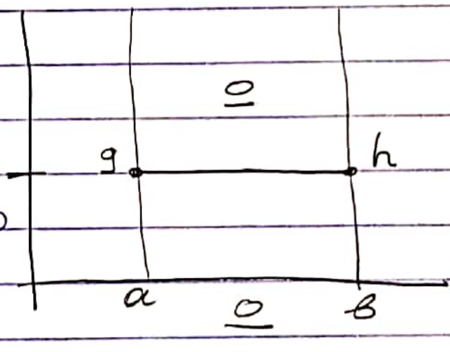
$$= -2k\int_a^b u_x^2(x,t)\,dx \le 0$$

Πρόταση (μοναδικότητα)

Η εξίσωση

$$u_t = k u_{xx} + f(x,t) \quad \forall (x,t) \in \Omega$$
$$u(x,0) = \varphi(x)$$
$$u(a,t) = g(t)$$
$$u(\beta,t) = h(t)$$

όπου f, φ, g, h δεδομένες συναρτήσεις έχει το πολύ μία λύση που να είναι στοιχείο του $C^{2,1}(\overline{\Omega})$



Αν u_1, u_2 είναι δύο λύσεις, τότε η $u = u_1 - u_2 \in C^{2,1}(\overline{\Omega})$ ικανοποιεί τις:

$$u_t = k u_{xx}$$
$$u(x,0) = u_1(x,0) - u_2(x,0) = \varphi(x) - \varphi(x) = 0$$
$$u(a,t) = 0$$
$$u(\beta,t) = 0$$

Με βάση την προηγούμενη πρόταση, η $E(t) = \int_a^b u^2(x,t)\,dx \geq 0$

είναι φθίνουσα ως προς t

$$E(0) = \int_a^b u^2(x,0)\,dx = 0$$

Άρα, $E(t) = 0 \quad \forall t$

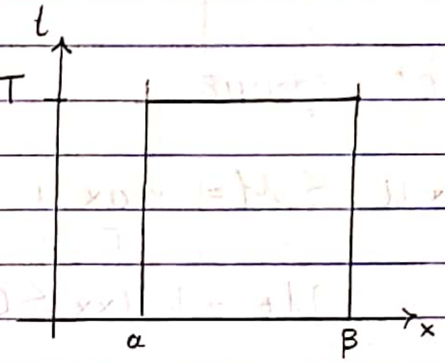
$u(x,t) = 0 \quad \forall x \in [a,b] - \kappa \int_a^b u^2 x\,dx \leq 0$

$\forall t \geq 0$

Δευτέρα 25/11/19
Μάθημα 13ο

Η αρχή του μεγίστου για την εξίσωση θερμότητας

Έστω $\alpha<\beta$, $T>0$
$\underline{O}=(\alpha,\beta)\times(0,T)$
$\Gamma=\partial\underline{O}\setminus([\alpha,\beta]\times\{T\})$
το παραβολικό σύνορο του $\underline{O}$



Πρόταση (Ασθενής αρχή του μεγίστου)

Έστω $u:\overline{\underline{O}}\to\mathbb{R}$ συνεχής με $u\in C^{1,2}((\alpha,\beta)\times(0,T])$ που ικανοποιεί την $u_t=k\,u_{xx}$ στο $(\alpha,\beta)\times(0,T]=\underline{O}\setminus\Gamma$
Τότε:

$$\max_{\overline{\underline{O}}} u=\max_{\Gamma} u \qquad \left(\max_{(x,y)\in\Gamma} u(x,y)\right)$$

Απόδειξη: Έστω $M=\max\limits_{\Gamma} u$ και $\varepsilon>0$

Θέτουμε $v(x,t)=u(x,t)-\varepsilon t$
Τότε $V_t=u_t-\varepsilon=k\,u_{xx}-\varepsilon=k\,V_{xx}-\varepsilon$

$\exists\,(x_0,t_0)\in\overline{\underline{O}}$ ώστε $\max\limits_{\underline{O}} V=v(x_0,t_0)$

Ισχυρισμός: $(x_0,t_0)\in\Gamma$
Έστω ότι δεν ισχύει
– Περίπτωση 1: $(x_0,t_0)\in\underline{O}$
τότε $V_t(x_0,t_0)=0$ και $V_{xx}(x_0,t_0)\leq 0$
Άρα, $V_t(x_0,t_0)-k\,V_{xx}(x_0,t_0)\geq 0$, δηλαδή $-\varepsilon\geq 0$ άτοπο

– Περίπτωση 2: Αν $t_0=T$
τότε $V_t(x_0,t_0)\geq 0$ και $V_{xx}(x_0,t_0)\leq 0$

πάλι $V_t(x_0,t_0) - kV_{xx}(x_0,t_0) \geq 0$ άτοπο

Άρα, $\max\limits_{\bar{\Omega}} u \leq \max\limits_{\bar{\Omega}} V + \varepsilon T = \max V + \varepsilon T$

$$\leq \max_{\Gamma} u + \varepsilon T = M + \varepsilon T$$

Για $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε:

$$\max_{\bar{\Omega}} u \leq M = \max_{\Gamma} u \leq \max_{\bar{\Omega}} u$$

$$u_t - k u_{xx} \leq 0$$

Παρατήρηση: Για την απόδειξη ήταν αρκετό το ότι $u_t - k u_{xx} \leq 0$

Αρχή του ελαχίστου

Αν η u είναι όπως στην προηγούμενη πρόταση τότε $\min\limits_{\bar{\Omega}} u = \min\limits_{\Gamma} u$

Εφαρμογή

Πρόταση (Μοναδικότητα λύσης σε φραγμένο διάστημα)

Έστω $\Omega = (a,\beta) \times (0,\infty)$

Το πρόβλημα
$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx} + f(x,t) &&, (x,t) \in \Omega \\ u(x,0) &= \varphi(x) &&, x \in [a,\beta] \\ u(a,t) &= g(t) &&, t \geq 0 \\ u(\beta,t) &= h(t) &&, t \geq 0 \end{aligned}$$

με f,g,h δεδομένες

έχει το πολύ μία λύση $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,1}(\Omega)$

Απόδειξη

Έστω u_1, u_2 δύο λύσεις. Τότε η $u = u_1 - u_2 \in C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,1}(\Omega)$ είναι λύση και ικανοποιεί τις:

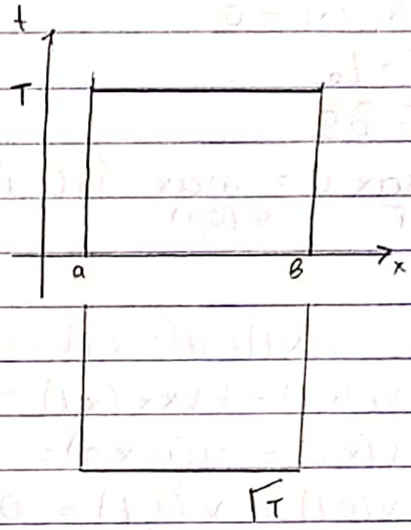
$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx} \quad \text{στο } \Omega \\ u(x,0) &= 0 \\ u(a,t) &= u(\beta,t) = 0 \end{aligned}$$

Για $T>0$ εφαρμόζουμε την αρχή του μεγίστου στην u στο $\Omega_T = (\alpha,\beta)\times(0,T)$

$\max\limits_{\overline{\Omega}_T} u = \max\limits_{\Gamma_T} u = 0$

Όμοια, $\min\limits_{\overline{\Omega}_T} u = \min\limits_{\Gamma_T} u = 0$

$\Rightarrow u\big|_{\overline{\Omega}_T} = 0$



Επειδή το T αυθαίρετο : $u\big|_{\overline{\Omega}_T} = 0$

Εφαρμογή: § 2.3 Strauss.

Πρόταση (Ισχυρή αρχή μεγίστου)

Έστω $u \in C([\alpha,\beta]\times[0,T]) \cap C^{2,1}((\alpha,\beta)\times(0,T])$ που ικανοποιεί την $u_t = k u_{xx}$ στο $(\alpha,\beta)\times(0,T]$ τότε:

$\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\Gamma} u$ και αν υπάρχει $(x_0,t_0) \in \overline{\Omega} - \Gamma$ με

$\max\limits_{\overline{\Omega}} u = u(x_0,t_0)$ τότε η u είναι σταθερή.

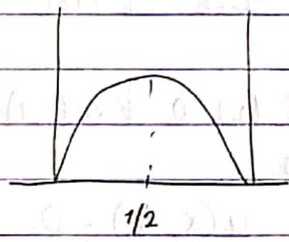
Άσκηση 4 (§2.3 Strauss)

$u \in C([0,1]\times[0,\infty)) \cap C^{2,1}((0,1)\times(0,\infty))$

$u_t = k u_{xx} \qquad (x,t) \in (0,1)\times(0,\infty)$

$u(0,t) = u(1,t) = 0 \qquad \forall\, t \geq 0$

$u(x,0) = 4x(1-x)$



(a) $0 < u(x,t) < 1 \qquad \forall\, t>0 \quad \forall\, x \in (0,1)$

(β) $u(x,t) = u(1-x,t) \qquad \forall\, t>0 \quad \forall\, x \in [0,1]$

(γ) Η $E(t) = \int_0^1 u^2(x,t)\,dx$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση: (α) Από αρχή ελαχίστου $u \geq 0$ στο $\overline{\Omega}$

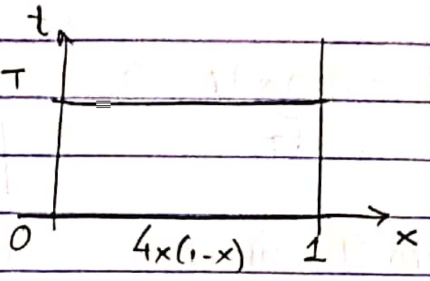
Από ισχυρή αρχή ελαχίστου $u > 0$ στο Ω

$u(x_0, t_0) = 0$

$T > t_0$

$\Gamma = \partial\Omega$

$$\max_{\Gamma} u = \max_{x \in [0,1]} 4x(x-1) = 1$$



(β) Η $v(x,t) = u(1-x,t)$ ικανοποιεί τις:

$$v_t(x,t) - k v_{xx}(x,t) = u_t(1-x,t) - k u_{xx}(1-x,t) = 0 \qquad (x,t) \in \Omega.$$

$$v(x,0) = u(1-x,0) = 4x(1-x)$$

$$\underset{\underset{u(1,t)}{\parallel}}{v(0,t)} = \underset{\underset{u(0,t)}{\parallel}}{v(1,t)} = 0 \qquad \forall t \geq 0$$

οι v, u λύνουν το ίδιο ΠΑΣΤ

Από θεώρημο μοναδικότητας $v = u$ στο $\overline{\Omega}$.

(γ)
$$E'(t) = 2\int_0^1 u u_t \, dx = 2\int_0^1 k u u_{xx} \, dx = \Big[2k u(x,t) \cdot u_x(x,t)\Big]_{x=0}^{x=1} - 2k\int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx$$

$$= -2k\int_0^1 u_x^2(x,t)\,dx \leq 0$$

Ισχυρισμός: $E'(t) < 0$, $\forall t \geq 0$

Αν όχι τότε $E'(t_0) = 0$ για κάποιο $t_0 > 0$

$u_x(x, t_0) = 0 \ \forall x \in (0,1) \Rightarrow u(x,t_0)$ σταθερή ως προς x

$u(0,t) = 0$

$\Longrightarrow u(x, t_0) = 0 \quad \forall x \in (0,1)$ άτοπο από (α)

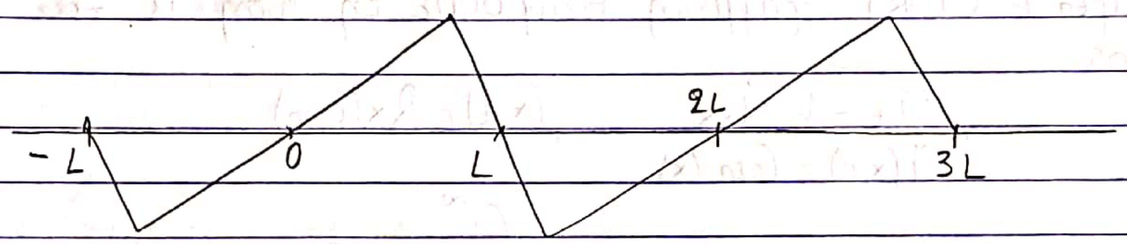
Λύση της εξίσωσης θερμότητας σε πεπερασμένο διάστημα

Έστω $L>0$. Θεωρούμε το ΠΑΣΤ:

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx} & , \text{στο } \Omega = (0,L)\times(0,\infty) \\ u(x,0) = \varphi(x) & , x\in[0,L] \ , \ \varphi \in C([0,L]) \\ u(0,t) = u(L,t) = 0 & \forall t>0 \end{cases}$$

όπου $\phi(0)=\phi(L)$

Θα δείξουμε ότι το πρόβλημα έχει λύση και θα δώσουμε τύπο για τη λύση



Επεκτείνουμε τη φ στο $[-L,L]$ με περιττό τρόπο και έπειτα περιοδικά, με περίοδο $2L$.

Η επέκταση $\varphi_{επ.}$ είναι περιττή στο $\mathbb{R}$ και περιττή με κέντρο το L.

Έστω $\varphi_0(x) = \begin{cases} \varphi(x) & , x\in[0,L] \\ 0 & , x\in\mathbb{R}\setminus[0,L] \end{cases}$

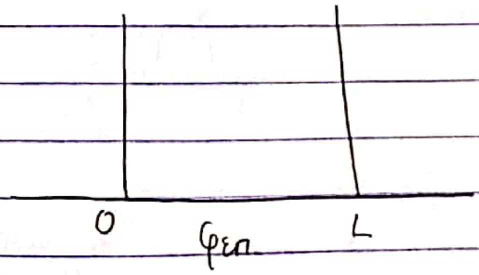
(Δηλαδή η $\varphi(L+x)$ περιττή
$\varphi(L-x) = -\varphi(L+x)$)

Αν $x\in[2kL, 2kL+1]$ τότε $\varphi_{επ}(x) = \varphi(x-2kL)$

Αν $x\in((2k-1)L, 2kL)$ τότε $\varphi_{επ}(x) = -\varphi(2kL-x)$

$\tilde{u}$, $u = \tilde{u}(\underline{\Omega})$

Άρα, $\varphi_{επ.}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(\varphi_0(x-2kL) - \varphi_0(2kL-x)\right)$



$2kL,\ 2kL+L,\ (2k-1)L,\ 2kL$

$$\varphi_{\varepsilon\pi.}(-x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \Big(\varphi_0(-x-2kL) - \varphi_0(2kL+x)\Big)$$

$0 < 2kL - x < L$
$(2k-1)L < x < 2kL$
$kL,\ kL+1$

$$\xlongequal{k=j} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \Big(\varphi_0(2Lj-x) - \varphi_0(-2Lj+x)\Big) = -\varphi_{\varepsilon\pi.}(x)$$

όμοια $\varphi_{\varepsilon\pi.}(L+x) = -\varphi_{\varepsilon\pi.}(L-x)$

Η $\varphi_{\varepsilon\pi.} \in C(\mathbb{R})$ φραγμένη. Θεωρούμε τη λύση $\tilde{u}$ του προβλήματος:

$$\tilde{u}_t = k\,\tilde{u}_{xx} \quad , (x,t)\in \mathbb{R}\times(0,\infty)$$
$$\tilde{u}(x,0) = \varphi_{\varepsilon\pi.}(x)$$

Αυτό έχει λύση την $\tilde{u}(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_{\varepsilon\pi.}(y)\, S(x-y,t)\, dy$

Η $u = \tilde{u}\big|_{[0,L]\times[0,\infty)}$ λύνει το αρχικό πρόβλημα.

Τετάρτη 27/11/19
Μάθημα 14ο

(Συνέχεια άσκησης από προηγούμενο μάθημα)

$$① \begin{cases} u_t = k u_{xx} & ,(x,t)\in (0,L)\times(0,\infty) \\ u(x,0)=\varphi(x) & ,x\in[0,L] \quad \varphi\in C([0,L]) \\ u(0,t)=u(L,t)=0 & ,t>0 \end{cases}$$
$\varphi(0)=\varphi(L)=0$

$$\varphi_0(x)=\begin{cases} \varphi(x) & ,x\in[0,L] \\ 0 & ,x\in\mathbb{R}\setminus[0,L] \end{cases}$$

$$\varphi_{\varepsilon\pi.}(x)=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(\varphi_0(x-2kL)-\varphi_0(2kL-x)\right)$$

Έστω $\tilde{u}$ μία λύση του $\left.\begin{matrix}\tilde{u}_t = k\tilde{u}_{xx} & ,(x,t)\in\mathbb{R}\times(0,\infty) \\ \tilde{u}(x,0)=\varphi_{\varepsilon\pi.}(x) & ,x\in\mathbb{R}\end{matrix}\right\}$ ②

$\varphi_{\varepsilon\pi.}\in C(\mathbb{R})$ φραγμένη

$$Η \quad \tilde{u}(x,t)=\begin{cases}\int_{\mathbb{R}}\varphi_{\varepsilon\pi}(y)\,S(x-y,t)\,dy & ,x\in\mathbb{R},\ t>0 \\ \varphi_{\varepsilon\pi.}(x) & ,x\in\mathbb{R},\ t=0\end{cases}$$

λύνει το ②
Θέτουμε το $u=\tilde{u}\big|_{[0,L]\times[0,\infty)}$

Η u λύνει το ① γιατί:
$u_t = k u_{xx}$
$u(x,0)=\tilde{u}(x,0)=\varphi_{\varepsilon\pi.}(x)=\varphi(x)$ $\quad x\in[0,L]$ $\quad C^{2,1}(\underline{O})\cap C(\overline{O})$
$\underline{O}=\mathbb{R}\times(0,\infty)$

$\varphi_{\varepsilon\pi.}$ είναι περιττή $\Rightarrow$ $\tilde{u}$ περιττή ως προς x $\forall t$
$\tilde{u}(-x,t)=-\tilde{u}(x,t)\Rightarrow\tilde{u}(0,t)=0$
$\Rightarrow u(0,t)=0$

$\varphi_{\varepsilon\pi.}(L-x) = -\varphi(L+x) \Rightarrow \tilde{u}$ περιττή με κέντρο L

$$\Rightarrow \tilde{u}(L-x,t) = -\tilde{u}(L+x,t)$$
$$\overset{x=0}{\Rightarrow} \tilde{u}(L,t) = -\tilde{u}(x,t)$$
$$\Rightarrow \tilde{u}(L,t) = 0$$
$$\Rightarrow u(L,t) = 0$$

Η εξίσωση θερμότητας δεν είναι ευσταθής προς τα πίσω στο χρόνο

π.χ στο $\mathbb{R}\times(-\infty,0]$

$$U_n(x,t) = \frac{1}{n}\sin(nx)\,e^{-n^2kt}, \quad n\in\mathbb{N}^+$$

$t<0 \downarrow$ $u(x,0)$

$u(x,t)$

$u(x,t) = \int \varphi(y)S(x-y,t)\,dy$

λύνει την $U_t = kU_{xx}$

$$u\cdot(-n^2k) = k(-n^2)u$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|U_n(x,0)\right| = \frac{1}{n}$$

αλλά για $t<0$ και x ώστε $\frac{U_x}{2k}\notin\mathbb{Z}$ έχουμε:

$$\lim_{u\to\infty} U_n(x,t) = \infty$$

Ή αν πάρουμε $u(x,t) = S(x,t+1) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi(t+1)}}\,e^{-\frac{x^2}{4k(t+1)}}$

αυτή έχει $u(x,0) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi}}\,e^{-\frac{x^2}{4k}}$

όμως $\lim_{t\to -1} u(x,t) = \infty$, $x\in\mathbb{R}$

$U_t = -kU_{xx}$ $\quad\tilde{u}\quad$ $\tilde{u}_t = k\tilde{u}_{xx}$ $\quad t\in\mathbb{R}, x\in\mathbb{R}$

Η $u(x,t) = \tilde{u}(x,-t)$ θα λύνει την $U_t = -kU_{xx}$

Άσκηση: Να αναγάγετε την $u_t = k u_{xx}$ στην $\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx}$

Λύση: Θέτουμε $\tilde{u}(x,t) = u\left(x, \frac{t}{k}\right)$

Τότε $\tilde{u}_t(x,t) = \frac{1}{k} u_t\left(x, \frac{t}{k}\right) = \frac{1}{k} k\, u_{xx}\left(x, \frac{t}{k}\right) = \tilde{u}_{xx}(x,t)$

Η $\tilde{u}$ λύνει την $\tilde{u}_t = \tilde{u}_{xx}$ $\qquad u(x,t) = \tilde{u}(x, kt)$

$\tilde{u} = u(\sqrt{k}x, t)$ $\qquad \tilde{u}_t = u_t(\sqrt{k}x, t)$

$\tilde{u}_{xx} = k u_{xx}(\sqrt{k}x, t)$

Χώροι Hilbert

Έστω X γραμμικός χώρος στο $\mathbb{R}$, $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$
Εσωτερικό γινόμενο στον X

Αυτό ορίζει νόρμα $\|\cdot\| : X \to [0,\infty)$ ως εξής:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}, \quad x \in X$$

και μετρική $d : X \times X \to [0,\infty)$: $d(x,y) = \|x - y\|$

Ορισμός: Αν ο (X,d) είναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε ο $(X, \langle , \rangle)$ λέγεται χώρος Hilbert.

π.χ. $\ell^2 = \left\{ (x_n)_{n \geq 1} : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty \right\}$ με $\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n$

Ένα $A \subset X$ το λέμε ορθοκανονικό αν:
$\langle u, v \rangle = 1_{u=v} \quad \forall u, v \in A$

Το λέμε ορθοκανονική βάση αν είναι ορθοκανονικό και

$$\langle A \rangle = X$$

$\hookrightarrow$ γραμμική θήκη

π.χ. στο ℓ^2 το $\{e_n = (0,0,\dots,1,0,0) : n \geq 1\}$ είναι ορθοκανονική βάση.
↳ θέση n

Πράγματι, $\langle e_n, e_n \rangle = 1$ $u=n$

Αν $x \in \ell^2$, $x = (x_1, x_2, \dots)$ με $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$

Για $n \in \mathbb{N}^+$ δεδομένο θέτουμε:

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0 \dots)$$

$$\|x - y_n\| = \|(0,0,\dots,0,x_{n+1},x_{n+1},\dots)\| = \sum_{k=n+1}^{\infty} x_k^2 \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

Άρα, $x \in \overline{\langle \quad \rangle}$ /

Θεώρημα: Αν X χώρος Hilbert, τότε ο X έχει ορθοκανονική βάση A και:

(1) $\|x\|^2 = \sum_{u \in A} |\langle x, u \rangle|^2 \quad \forall x \in X$ (ταυτότητα Parseval)

(2) Κάθε $x \in X$ γράφεται ως $x = \sum_{u \in A} \langle x, u \rangle u$

$$\left(\begin{array}{l} \text{Στον } \ell^2: \quad x = (x_1, x_2, \dots) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i e_i \\ \|x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 \end{array} \right)$$

Προβολή του x πάνω στο u: $\langle x, u \rangle \cdot u = P_{\langle u \rangle} x$

Αν $A \subset X$ είναι ορθοκανονική τότε:

$$\sum_{u \in A} |\langle x_i, u \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in X \quad \text{(ανισότητα Bessel)}$$

Παρατήρηση: Αν $x = \sum_{u \in A} \lambda_u u$, A ορθ. βάση τότε:
$\lambda_u = \langle x, u \rangle$ $\forall u \in A$, γιατί αν $u_0 \in A$

$$\langle x, u_0 \rangle = \sum_{u \in A} \lambda_u \langle u, u_0 \rangle = \lambda_{u_0} \langle u_0, u_0 \rangle = \lambda_{u_0}$$

Σειρές Fourier

$$L^2[-\pi,\pi] = \left\{ f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} f: \text{ Lebesque μετρήσιμη} \\ \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx < \infty \end{array} \right\}$$

(f τμηματικά συνεχής: $\{x\in[-\pi,\pi],\ f$ ασυνεχής στο $x\}$ πεπερασμένο και $f(x-), f(x+)$ υπάρχουν $\forall x\in[-\pi,\pi]$)

Ο $L^2[-\pi,\pi]$ με εσωτερικό γινόμενο το $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx$ είναι χώρος Hilbert

Το σύνολο $A = \underbrace{\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\}}_{\text{σταθερή συνάρτηση}} \cup \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx) : n\in\mathbb{N}^+\right\}$

είναι μία ορθοκανονική βάση στον $L^2[-\pi,\pi]$

ΧΡΗΣΙΜΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

(α) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mu x)\sin(nx)\,dx = 0 \quad \forall \mu,n\in\mathbb{N}$

(β) $\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mu x)\cos(nx)\,dx = \begin{cases} 0, & \text{αν } \mu\neq n \\ \pi, & \text{αν } \mu=n\neq 0 \\ 2\pi, & \text{αν } \mu=n=0 \end{cases} \Big\}\ \pi\, 1_{\mu=n}$

(γ) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(\mu x)\sin(nx)\,dx = \pi\, 1_{\mu=n}$

<u>Απόδειξη:</u> (α) $2\cos(\mu x)\sin(nx) = \underbrace{\sin((\mu+n)x) + \sin((n-\mu)x)}_{\text{περιττές}}$

(β) $2\cos(\mu x)\cos(nx) = \cos((\mu+n)x) + \cos((\mu-n)x)$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(kx)dx = \begin{cases} 2\pi & , k=0 \\ \frac{1}{k}\left(\sin(k\pi) - \sin(-k\pi)\right) = 0 & , \text{αν } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Αν $\mu = n = 0$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$

Αν $\mu \neq n$ $\quad \int_{-\pi}^{\pi} = 0$

Αν $\mu = n \neq 0$ $\quad 2\int_{-\pi}^{\pi} \cos(\mu x)\cos(nx) = 0 + 2\pi$

Δείχνουμε μόνο ότι το A είναι ορθοκανονικό

Έστω $e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)$, $\tilde{e}_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$, $e_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^2 dx\right)^{1/2} = 1^{1/2} = 1$$

$$\|e_n\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\cos^2(nx)dx\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{\pi}\cdot\pi\right)^{1/2} = 1$$

$$\|\tilde{e}_n\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\pi}\sin^2(nx)dx\right)^{1/2} = 1^{1/2} = 1$$

Για $n \neq 0$:

$$\langle e_0, e_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\left.\frac{\sin(nx)}{n}\right|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\langle e_0, \hat{e}_n \rangle = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)dx = 0$$

$\langle e_\mu, \hat{e}_n \rangle = 0 \quad \forall \mu, n$

$\langle \tilde{e}_n, \tilde{e}_\mu \rangle = 0$

Αφού το A ορθοκανονική βάση, κάθε $f \in L^2[-\pi,\pi]$ γράφεται ως:

$$f = \langle f, e_0 \rangle e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\langle f, e_n \rangle e_n + \langle f, \tilde{e}_n \rangle \tilde{e}_n \right)$$

Θέτουμε:

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N} \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx, \quad n \in \mathbb{N}^+ \end{aligned}\right\} \text{Συντελεστές Fourier.}$$

$$\langle f, e_0 \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)\,dx$$

Άρα, $\langle f, e_0 \rangle e_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2} a_0$

$$\langle f, e_n \rangle e_n(x) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt)\,dt \right) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nt)\,dt \quad \cos(nx) = a_n \cos(nx)$$

όμως $\langle f, \tilde{e}_n \rangle \tilde{e}_n(x) = b_n \cdot \sin(nx)$

Άρα $f \sim \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$

Το παραπάνω το λέμε σειρά Fourier της f

Δευτέρα 2/12/19
Μάθημα 15ο

Παράδειγμα

$f(x)=x$, $x\in[-\pi,\pi]$. Να υπολογιστεί η σειρά Fourier της f.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\underbrace{x\cos(nx)}_{\text{περιττή}}dx=0 \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\left(-\frac{\cos(nx)}{n}\right)'dx=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\pi}{n}\cos(n\pi)-0\right)+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\cos(nx)}{n}dx$$

Αυτό το ολοκλ. βγαίνει 0

$$=-\frac{2}{n}(-1)^n=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}$$

διότι: $\cos(n\pi)=(-1)^n$

Άρα, $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx)$

Εφαρμογή της ισότητας Parseval στην $f(x)=x$

$$\|f\|^2=|\langle f,e_0\rangle|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|\langle f,e_n\rangle|^2+|\langle f,\tilde{e}_n\rangle|^2$$

$$f=\langle f,e_0\rangle+\sum_{n=1}^{\infty}\langle f,e_n\rangle e_n+\langle f,\tilde{e}_n\rangle e_n$$

Όπως θα δούμε πιο κάτω αυτοί δεν είναι οι συντελεστές Fourier. Διαφέρουν κατά ένα πολλαπλάσιο θα προκύψει: $\langle f,e_n\rangle=\sqrt{\pi}a_n$, $\langle f,\tilde{e}_n\rangle=\sqrt{\pi}b_n$

$e_0=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $e_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)$, $\tilde{e}_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$

$\langle f,e_0\rangle=0 \quad \forall n$

Έχουμε: $\langle f,\tilde{e}_n\rangle\tilde{e}_n=b_n\sin(nx)\Rightarrow\langle f,\tilde{e}_n\rangle\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)=b_n\cdot\sin(nx)$

$\Rightarrow\langle f,\tilde{e}_n\rangle=\sqrt{\pi}\cdot b_n$

(Όμοια προκύπτει ότι $\langle f,e_n\rangle=\sqrt{\pi}a_n$ και $n\geq1$, ενώ $\langle f,e_0\rangle=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}a_0$)

Οπότε η Parseval γράφεται:

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{n=1}^{\infty} \pi \cdot b_n^2 \Rightarrow \frac{2}{3}\pi^3 = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

→ ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Άσκηση: Έστω $f \in C^1([-\pi,\pi])$ με $f(-\pi) = f(\pi)$. Αν $(a_n)_{n\geq 0}$, $(b_n)_{n\geq 0}$ είναι οι συντελεστές Fourier της f και $(a_n')_{n\geq 0}$, $(b_n')_{n\geq 0}$ είναι οι συντελεστές Fourier της f'. Τότε $a_n' = n \cdot b_n$, $b_n' = -n\, a_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ (ορίζουμε $b_0 = b_0' = 0$)

Λύση: • $a_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos(nx)dx = \frac{1}{\pi} f(x)\cos(nx)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-n\sin(nx))dx$

$$= \frac{1}{\pi}\Big(\underbrace{f(\pi)\cos(n\pi) - f(-\pi)\cos(-n\pi)}_{0 \text{ (αφού } f(\pi)=f(-\pi))}\Big) + n\, b_n$$

$$= n \cdot b_n$$

• $b_n' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\sin(nx)dx = \ldots = -n \cdot a_n$

Πρόταση: Έστω $k \in \mathbb{N}$ και $f \in C^k([-\pi,\pi])$ με $f^{(r)}(-\pi) = f^{(r)}(\pi)$ με $r = 0,1,\ldots,k-1$ $(0 \leq r \leq k-1)$
Τότε υπάρχει $c \in (0,\infty)$ με $|a_n| \leq \frac{c}{n^k}$, $|b_n| \leq \frac{c}{n^k}$ $\forall n \geq 1$

↳ ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑ: Από $k=2$ και πάνω, οι συντελεστές είναι αθροίσιμοι

Απόδειξη: $\boxed{1^{ος} \text{ τρόπος}}$

Έστω $(a_n^{(r)})_{n\geq 0}$, $(b_n^{(r)})_{n\geq 1}$ οι συντελεστές Fourier της $f^{(r)}$, $r = 0,1,\ldots,k$

Αν k άρτιος: Εφαρμόζουμε την προηγούμενη άσκηση $\frac{k}{2}$

• $a_n^{(k)} = n \cdot b_n^{(k-1)} = -n^2 a_n^{(k-2)} = \ldots = (-1)^{\frac{k}{2}} n^k a_n^{(0)}$

• $b_n^{(k)} = -n\, a_n^{(k-1)} = -n^2 \cdot b_n^{(k-2)} = \ldots = (-1)^{\frac{k}{2}} n^k b_n^{(0)}$

Αν k περιττός: • $a_n^{(k)} = (-1)^{\frac{k-1}{2}} n^k b_n^{(0)}$

• $b_n^{(k)} = (-1)^{\frac{k+1}{2}} n^k a_n^{(0)}$

Έστω $M = \sup\{ |f^{(k)}(x)| : x \in [-\pi,\pi] \} < \infty$

Τότε:
$$|a_n^{(k)}| = \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x)\cos(nx)\,dx \right| \leq \frac{2\cancel{\pi}}{\cancel{\pi}} M = 2M$$

όμοια $|b_n^{(k)}| \leq 2M$

Άρα,

- $|a_n^{(0)}| \leq \dfrac{2M}{n^k}$

- $|b_n^{(0)}| \leq \dfrac{2M}{n^k}$

2ος τρόπος

Επαγωγικά

- $a_n = \dfrac{(-1)^k}{n^k} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) \cos\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) dx$

- $b_n = \dfrac{1}{n^k} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(x) \sin\left(nx + \frac{k\pi}{2}\right) dx$

Γενικά $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, αρκεί $f \in L^1[-\pi,\pi]$

Πρόταση (Riemann-Lebesque)

Έστω $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη με $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx < \infty$

τότε: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \text{και} \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Σύγκλιση σειρών Fourier

(στον L^2, σημειακή, ομοιόμορφη)

1) Σύγκλιση στον L^2

Έστω $f \in L^2[-\pi,\pi]$ με σειρά Fourier: $f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)$

Θέτουμε $S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \right)$, $n \in \mathbb{N}^+$

1) Ισχύει $S_n f \to f$ στον $L^2[-\pi,\pi]$

Δηλαδή: $\int_{-\pi}^{\pi} |S_n f(x) - f(x)|^2 dx \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Κύμανση

Έστω $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Για $\Delta = \{a = x_0 < x_1 \ldots < x_n = b\}$ διαμέριση του $[a,b]$, θέτουμε $V_f(\Delta) = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$

Κύμανση της f ονομάζουμε τον αριθμό

$$V_f = \sup\{V_f(\Delta) : \Delta \text{ διαμέριση του } [a,b]\}$$

Αν $V_f < \infty$ λέμε ότι η f είναι φραγμένης κύμανσης.

Αν η f' είναι τμηματικά συνεχής τότε η f είναι Lipschitz

Άσκηση: Αν f Lipschitz $\Rightarrow V_f < \infty$

Λύση: Έστω $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$ $\forall x,y \in [a,b]$ τότε $\forall \Delta$

$$V_f(\Delta) \leq M \sum_{i=1}^{n} |x_i - x_{i-1}| = M \cdot |b-a|$$

f φραγμένης κύμανσης στο $[a,b] \Rightarrow \exists g,h : [a,b] \to \mathbb{R}$ αύξουσες ώστε $f = g - h$

2) Σημειακή σύγκλιση

Για $\delta \in (0,\pi)$ και $x \in [-\pi,\pi]$, θέτουμε:

$$U_\delta(x) = \begin{cases} (x-\delta, x+\delta) \cap [-\pi,\pi] & , \text{αν } x \in (-\pi,\pi) \\ [-\pi, -\pi+\delta) \cup (\pi-\delta, \pi) & , \text{αν } x=-\pi \text{ ή } x=\pi \end{cases}$$

Θεώρημα I (Jordan)

Έστω $f \in L^2[-\pi,\pi]$, $x_0 \in [-\pi,\pi]$ και ότι $\exists\, \delta \in (0,\pi)$ ώστε η $f|_{U_\delta(x_0)}$ να είναι φραγμένης κύμανσης.
(πότε ισχύει αυτό; π.χ όταν η f' είναι τμηματικά συνεχής)
Τότε:

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = \frac{f(x_0^-) + f(x_0^+)}{2} \quad (*)$$

ΔΙΕΥΚΡΙΝΗΣΕΙΣ

- Αν $x_0 = -\pi$, τότε $f(x_0^-)$ εννοούμε το $f(\pi^-)$
- Αν $x_0 = \pi$, τότε $f(x_0^+)$ εννοούμε το $f((-\pi)^+)$
- Τα όρια $f(x_0^-)$, $f(x_0^+)$ υπάρχουν

Πόρισμα

Αν $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ τμηματικά συνεχής ώστε να υπάρχει $A \subset [-\pi,\pi]$ πεπερασμένο ώστε η f' να υπάρχει στο $[-\pi,\pi] \setminus A$ και η f' να έχει πλευρικά όρια σε κάθε $x \in [-\pi,\pi]$. Τότε η $(*)$ ισχύει σε κάθε $x_0 \in [-\pi,\pi]$

Παράδειγμα: Για την $f(x) = x$, $x \in [-\pi,\pi]$ έχουμε:

$$x \sim 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx)$$

Η f είναι συνεχής και $f \in C^1([-\pi,\pi])$. Το πόρισμα εφαρμόζεται.

Άρα με βάση τη σχέση $(*)$ θα έχουμε:

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx) = \begin{cases} x, & \text{αν } x\in(-\pi,\pi) \\ 0, & \text{αν } x=-\pi \text{ ή } x=\pi \end{cases}$$

$$\frac{f(x_0^-)+f(x_0^+)}{2} = \frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2} = 0$$

Τετάρτη 4/12/19
Μάθημα 16ο

Στο προηγούμενο μάθημα είδαμε ότι:

$$x \sim 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(nx) \quad , x\in[-\pi,\pi]$$

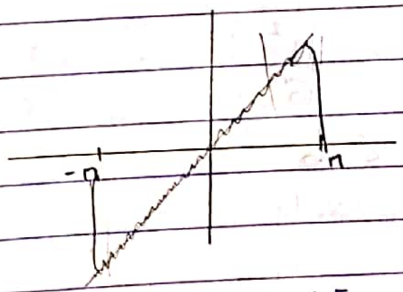
και είδαμε ότι συγκλίνει στο $\begin{cases} x & , x\in(-\pi,\pi) \\ 0 & , x=-\pi \text{ ή } x=\pi \end{cases}$

Το όριο δεν είναι ομοιόμορφο. Θα δούμε ότι αν απομακρυνθούμε από τα άκρα, το όριο θα είναι ομοιόμορφο. (ομοιόμορφη σύγκλιση)

3) Ομοιόμορφη Σύγκλιση

Θεώρημα 2 (Jordan)
Έστω $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ φραγμένης κύμανσης. Αν $I\subset[-\pi,\pi]$ κλειστό διάστημα και $f|_I$ συνεχής (αν $-\pi$ ή $\pi\in I$, απαιτούμε επιπλέον $f(-\pi)=f(\pi)$) τότε $S_n f\to f$ ομοιόμορφα στο I

- $S_n f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos(kx)+\beta_k\sin(kx)\right)$



Για μεγάλα n έχουμε μεγάλη ταύτιση. Στα άκρα "πέφτουμε" απότομα στο 0.

Ειδική περίπτωση: Έστω $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(-\pi)=f(\pi)$ για την οποία υπάρχει $A\subset[-\pi,\pi]$ πεπερασμένο, ώστε η f' να υπάρχει στο $[-\pi,\pi]\setminus A$, να είναι συνεχής εκεί και να υπάρχουν τα $f'(x-)$, $f'(x+)$ $\forall x\in[-\pi,\pi)$ (πλευρικά όρια) τότε η f είναι Lipschitz στο $[-\pi,\pi]$ άρα φραγμένης κύμανσης, οπότε $S_n f\to f$ ομοιόμορφα στο $[-\pi,\pi]$

• Για την x έχουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στο $[-\pi+\varepsilon, \pi-\varepsilon]$ $(\varepsilon \in (0,\pi))$

Υπενθύμιση (Parseval) : $$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + \beta_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,dx$$

ΟΧΙ ΓΙΑ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Άσκηση: Αν $f: [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f(-\pi) = f(\pi)$ και υπάρχει η $f': [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ και είναι τμηματικά συνεχής. Τότε $S_n f \to f$ ομοιόμορφα στο $[-\pi,\pi]$

Απόδειξη: (Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1 (Jordan) / βλέπε μάθημα 15ο)

Με βάση το Θεώρημα 1 (Jordan) ισχύει $S_n f(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$, $\forall x \in [-\pi,\pi]$

Η $S_n f$ συγκλίνει ομοιόμορφα γιατί:

Παρατηρούμε ότι: $|a_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)| \leq |a_n| + |\beta_n|$ $\forall x \in [-\pi,\pi]$

επίσης, $a_n' = n \cdot \beta_n$, $\beta_n' = -n \cdot a_n$

Άρα,
$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |\beta_n|) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{|a_n'|}{n} + \frac{|\beta_n'|}{n} \right) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n'| + |\beta_n'|\right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right)^{1/2}$$

⊛ Εδώ χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα: $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$

$$\overset{⊛}{\leq} \left(2 \sum \left(|a_n'|^2 + |\beta_n'|^2\right) \right)^{1/2} \cdot \frac{\pi^2}{6}$$

$$\overset{\text{Parseval}}{\leq} 2 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f'(x))^2 dx \right)^{1/2} \frac{\pi^2}{6} < \infty$$

Σειρές Fourier στον $L^2[-\ell, \ell]$, $\ell > 0$

[Ίδια θεωρία.

• Αν $f \in L^2[-\ell,\ell]$ τότε $g(x) = f\left(\frac{x}{\pi} \cdot \ell\right) \in L^2[-\pi,\pi]$]

Χρησιμοποιούμε μετασχηματισμό

Εσωτερικό γινόμενο : $\langle f, g \rangle = \int_{-\ell}^{\ell} f(x) g(x)\, dx$

Ορθοκανονική βάση: $\frac{1}{\sqrt{2\ell}}, \frac{1}{\sqrt{\ell}}\cos\left(\frac{\pi}{\ell}nx\right), \frac{1}{\sqrt{\ell}}\sin\left(\frac{\pi}{\ell}nx\right), n\geq 1$

Σειρά Fourier μιας $f\in L^2[-\ell,\ell]$ είναι η:

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi}{\ell}nx\right)+\beta_n\sin\left(\frac{\pi}{\ell}nx\right)\right)$$

με $a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{\ell}nx\right)dx$, $n\in\mathbb{N}$

$$\beta_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{\ell}nx\right)dx \quad , n\in\mathbb{N}^+$$

Ισχύουν αντίστοιχα θεωρήματα όπως στον $L^2[-\pi,\pi]$

π.χ. (Αλικάκος)

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+\beta_n^2\right)=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}f^2(x)dx$$

Ημιτονικές και Συνημιτονικές σειρές Fourier

$\boxed{1}$ Αν $f\in L^2[-\ell,\ell]$ είναι άρτια, τότε:

$\beta_n=0$, $\forall n\geq 1$

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\left(\frac{\pi}{\ell}nx\right)dx$$

και

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi}{\ell}nx\right)$$

$\boxed{2}$ Αν $f\in L^2[-\ell,\ell]$ περιττή, τότε:

$a_n=0$, $\forall n\geq 1$

$$\beta_n = \frac{2}{\ell}\int_a^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n}{\ell}\pi x\right)dx$$

και $\quad f \sim \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{n}{\ell}\pi x\right)\frac{n\pi}{\ell} \qquad [0,\ell]$

Παραγώγιση σειρών

Πρόταση: (Απει II, βιβλίο Νεγρεπόντη, Πρόταση 27.29)
Έστω $f_n: [a,\beta] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ ακολουθία συναρτήσεων ώστε:
(α) f_n παραγωγίσιμη στο $[a,\beta]$
(β) $\exists x_0 \in [a,\beta]$ ώστε το $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ να υπάρχει
(γ) $\exists g: [a,\beta] \to \mathbb{R}$ ώστε $f'_n \longrightarrow g$ ομοιόμορφα.

Τότε υπάρχει $f: [a,\beta]$ ώστε:
- $f_n \to f$ ομοιόμορφα
- f παραγωγίσιμη
- $f' = g$

$f'_n \to g = f'$
$f_n \to f$

Αν f'_n συνεχής $\forall n$ τότε:

$$f(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt + \lim f_n(x_0)$$

$$f_n(x) - f_n(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'_n(t)\,dt \qquad \text{(από Θεμ. Θεωρ. Απειρ. Λογισμού)}$$

Πόρισμα: Έστω $f_n: [a,\beta] \to \mathbb{R}$, $n \geq 1$ ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων ώστε:

(α) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει $\forall x \in [a,\beta]$ σε μία συνάρτηση f

(β) $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[a,\beta]$ σε μία συνάρτηση g.

Τότε η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$

Δηλαδή $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$

<u>Απόδειξη</u>: Εφαρμόζουμε την πρόταση στην ακολουθία

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΧΩΡΙΣΜΟΥ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Χρησιμοποιείται για την επίλυση εξισώσεων της μορφής $\mathcal{L}u = f$ (όπου $\mathcal{L}$ γραμμικός διαφορικός τελεστής, στις μεταβλητές x,t) σε χωρία $U \times I$ με U φραγμένο ($x \in U$, $t \in I$)

<u>π.χ</u> $\mathcal{L}u = u_t - k u_{xx}$ ή $u_{tt} - c^2 u_{xx}$

<u>Παράδειγμα</u>: Να λυθεί το ΠΑΣΤ

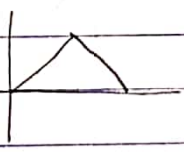
$$u_t = k u_{xx} \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty) \quad (1)$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad \forall t \geq 0 \quad (2)$$
$$u(x,0) = \phi(x), \quad \forall x \in [0,\pi] \quad (3)$$

στις περιπτώσεις : (i) $\phi(x) = 3\sin(2x) - 5\sin(10x)$

(ii) $\phi(x) = x \wedge (\pi - x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi/2] \\ \pi - x, & x \in (\pi/2, \pi] \end{cases}$

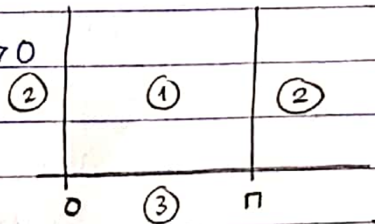
<u>Λύση</u>: $\boxed{\text{Βήμα 1}}$ Βρίσκουμε γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις της (1) που έχουν τη μορφή:

$u(x,t) = X(x)\,T(t)$ και ικανοποιούν τις (2),(3)



Θέλουμε $X(x)\,T'(t) = k\,X''(x)\,T(t)$, $\forall x \in (0,\pi)$ $\forall t > 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda$$



με $C^{2,1}\big((0,\pi)\times(0,\infty)\big) \cap C\big([0,\pi]\times[0,\infty)\big)$

Για να ισχύει η (2) πρέπει $X(0)=X(\pi)=0$ γιατί

$0 = u(0,t) = X(0)\,T(t)$, $T(t) \neq 0$

έχουμε λοιπόν $X''(x) + \lambda X(x) = 0$

$T'(t) + \lambda k T(t) = 0$

Ισχύει ότι $\lambda > 0$

Γιατί $\displaystyle\int_0^{\ell} \left(X(x)\, X''(x) + \lambda X^2(x) \right) dx = 0$

$$\Rightarrow \underbrace{\lambda \int_0^{\ell} X^2(x)\,dx}_{>0} = -\int_0^{\ell} X X''\,dx = -\left[X(x)\,X'(x)\right]_0^{\pi} + \underbrace{\int_0^{\ell} (X'(x))^2\,dx}_{>0}$$

(Κεφ. 4 : Strauss , Αλικάκος : ίδιο κεφάλαιο με σειρές Fourier)

Δευτέρα 9/12/19
Μάθημα 17ο

Άσκηση από προηγούμενο μάθημα

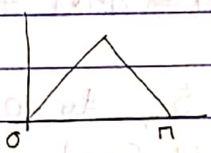
$u_t = k u_{xx} \qquad (x,t) \in (0,\pi)\times(0,\infty) = \Omega \qquad (1)$

$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \qquad t \geq 0 \qquad (2) \longrightarrow X(0)T(t) = X(\pi)T(t) = 0$

$u(x,0) = \phi(x) \qquad x \in [0,\pi] \qquad (3) \qquad \Rightarrow X(0) = X(\pi) = 0$

(i) $\phi(x) = 3\sin(2x) - 5\sin(10x)$

(ii) $\phi(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - x, & x \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$



Βήμα 1 : (1), (2) : $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$

$$X(x)\cdot T'(t) = k\, X''(x)\, T(t) \xRightarrow{\frac{1}{X\cdot T}} \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda$$

Κάναμε διερεύνηση και είδαμε ότι θα πρέπει $\lambda > 0$

Τότε: $X''(x) + \lambda \cdot X(x) = 0$

[Ψάχνουμε για λύση της μορφής e^{ax} : $a^2 + \lambda = 0$ (χαρακτ. εξίσωση)

$a = \pm i\sqrt{\lambda}$]

Γενική λύση : $X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$X(\pi) = 0 \Rightarrow B\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$

$\rightarrow$ Αν $B = 0$ τότε $X \equiv 0$, άτοπο γιατί $X \neq 0$. Άρα, $\sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$,
δηλαδή $\sqrt{\lambda}\pi = n\pi$, $n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}^+$

Οπότε $X(x) = B\sin(nx)$

$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0 \Rightarrow (T(t)\cdot e^{\lambda k t})' = 0 \Rightarrow T(t) = c\cdot e^{-\lambda k t}$$

Άρα, λύσεις: $u_n(x,t) = e^{-n^2 k t}\sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}^+$
(δε χρειάζεται να κρατήσω τις σταθερές c, B για τη u_n)

Βήμα 2: Βρίσκουμε "γραμμικό συνδυασμό" των λύσεων του βήματος 1, που να ικανοποιεί την αρχική συνθήκη (3)
Δηλαδή, αναζητούμε $A_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, ώστε η:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n(x,t)$$

να έχει $u(x,0) = \phi(x)$
Δηλαδή:
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(nx) = \phi(x) \overset{(i)}{=} 3\sin(2x) - 5\sin(10x)$$

Αρκεί $A_2 = 3$, $A_{10} = -5$, $A_n = 0$ $n \in \mathbb{N}^+ \setminus \{2,10\}$
Θέτουμε: $u(x,t) = 3U_2(x,t) - 5U_{10}(x,t)$
$$= 3e^{-4kt}\sin(2x) - 5e^{-100kt}\sin(10x)$$

Βήμα 3: Επαληθεύουμε ότι η u του βήματος 2 λύνει το αρχικό πρόβλημα.
$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^{2,1}(\Omega)$
Η (1) ικανοποιείται γιατί:
$$u_t - k u_{xx} = 3(U_2)_t - 5(U_{10})_t - k3(U_2)_{xx} + k5(U_{10})_{xx}$$
$$= 3\left((U_2)_t - k(U_2)_{xx}\right) - 5\left((U_{10})_t - k(U_{10})_{xx}\right)$$
$$= 0$$

Η (2) ικανοποιείται γιατί:
$u(0,t) = 3U_2(0,t) - 5U_{10}(0,t) = 0$ και όμοια $u(\pi,t) = 0$

Τέλος, $u(x,0) = 3U_2(x,0) - 5U_{10}(x,0) = \phi(x)$, από την επιλογή των συντελεστών A_n, $n \in \mathbb{N}^+$

Για το (ii) τώρα:
Βήμα 1: Το ίδιο με πριν

Βήμα 2: Αναζητούμε $A_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$ ώστε η $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n U_n(x,t)$

να έχει $u(x,0) = \phi(x) \quad \forall x \in [0,\pi]$.

Δηλαδή:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \sin(nx) = x \wedge (\pi - x)$$

Αυτή είναι η διατύπωση που ορίσαμε στην αρχή. Το γράφουμε έτσι για συντομία.

Επεκτείνουμε την φ στο $[-\pi,\pi]$ με περιττό τρόπο.
Παίρνουμε την φπερ.
Η σειρά Fourier της φπερ. είναι:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(nx) + \beta_n \cdot \sin(nx)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{περ.}(x) \cdot \cos(nx)\, dx = 0$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{περ.}(x) \cdot \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \phi(x) \cdot \sin(nx)\, dx$$

$$\frac{\pi}{2} \beta_n = \int_0^{\pi/2} x \sin(nx)\, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x) \cdot \sin(nx)\, dx$$

$$\overset{y=\pi-x}{=} \int_0^{\pi/2} x \sin(nx)\, dx + \int_0^{\pi/2} y \underbrace{\sin(n\pi - ny)}_{(-1)^n \sin(-ny)}\, dy$$

$$= \left(1 + (-1)^{n+1}\right) \int_0^{\pi/2} x \sin(nx)\, dx$$

• n άρτιος $\Rightarrow \beta_n = 0$

$n = 2\nu + 1$, $\nu \in \mathbb{N}$. Τότε:

$$\frac{\pi}{2} \beta_n = 2 \left[-\frac{\pi}{2} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n} + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(nx)}{n}\, dx \right]$$

$$= \frac{2}{n} \left[\frac{\sin(nx)}{n} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \frac{2}{n^2} (-1)^{\nu}$$

$$\Rightarrow \beta_{2\nu+1} = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{\nu}}{(2\nu+1)^2}$$

Η $\phi_{περ.}$ είναι φραγμένης κύμανσης (π.χ. είναι Lipschitz) συνεχής στο $[-\pi,\pi]$ και $\phi_{περ.}(-\pi) = \phi_{περ.}(\pi)$

Άρα, $\phi_{περ.}(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \beta_{2v+1} \sin((2v+1)x)$ $\forall x \in [-\pi,\pi]$ και η σύγκλιση της σειράς είναι ομοιόμορφη στο $[-\pi,\pi]$

Θέτουμε λοιπόν: $u(x,t) = \sum_{v=0}^{\infty} \beta_{2v+1} \cdot U_{2v+1}(x,t)$

$$= \frac{4}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-1)^v}{(2v+1)^2} e^{-(2v+1)^2 kt} \sin((2v+1)x)$$

Η u είναι καλά ορισμένη γιατί: $\sum_{v=0}^{\infty} \left|\beta_{2v+1} U_{2v+1}(x,t)\right| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(2v+1)^2} < \infty$

Βήμα 3: Η u λύνει το ΠΑΣΤ

Η σειρά που ορίζει την u, συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{\Omega}$

(γιατί $\sum_{v=0}^{\infty} \sup_{x\in\overline{\Omega}} \left|\beta_{2v+1} \cdot U_{2v+1}(x,t)\right| \leq \frac{4}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} \frac{1}{(2v+1)^2} < \infty$ (B-W))

και οι όροι της είναι συνεχείς συναρτήσεις

Άρα, $u \in C(\overline{\Omega})$

Για τη (2):

- $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ αφού $U_n(0,t) = U_n(\pi,t) = 0$ $\forall n$

Για την (3):

- $u(x,0) = \sum_{v=0}^{\infty} \beta_{2v+1} \cdot \sin((2v+1)x) = x \wedge (\pi - x) = \phi(x)$ $\forall x \in [0,\pi]$

Για την (1):

Ισχυρισμός: $U_t, U_x, U_{xx} \in C(\Omega)$ και οι παράγωγοι αυτοί προκύπτουν με παραγώγιση όρο προς όρο.

Απόδειξη ισχυρισμού: Αρκεί να δείξουμε τον ισχυρισμό στο $\Omega_{\varepsilon,M} = (0,\pi)\times(\varepsilon,M)$ $\forall\, 0 < \varepsilon < M$

Η σειρά $\sum_{v=0}^{\infty} \beta_{2v+1}\, \partial_t U_{2v+1}(x,t)$, συγκλίνει ομοιόμορφα στο

$\overline{\Omega}_{\varepsilon,M}$ γιατί αυτή ισούται με $\frac{4}{\pi} \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v e^{-(2v+1)^2 kt} \sin((2v+1)x)\,(-k)$

Εφαρμόζουμε κριτήριο Weierstrass (B-W)

$$\sum_{v=0}^{\infty} \sup_{(x,t)\in \overline{\Omega}_{\varepsilon,M}} \left| e^{-(2v+1)^2 kt} \sin((2v+1)x) \right| \leq \sum_{v=0}^{\infty} e^{-(2v+1)^2 k\varepsilon} < \infty$$

(Θέλουμε να πάρουμε την απόσταση ε στο χώρο, γιατί διαφορετικά σε αυτό το βήμα δεν θα είχαμε σύγκλιση της σειράς)

Το ίδιο και η σειρά της u. Άρα, η u_t υπάρχει και προκύπτει με παραγώγιση της σειράς, όρο προς όρο.
Από τα παραπάνω, η $\sum_{v=0}^{\infty} \beta_{2v+1} \partial_t u_{2v+1}(x,t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\overline{\Omega}_{\varepsilon,M}$

$\left(\Omega = \bigcup_{0<\varepsilon<M} \Omega_{\varepsilon,M} \right)$ Έπεται ότι: $u_t \in C(\Omega)$

Όμοια αντιμετωπίζουμε και τα u_x, u_{xx} $\perp$

Ο ισχυρισμός δίνει ότι $u \in C^{2,1}(\Omega)$ και επίσης ότι η u ικανοποιεί την (1) γιατί:

$$u_t - k u_{xx} = \sum_{v=0}^{\infty} \beta_{2v+1} \left(\partial_t u_{2v+1}(x,t) - k \partial_{xx} u_{2v+1}(x,t) \right)$$

$$= \sum_{v=0}^{\infty} \beta_{2v+1} \cdot 0 = 0$$

Τετάρτη 11/12/19
Μάθημα 18ο

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1) Οι αριθμοί $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το πρόβλημα

$$X''(x) = \lambda X(x) \quad \forall x \in (0,\pi)$$
$$X(0) = X(\pi) = 0$$

να έχει λύση $X \not\equiv 0$, λέγονται ιδιοτιμές του και κάθε λύση $X \not\equiv 0$ ιδιοσυνάρτηση

2) Για να δείξουμε στο πιο πάνω πρόβλημα ότι πρέπει $\lambda > 0$, μπορούμε να κάνουμε το εξής:

▶ Αν $\lambda = 0$ τότε $X(x) = Ax + B$

$$\left.\begin{aligned} &X(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \\ &X(\pi) = 0 = A\pi \Rightarrow A = 0 \end{aligned}\right\} X \equiv 0 \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

▶ Αν $\lambda < 0$ Έστω $a = -\sqrt{-\lambda}$

$$X(x) = A \cdot e^{-ax} + B \cdot e^{ax}$$
$$0 = X(0) = A + B \Rightarrow B = -A$$
$$0 = X(\pi) = A \cdot e^{-a\pi} - A e^{a\pi} = A e^{-a\pi}(1 - e^{2a\pi})$$
$$\xRightarrow{A \neq 0} e^{2a\pi} = 1 \Rightarrow a = 0 \quad \text{ΑΤΟΠΟ}$$

Παρατήρηση για την πρόοδο:
Όταν έχουμε $y'(t) + a(t)y(t) = 0$ τότε επιλέγω να τη λύσω ως γραμμική και όχι ως χωριζομένων μεταβλητών.
Δηλαδή, παίρνω ολοκληρωτικό παράγοντα και έχω: $\left(e^{a(t)} y(t)\right)' = 0$

Άσκηση (6 από την παράγραφο 4.1 - Strauss)
Να δειχθεί ότι το πρόβλημα ⊛ έχει άπειρες λύσεις.

$$\left.\begin{aligned} &(1)\ t u_t = u_{xx} + 2u \quad \forall (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty) \\ &(2)\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \\ &(3)\ u(x,0) = 0 \end{aligned}\right\} ⊛$$

$\rightarrow X, T \neq 0$

Λύση: Ψάχνουμε u της μορφής $u(x,t) = X(x)T(t)$ που ικανοποιεί τις (1), (2):

$$tXT' = X''T + 2TX \Rightarrow \boxed{t\frac{T'(t)}{T(t)} - 2 = \frac{X''(x)}{X(x)}} = -\lambda$$

Εδώ γράφουμε: Επειδή (sos) το δεξί μέλος δεν εξαρτάται από το t και το αριστερό δεν εξαρτάται από x, τότε η παραπάνω ισότητα ισούται με μια σταθερά.

και επίσης πρέπει $X(0) = X(\pi) = 0$

sos → Στις εξετάσεις γράφουμε αναλυτικά γιατί απορρίπτονται οι άλλες περιπτώσεις.

Κατά τα γνωστά, πρέπει $\lambda > 0$.

$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x)$

$X(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$0 = X(\pi) = B\sin(\sqrt{\lambda}\pi) \xRightarrow{B\neq 0} \sqrt{\lambda}\pi = \nu\pi,\ \nu\in\mathbb{N}^+$

$\Rightarrow \lambda = \nu^2,\ \nu\in\mathbb{N}^+$

Δε χρειάζεται να εξηγώ πως βρήκα τον ολοκληρωτικό παράγοντα.

$tT'(t) + (\lambda-2)T(t) = 0 \xRightarrow{\circledast\ \times t^{\lambda-3}} t^{\lambda-2}T'(t) + (\lambda-2)t^{\lambda-3}T(t) = 0$

$\left(t^{\lambda-2}T(t)\right)' = 0 \Rightarrow T(t) = c\cdot t^{2-\lambda},\ c\in\mathbb{R}$

Πώς βρήκαμε ότι θα ($\circledast$) πολλαπλασιάσουμε με $t^{\lambda-3}$;
- Διαιρώ με t και έχω: $T'(t) = \frac{\lambda-2}{t}T(t)$

Άρα $\mu = e^{\int\frac{\lambda-2}{t}}$
- Αυτό το μ θα είναι ο ολοκληρ. παράγοντας

Άρα λύσεις:

$u_\nu(x,t) = t^{2-\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)$, με $\lambda = \nu^2,\ \nu\in\mathbb{N}^+$

Όλες οι $\boxed{u(x,t) = c\cdot t\sin x}$

Γιατί προέκυψε αυτό;

Στην $U_\nu(x,t) = t^{2-\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}x)$ βάζουμε τις εξής τιμές:

$\lambda = 1$: $u = t\sin x$

$\lambda = 4$: $u = t^{-2}\sin(2x)$

$\lambda = 9$: $u = t^{-7}\sin(3x)$

$\vdots$

Αυτές και όλες οι υπόλοιπες από εδώ και κάτω απορρίπτονται διότι δεν ικανοποιούν τη συνθήκη (3) "Χαλάνε" στο $t=0$

Συνθήκες Neumann

Άσκηση: Να λυθεί το πρόβλημα $(\ell>0)$:

$$u_{tt} = 4u_{xx} \qquad (x,t)\in(0,\ell)\times(0,\infty) \qquad (1)$$

$$u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0 \quad , \forall t>0 \qquad (2)$$

$$u(x,0) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) + 1 \quad , \forall x\in[0,\ell] \qquad (3)$$

$$u_t(x,0) = \cos^2\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right) \quad , \forall x\in[0,\ell] \qquad (4)$$

Λύση: $\boxed{\text{Βήμα 1}}$ Λύση των (1), (2) της μορφής $X(x)T(t)$

$$\ldots \quad \frac{T''}{4T} = \frac{X''}{X} = -\lambda$$

Επίσης,
$$\left.\begin{aligned} u_x(0,t) &= X'(0)\,T(t) = 0 \\ u_x(\ell,t) &= X'(\ell)\cdot T(t) = 0 \end{aligned}\right\} \overset{T\neq 0}{\Longrightarrow} X'(0) = X'(\ell) = 0$$

Πρέπει $\lambda\geq 0$. Γιατί;

$$-X'' = \lambda X \Rightarrow \lambda\int_0^\ell X^2(x)\,dx = -\int_0^\ell X''(x)X(x)\,dx = -X'X\Big|_0^\ell + \int_0^\ell (X'(x))^2 dx =$$

$$\overset{X'(0)=X'(\ell)=0}{=} \int_0^\ell (X'(x))^2 dx \geq 0 \Rightarrow \lambda\geq 0$$

Λύσεις με $\lambda=0$: $X''(x)=0 \Leftrightarrow X(x) = Ax+B \Leftrightarrow A=0$

Άρα $X(x) = B$

Όμοια $T''(t)=0 \Rightarrow T(t) = \Gamma_0 t + \Delta_0$

Άρα λύσεις $u(x,t) = X\cdot T = \Gamma_0 t + \Delta_0 \quad , \Gamma_0,\Delta_0\in\mathbb{R}$

Λύσεις με $\lambda>0$: $X''(x)+\lambda X(x) = 0 \Rightarrow X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,x)$

$0 = X'(0) = B\cos(0) = B \Rightarrow B=0$

$0 = X'(\ell) = -A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\,\ell) \overset{A\neq 0}{\Rightarrow} \sin(\sqrt{\lambda}\,\ell) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,\ell = \nu\pi \, , \nu\in\mathbb{N}^+$

Ιδιοτιμές οι: $\lambda_\nu = \left(\frac{\nu\pi}{\ell}\right)^2$

Λύσεις: $X_\nu(x) = \cos\left(\frac{\nu\pi}{\ell}x\right) , \quad \nu\in\mathbb{N}^+$

$$T''(t) + 4\lambda T = 0 \Rightarrow T(t) = \Gamma\cos(2\sqrt{\lambda}\,t) + \Delta\sin(2\sqrt{\lambda}\,t)$$

Λύσεις γινόμενο οι: $U_\nu(x,t) = \left(\Gamma_\nu \cos\left(\frac{2\nu\pi}{\ell} t\right) + \Delta_\nu \sin\left(\frac{2\nu\pi}{\ell} t\right)\right) \cos\left(\frac{\nu\pi}{\ell} x\right)$
με $\nu \in \mathbb{N}^+$

$\boxed{\text{Βήμα 2}}$: Αναζητούμε Γ_ν, Δ_ν, $\nu \in \mathbb{N}$ ώστε η:

$$u(x,t) = \Gamma_0 t + \Delta_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} U_\nu(x,t),$$

να ικανοποιεί τις (3), (4)

$$u(x,0) = \Delta_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Gamma_\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{\ell} x\right) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{\ell} x\right) \Rightarrow \begin{cases} \Delta_0 = 1 \\ \Gamma_\nu = \begin{cases} 1, & \nu = 2 \\ 0, & \nu \neq 2 \end{cases} \quad \nu \geq 1 \end{cases}$$

$$u_t(x,0) = \Gamma_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta_\nu \frac{2\nu\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\nu\pi}{\ell} x\right) \quad (*)$$

$$\boxed{\text{Ισχύει η ταυτότητα: } \cos^2\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{6\pi x}{\ell}\right)}$$

Οπότε η $(*) \xrightarrow[+\text{ταυτότητα}]{(4)} \begin{cases} \Gamma_0 = \frac{1}{2} \\ \Delta_\nu = \begin{cases} 0, & \nu \geq 1, \nu \neq 6 \\ \frac{\ell}{24\pi}, & \nu = 6 \end{cases} \end{cases}$

Θέτουμε $u(x,t) = \frac{1}{2} t + 1 + 2\cos\left(\frac{4\pi}{\ell} t\right)\cos\left(\frac{2\pi}{\ell} x\right) + \frac{1}{24\pi} \sin\left(\frac{12\pi}{\ell} t\right) \cos\left(\frac{6\pi}{\ell} x\right)$

$\boxed{\text{Βήμα 3}}$ Η u που βρήκαμε παραπάνω, λύνει το πρόβλημα. Αυτή είναι συνεχής στο $\overline{\Omega}$ και είναι $C^{2,2}(\Omega)$
· Για $t=0$ ικανοποιείται η αρχική συνθήκη (3)
· Για $t=0$ και αφού παραγωγίσουμε, βλέπουμε ότι ισχύει και η συνθήκη (4)

SOS

Άσκηση 1 (3.19, 3.20)

Γράψτε σε μορφή σειράς τη λύση της:

$$u_t = k u_{xx} \qquad (x,t) \in (0,\ell) \times (0,\infty)$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \qquad x \in [0,\ell], \ \varphi \text{ συνεχής φραγμένης κύμανσης}$$

Με τις εξής συνοριακές συνθήκες:

(i) $u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \quad \forall t > 0$

Υποθέτουμε ότι $\varphi(0) = \varphi(\ell) = 0$

(ii) $u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0$

Λύση: Βήμα 1

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

$$X(x) T'(t) = k X''(x) T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T'(t)}{kT(t)} = -\lambda$$

Εξηγώ αναλυτικά όπως πριν

Πρέπει $\lambda > 0$ ... (όπως πριν) $\lambda_\nu = \left(\frac{\nu\pi}{\ell}\right)^2, \nu \in \mathbb{N}^+$

$X(x) = B \sin(\sqrt{\lambda_\nu}\, x)$

- $T'(t) + \lambda k T(t) = 0 \Rightarrow T(t) = c \cdot e^{-\lambda k t}$

Λύσεις $e^{-k\lambda_\nu t} \sin\left(\frac{\nu\pi}{\ell} x\right) = U_\nu(x,t) \quad, \nu \in \mathbb{N}^+$

Βήμα 2 Αναζητούμε $C_\nu \in \mathbb{R}$ ώστε η $u(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu U_\nu(x,t)$ να ικανοποιεί την $u(x,0) = \phi(x)$

Δηλαδή,

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu \sin\left(\frac{\nu\pi}{\ell} x\right) = \phi(x) \qquad \forall x \in [0,\ell]$$

Θεωρούμε την περιττή επέκταση της ϕ, έστω $\phi_{περ.}$

Η $\phi_{περ.} \in C([-\ell,\ell])$ γιατί $\phi(0) = 0$

Επίσης, $\phi(-\ell) = \phi(\ell) = 0$ και $\phi_{περ.}$ φραγμένης κύμανσης

Άρα $\phi_{περ.}(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_n \sin\left(\frac{\nu\pi}{\ell} x\right)$, $\beta_\nu = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} \phi_{περ.} \sin\left(\frac{\nu\pi}{\ell}x\right) dx$

$$= \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} \phi \sin\left(\frac{\nu\pi}{\ell} x\right) dx$$

Η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην ϕ (Θεώρημα Jordan)

Επιλέγουμε λοιπόν $C_\nu = \beta_\nu$ και θέτουμε:

$$u(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu e^{-k\lambda_\nu t} \sin\left(\frac{\nu\pi}{\ell} x\right) \quad (*)$$

Βήμα 3 Η u της (*) είναι καλά ορισμένη και λύνει το πρόβλημα.
Για να δείξουμε ότι η (*) συγκλίνει ομοιόμορφα, θα χρειαστούμε το κριτήριο Abel!

Δευτέρα 16/12/19
Μάθημα 19ο

Άσκηση (3.19, 3.20) (συνέχεια από προηγ. μάθημα)

Να γράψετε σε σειρά, η λύση του προβλήματος:

$$u_t = k u_{xx} \qquad , x\in(0,\ell) \quad t>0$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \leftarrow \text{συνεχής, φραγμένης κύμανσης}$$

(i) $u(0,t) = u(\ell,t) = 0 \quad \forall t>0$

υποθέτουμε ότι $\varphi(0)=\varphi(\ell)=0$

(ii) $u_x(0,t) = u_x(\ell,t) = 0$

__Λύση:__ (i) Βήμα 1 Ιδιοτιμές $\lambda_\nu = \left(\frac{\nu\pi}{\ell}\right)^2$, $\nu\in\mathbb{N}^+$

Ιδιοσυνάρτηση $X_\nu(x) = \sin(\sqrt{\lambda_\nu}\,x)$, $\nu\in\mathbb{N}^+$

Λύσεις γινόμενο:

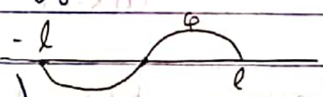
$$\underbrace{e^{-k\lambda_\nu t}}_{T(t)}\ \underbrace{X_\nu(x)}_{X(x)}$$

__Βήμα 2:__ $u(x,t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu \cdot e^{-k\lambda_\nu t}\sin\left(\frac{\nu\pi}{\ell}x\right)$ (*)

$C_\nu = ;$ → Από θεώρημα Jordan.

Ισχύει $\varphi(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \beta_\nu \cdot \sin\left(\frac{\nu\pi}{\ell}x\right) \quad \forall x\in[0,\ell]$ με $\beta_\nu = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \varphi(x)\sin\left(\frac{\nu\pi}{\ell}x\right)dx$

Επιλέγουμε $C_\nu = \beta_\nu$



Η σειρά στην (*) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\ell]\times(0,\infty)$

[Κριτήριο Abel: Αν $f_n, g_n : X\to\mathbb{R}$ συναρτήσεις $\forall n\geq 1$ και (α) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο X, (β) $g_n(x)\geq g_{n+1}(x) \quad \forall n,x$
(γ) $\exists M<\infty : |g_n(x)|\leq M \quad \forall n,x$ τότε από τις σχέσεις (α), (β), (γ) έχουμε:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n g_n \text{ συγκλίνει ομοιόμορφα}$$]

Εφαρμόζουμε το κριτήριο Abel με: $X = [0,\ell]\times[0,\infty)$

$f_n(x,t) = C_n\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$ και $g_n(x,t) = e^{-k\lambda_n t}$

Βήμα 3

Από τα παραπάνω $\Rightarrow$ u καλά ορισμένη και συνεχής, κατά τα γνωστά με $C^\infty((0,\ell)\times(0,\infty))$ (← από το "τρικ" με το ε); Μάθημα 16; και λύνει το πρόβλημα.

(ii) Βήμα 1: $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda$

→ Το γιατί επιτρέπεται το λ να είναι και 0, το εξηγούμε όπως στο μάθημα 18, σελίδα 94 (γιατί έχω τις $X'(0)=X'(\ell)=0$)

Δείχνουμε $\lambda \geq 0$. Για $\lambda>0$:

$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x$

Πρέπει $X'(0)=0$, $X'(\ell)=0$

$B\sqrt{\lambda} \overset{''}{=} 0 \overset{\lambda>0}{\Rightarrow} B=0 \Rightarrow X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}\,x$

$0 = X'(\ell) = A\sin(\sqrt{\lambda}\,\ell)\sqrt{\lambda} \underset{\substack{A\neq 0\\ \lambda>0}}{\Longrightarrow} \sin(\sqrt{\lambda}\,\ell)=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}\,\ell = \nu\pi \Rightarrow \lambda_\nu = \left(\dfrac{\nu\pi}{\ell}\right)^2$, $\nu\in\mathbb{N}^+$

$\Rightarrow$ Λύσεις: $u_\nu(x,t) = e^{-k\lambda_\nu t}\cos\left(\dfrac{\nu\pi}{\ell}x\right)$ $\nu\in\mathbb{N}^+$

$\lambda=0$: $X''(x)=0 \Rightarrow X(x) = Ax+B$

$X'(\ell) = X'(0) = 0 \Rightarrow A=0$

Λύση $u_0(x,t) = 1$

Βήμα 2: Αναζητούμε σταθερές ώστε η:

$$u(x,t) = A + \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \cdot e^{-k\lambda_\nu t}\cos\left(\underbrace{\dfrac{\nu\pi}{\ell}}_{=\sqrt{\lambda_\nu}}x\right) \quad (**) \text{ να είναι λύση}$$

Θέλουμε $\phi(x) = A + \sum\limits_{\nu=1}^{\infty} c_\nu\cos\left(\dfrac{\nu\pi}{\ell}x\right)$ $\forall x\in[0,\ell]$

Επεκτείνουμε την ϕ σε $\phi_{\text{αρτ.}}(x) = \phi(|x|)$ $\forall x\in[-\ell,\ell]$

Η $\phi_{\text{αρτ.}}$ είναι συνεχής, φραγμένης κύμανσης.

$$\phi_{\text{αρτ.}}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cos\left(\frac{\nu\pi}{\ell}x\right), \text{ όπου:}$$

$$a_\nu = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell}\phi_{\text{αρτ.}}(x)\cos\left(\frac{\nu\pi}{\ell}x\right)dx = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\phi(x)\cdot\cos\left(\frac{\nu\pi}{\ell}x\right)dx$$

Βήμα 3

Επιλέγουμε στην (**) $A = \frac{a_0}{2}$, $C_v = a_v$ $\forall n \in \mathbb{N}^+$

Η σειρά στην (**) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,\ell] \times [0,\infty)$ (Θ. Abel), έτσι η u είναι καλά ορισμένη και συνεχής.

Επίσης, λύνει το πρόβλημα γιατί... εξηγώ όπως σε προηγούμενες ασκήσεις $(u(x,0)=\phi(x))$

Άσκηση: Έστω u, όπως στην προηγούμενη άσκηση.

(i) Στο (i). Υπάρχει $c>0$ ώστε: $|u(x,t)| \leq c \cdot e^{-\frac{k\pi^2}{\ell^2}t}$

(ii) Στο (ii). Υπάρχει $c>0$ ώστε: $\left|u(x,t) - \frac{1}{\ell}\int_0^\ell \phi(x)dx\right| \leq c \cdot e^{-\frac{k\pi^2 t}{\ell^2}}$, $\forall t>0$, $\forall x \in [0,\ell]$

Λύση:

(i) $u(x,t) = \sum_{v=1}^{\infty} C_v \cdot e^{-k\lambda_v t} \sin\left(\frac{v\pi}{\ell} t\right)$, $C_v = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell \phi(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx$

$\overset{(I)}{\Rightarrow} |u(x,t)| \leq 2M \sum_{v=1}^{\infty} e^{-k\lambda_v t}$ $\quad (I)\left(\Rightarrow |C_v| \leq \frac{2}{\ell}\int_0^\ell M dx = 2M\right.$

$= 2M e^{-k\lambda_1 t} \sum_{v=1}^{\infty} e^{-k(\lambda_v-\lambda_1)t}$

$\lambda_v - \lambda_1 = \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 (v^2-1) \geq \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 v$

Άρα, $\sum_{v=1}^{\infty} e^{-k(\lambda_v-\lambda_1)t} \leq \sum_{v=1}^{\infty} e^{-k\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 v t}$ ⊙

Για $t \geq 1$: ⊙ $\leq \sum_{v=1}^{\infty} e^{-k\left(\frac{\pi}{\ell}\right) v} \overset{v=1}{=\!=} M_1$

Άρα, $|u(x,t)| e^{k\lambda_1 t} \leq 2MM_1$, για $t \geq 1$, $x \in [0,\ell]$

Επίσης, υπάρχει $M_2 < \infty$: $|u(x,t)| e^{k\lambda_1 t} \leq M_2$ $\forall t \in [0,1]$, $x \in [0,\ell]$

Επιλέγουμε $c = \max\{2MM_1, M_2\}$

Τεχνικές απλοποίησης (§5.6 Strauss)

$\boxed{1}$ Μέθοδος μετατόπισης των δεδομένων

Παράδειγμα

Στο πρόβλημα: $u_{tt} = c^2 u_{xx} + f(x,t) \ , \ \forall (x,t) \in \Omega$ ①

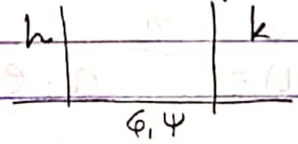
$\Omega = (0,l) \times (0,\infty)$

$u(0,t) = h(t)$ ②

$u(l,t) = k(t)$ ③

$u(x,0) = \phi(x) \ , \ u_t(x,0) = \psi(x)$ ④

Θεωρούμε την $a(x,t) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) h(t) + \frac{x}{l} k(t)$ και την



$v(x,t) = u(x,t) - a(x,t)$

Τότε: $v_{tt} - c^2 v_{xx} = f(x,t) - \left(a_{tt} - c^2 a_{xx}\right) = f(x,t) - a_{tt}(x,t)$

$v(0,t) = u(0,t) - h(t) = 0$

$v(l,t) = 0$

$v(x,0) = \underset{\substack{\parallel \\ \phi(x)}}{u(x,0)} - \left(1 - \frac{x}{l}\right) h(0) - \frac{x}{l} k(0)$

$v_t(x,0) = \underset{\substack{\parallel \\ \psi(x)}}{u_t(x,0)} - \left(1 - \frac{x}{l}\right) h'(0) - \frac{x}{l} k'(0)$

$X(x)\,T(t)$

$X(0) = 0$

$X(l) = 0$

Άσκηση 5.6.9 (Strauss)

$u_{tt} = 9 u_{xx} \qquad (x,t) \in (0,1) \times (0,\infty)$

$u(0,t) = h$

$u(1,t) = k$

$u(x,0) = 0 \ , \ u_t(x,0) = 0$

Θέτουμε $v(x,t) = u(x,t) - (kx + (1-x)h)$

Η v λύνει το $\quad V_{tt} = 9V_{xx}$

$$v(0,t) = 0 \quad , \quad v(1,t) = 0$$
$$v(x,0) = -(kx + (1-x)h)$$
$$V_t(x,0) = 0$$

Βρίσκουμε ότι: $\displaystyle v(x,t) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi}\left(k(-1)^n - h\right)\cos(3n\pi t)\sin(n\pi x)$

2 Αφαίρεση ειδικής λύσης

Στο πρόβλημα ① - ④ πιο πάνω, αν:

$f(x,t) = f(x) \quad , \quad h(t) = h \quad , \quad k(t) = k$

Ζητάμε $U(x)$ λύση του.

Δηλαδή:

$$-c^2 U''(x) = f(x)$$
$$U(0) = h$$
$$U(l) = k$$

Αναζητώ λύση που δεν εξαρτάται από το t, δηλαδή συν. διαφ. εξίσ.

Τότε η $v(x,t) = u(x,t) - U(x)$ λύνει το πρόβλημα:

$$V_{tt} - c^2 V_{xx} = f(x) - (U_{tt} - c^2 U_{xx}) = 0$$
$$v(0,t) = 0 \quad , \quad v(l,t) = 0$$
$$v(x,0) = \varphi(x) - U(x)$$
$$V_t(x,0) = \psi(x)$$

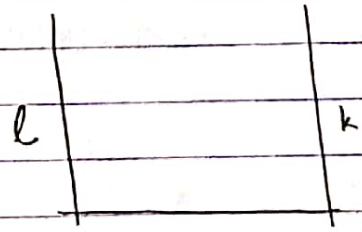
Άσκηση 5.4.1 (Strauss)

$u_{tt} = c^2 u_{xx} + k$ ①

$u(x,0) = 0$ ②

$u_t(x,0) = V$ ③

$u(0,t) = u_x(l,t) = 0$ ④



<u>Λύση</u>: Ψάχνουμε λύση $a(x)$ των ①, ④

$$\left.\begin{array}{l} 0 = c^2 a''(x) + k \\ a(0)=0 \\ a'(\ell)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a(x) = \frac{k\ell}{c^2} x \left(1 - \frac{x}{2\ell}\right)$$

Θέτουμε $v(x,t) = u(x,t) - a(x)$
Η v λύνει το πρόβλημα:

$$\begin{array}{l} v_{tt} - c^2 v_{xx} = 0 \\ v(0,t) = 0 \\ v_x(0,t) = 0 \\ v(x,0) = -a(x) \\ v_t(x,0) = v \end{array}$$

§5.6 Strauss (Αλικάκος 3.4)

$$u_t = k u_{xx} + f(x,t)$$
$$u = X(x)T(t)$$
$$X_v(x) = \cos(\ldots$$

Άσκηση 5.6.5 (Strauss)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + e^t \sin(5x), \quad (x,t) \in (0,\pi) \times (0,\infty)$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$
$$u(x,0) = 0$$
$$u_t(x,0) = \sin(3x)$$

Τετάρτη 18/12/19

Μάθημα 20ο

Άσκηση 5.6.5 (Strauss)

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + e^t \sin(5x) \quad , x\in[0,\pi] , t>0$$
$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0 \quad , t \geq 0$$
$$u(x,0) = 0 \quad , u_t(x,0) = \sin(3x) \quad , x\in[0,\pi]$$

Λύση: Για το $X''(x) = \lambda X(x)$, $X(0) = X(\pi) = 0$ ιδιοτιμές οι $\lambda_n = n^2$, $n\in\mathbb{N}^+$, ιδιοσυναρτήσεις οι $X_n(x) = \sin(nx)$

(Έχουμε παραλείψει κάποια βήματα)

Αναζητούμε λύση:
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) X_n(t)$$

Ελπίζοντας ότι η παραγώγιση γίνεται όρο προς όρο

Θέλουμε:
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n''(t)\sin(nx) = c^2 \sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\left(-n^2 \sin(nx)\right) + e^t \sin(5x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n''(t) + c^2 n^2 a_n(t)\right)\sin(nx) = e^t \sin(5x)$$

$$\Leftrightarrow \quad a_n''(t) + c^2 n^2 a_n(t) = e^t 1_{n=5}$$

$$0 = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(0)\sin(nx) \Rightarrow a_n(0) = 0 \quad \forall n\geq 1$$

$$\sin(3x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n'(0)\sin(nx) \Rightarrow a_n'(0) = 1_{n=3}$$

→ Αν δεν είχαμε $3x$ και είχαμε x, θα έπρεπε να την αναλύσουμε σε σειρά Fourier

Για $n \neq 3,5$:

$$\left.\begin{array}{l} a_n''(t) + c^2 n^2 a_n(t) = 0 \\ a_n(0) = a_n'(0) = 0 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} a_n(t) = A_n \cos(cnt) + B_n \sin(cnt) \\ a_n(0) = 0 \Rightarrow A_n = 0 \\ a_n'(0) = 0 \Rightarrow B_n = 0 \end{array}$$

Άρα $a_n(t) = 0$

Για $n=3$: Βρίσκουμε: $a_3(t)=\frac{1}{3c}\sin(3ct)$

Για $n=5$: $a_5(t)=\frac{1}{1+25c^2}\left(e^t-\cos(5ct)-\frac{1}{5c}\sin(5ct)\right)$

Να επαληθεύσω ότι προκύπτουν αυτά (H/W)

Θέτουμε: $u(x,t)=a_3(t)\sin(3x)+a_5(t)\sin(5x)$
(Τώρα μένει το βήμα 3)
Η u είναι λύση του προβλήματος γιατί:
$u\in C([0,\pi]\times[0,\infty))\cap C^\infty((0,\pi)\times(0,\infty))$

Η $u_{tt}=c^2u_{xx}+e^t\sin(5x)$ ικανοποιείται γιατί... (δες από προηγ. μαθήματα)

Παράδειγμα 3.8 (σελ. 256, Αλικάκος) (Παρόμοιο με το παραπάνω)

$u_t=2u_{xx}+e^t\sin x+2t\sin(3x)$
$u(0,t)=u(\pi,t)=0$, $t\geq 0$
$u(x,0)=0$

Η ΕΞΙΣΩΣΗ LAPLACE

$U\subset\mathbb{R}^n$ ανοιχτό. Η εξίσωση Laplace στο U είναι η:
$\Delta u(x)=0 \quad \forall x\in U$
όπου $\Delta u(x)=\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x)+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x)$ η Λαπλασιανή

Κάθε u με $\Delta u=0$, λέγεται αρμονική στο U
Λύση με χωρισμό μεταβλητών

Η εξίσωση Laplace σε ορθογώνιο

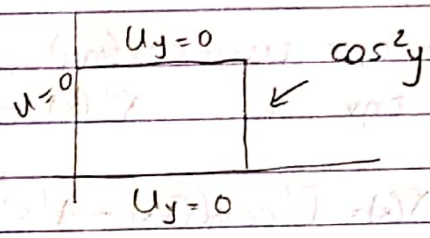
Άσκηση: $D=(0,\pi)\times(0,\pi)$. Θεωρούμε το πρόβλημα συνοριακών τιμών.

$\Delta u = 0$ στο D ①

$u_y(x,y)=0$ για $y=0$ ή $y=\pi$ ②

$u(0,y)=0$ ③

$u(\pi,y)=\cos^2 y = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2y)$ ④



Λύση: $\boxed{\text{Βήμα 1}}$

Ζητάμε συναρτήσεις της $u(x,y)=X(x)\,Y(y)\neq 0$ που να ικανοποιούν τις ①, ②, ③

Δηλαδή: ① $\Leftrightarrow X''(x)\,Y(y)+X(x)\,Y''(y)=0$

② $\Leftrightarrow X(x)\,Y'(y)=0$ για $y=0$ ή $y=\pi$ $\forall x\in[0,\pi] \Leftrightarrow Y'(0)=Y'(\pi)=0$

③ $\Leftrightarrow X(0)Y(y)=0$ $\forall y\in[0,\pi] \Leftrightarrow X(0)=0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

Πρέπει $\lambda\geq 0$. Γιατί: $\lambda Y(y) = -Y''(y) \Rightarrow \lambda\overbrace{\int_0^\pi Y^2(y)\,dy}^{>0} = -\int_0^\pi Y''(y)Y(y)\,dy$

$$= -Y'Y\Big|_0^\pi + \int_0^\pi (Y'(y))^2\,dy = 0 + \int_0^\pi (Y'(y))^2\,dy \geq 0 \Rightarrow \lambda\geq 0$$

Λύσεις στο $\lambda=0$

$Y''(y)=0 \Leftrightarrow Y'(y)=Ay+B \xRightarrow{Y'(0)=Y'(\pi)=0} A=0 \Rightarrow Y(y)=B$

Κρατάμε την $Y(y)=1$

Για την X. $X''(x)=0 \Rightarrow X(x)=\Gamma x+\Delta \xRightarrow{X(0)=0} X(x)=\Gamma x$

Κρατάμε την $X(x)=x$

Τελικά έχουμε την $u_0(x,y)=x$

Λύσεις όταν $\lambda>0$: $Y''(y)+\lambda Y(y)=0 \Rightarrow Y(y)=A\cos(\sqrt{\lambda}y)+B\sin(\sqrt{\lambda}y)$

$0=Y'(0)=B\sqrt{\lambda}\cos 0=B\sqrt{\lambda} \Rightarrow B=0$

$0=Y'(\pi)=-A\sqrt{\lambda}\sin(\sqrt{\lambda}\pi) \overset{A\neq 0}{\Rightarrow} \sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0 \Leftrightarrow \sqrt{\lambda}\pi=n\pi,\ n\in\mathbb{N}^+$

$\Leftrightarrow \lambda=n^2$

Κρατάμε τις $\cos(ny),\ n\in\mathbb{N}^+$ $\quad Y(y)=\cos(ny)$

Για την X: $X''(x)-\lambda X(x)=0 \Rightarrow X(x)=\Gamma e^{\sqrt{\lambda}x}+\Delta e^{-\sqrt{\lambda}x}$

Ένας άλλος τρόπος να γράψουμε λύσεις (όταν $\lambda>0$):
Έχουμε $\to \sinh x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

$\circledast$ $\quad \cosh x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$

Οπότε $e^x=\sinh x+\cosh x$
$e^{-x}=\cosh x-\sinh x$

$\circledast$

$\Rightarrow X(x)=\Gamma'\cosh(\sqrt{\lambda}x)+\Delta'\sinh(\sqrt{\lambda}x)$

$X(0)=0 \Rightarrow 0=\Gamma'\cosh 0=\Gamma' \Rightarrow \Gamma'=0$

Λύσεις για την X: $X(x)=\sinh(nx)$

Λύσεις για την u:

$$u_n(x,y)=\sinh(nx)\cos(ny)$$

Βήμα 2

Θέτουμε $u(x,y)=a_0x+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sinh(nx)\cos(ny)$

$a_n=$; Πρέπει $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2y)=u(\pi,y)=a_0\pi+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sinh(n\pi)\cos(ny)$

Δηλαδή: $a_0\pi=\frac{1}{2} \Rightarrow a_0=\frac{1}{2\pi}$

$$\left.\begin{array}{ll} a_n\cdot\sinh(n\pi)=0 & n\neq 2 \\ a_2\cdot\sinh(2\pi)=\frac{1}{2} & \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} a_n=0,\ n\in\mathbb{N}^+\setminus\{2\} \\ a_2=\frac{1}{2\sinh(2\pi)} \end{array}$$

Θέτουμε $u(x,y)=\frac{1}{2\pi}x+\frac{1}{2\sinh(2\pi)}\sinh(2x)\cos(2y)$

Βήμα 3

$u\in C(\bar{D})\cap C^2(D)$ — εμείς θέλουμε C^2, αλλά εδώ είναι και C^∞

- Συνέχεια στην κλειστότητα, C^∞ στο συνοριακό και ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες.

Τα ελέγχω όλα αυτά, όπως σε προηγούμενα μαθήματα.

Παρατήρηση: Στο βήμα 1 αναζητούμε λύσεις $X(x)Y(y)$ που ικανοποιούν τις ομογενείς συνοριακές συνθήκες.

(H/W: Άσκηση 7, παράγραφος 6.2)

Η εξίσωση Laplace σε κύκλο και ο τύπος Poisson.

$a > 0$, $\underline{\Omega} = B(0,a) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x^2+y^2} < a\}$

Ζητάμε $u \in C(\overline{\underline{\Omega}}) \cap C^2(\underline{\Omega})$ ώστε:

$$\Delta u = 0 \quad \text{στο } \underline{\Omega} \quad (1)$$

(2) $u(z) = g(z) \quad \forall z \in \partial \underline{\Omega}$, όπου g είναι τέτοια ώστε:

$$h(\theta) = g(ae^{i\theta}) = g(a\cos\theta, a\sin\theta),$$

$g : \partial\underline{\Omega} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής και φραγμένης κύμανσης.

Μετατρέπουμε το πρόβλημα με χρήση πολικών συντεταγμένων.

Ισχυρισμός: $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}$

Για $v : \overline{\underline{\Omega}} \to \mathbb{R}$ θέτουμε $\tilde{v}(r,\theta) = v(re^{i\theta}) = v(r\cos\theta, r\sin\theta)$,

$\tilde{v} : [0,a] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$

$$L_1 v(x,y) = L_2 \tilde{v}(r,\theta)$$

$\uparrow$

βάζουμε μετά $x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

Απόδειξη ισχυρισμού

$$\tilde{v}(r,\theta) = v(\overset{''x}{r\cos\theta}, \overset{''y}{r\sin\theta})$$

$$\Rightarrow \tilde{V}_r(r,\theta) = V_x(x,y)\cos\theta + V_y(x,y)\sin\theta$$

$$\tilde{V}_\theta(r,\theta) = V_x(x,y)(-r\sin\theta) + V_y(x,y)(r\cos\theta)$$

$$\begin{pmatrix} \partial_r \tilde{v} \\ \partial_\theta \tilde{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix}$$

Βρίσκουμε τον αντίστροφο του πίνακα και έχουμε:

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \partial_x v \\ \partial_y v \end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}}_{= T^{-1}} \begin{pmatrix} \partial_r \tilde{v} \\ \partial_\theta \tilde{v} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Τετάρτη 8/1/20
Μάθημα 22ο

Η εξίσωση Laplace στο δίσκο

Υπενθύμιση από προηγούμενο:

$\underline{O} = B(0,a)$, $a>0$ $\qquad ae^{i\theta}$

$g : \partial \underline{O} \to \mathbb{R}$ ώστε η $h(\theta) = g(a\cos\theta, a\sin\theta)$ συνεχής και φραγμένης κύμανσης

Ζητάμε λύση του: $\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{στο } \underline{O} \\ u(z) = g(z) & \forall z \in \partial \underline{O} \end{cases}$

$u \in C^2(\underline{O}) \cap C(\overline{\underline{O}})$

$\tilde{u}(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$
$= u(x,y)$

Την γράψαμε με πολικές συντεταγμένες και δείξαμε ότι αυτό είναι ισοδύναμο με:

$\tilde{u}_{rr} + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\tilde{u}_r = 0$

$\tilde{u}(a,\theta) = h(\theta)$ (*)

Κάναμε χωρισμό μεταβλητών και βρήκαμε:

$r^n \cos(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}$

$r^n \sin(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}^+$

Αναζητούμε λύση της μορφής: $\tilde{u}(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)\right) r^n$

$h(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right)$ ↳ Σειρά Fourier

Διαλέγουμε $A_0 = \frac{a_0}{2}$, $A_n = \frac{1}{a^n} a_n$, $B_n = \frac{1}{a^n} b_n$

Τα επιλέξαμε με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιείται η (*)
Η τελευταία είναι αρμονική, είναι C^2 και είναι και συνεχής στην κλειστότητα (για το τελευταίο χρησιμοποιούμε κατάλληλο θεώρημα (Abel;))

$$\tilde{u}(r,\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right) \frac{r^n}{a^n} \qquad (8)$$

Κρατήσαμε την αρίθμηση από το προηγούμενο μάθημα

$h(\theta) = g(r\cos\theta, r\sin\theta)$ ορίζεται στο $[-\pi,\pi]$

Ο τύπος Poisson

<u>Πρόταση</u>: Η $\tilde{u}$ της ⑧ γράφεται ως:

$$\tilde{u}(r,\theta) = \frac{a^2-r^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\frac{1}{a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\phi)}\,d\phi \quad (9)$$

για κάθε $r\in[0,a)$, $\theta\in[0,2\pi]$

ΟΧΙ για εξετάσεις

<u>Απόδειξη</u>: $a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(\phi)\cos(n\phi)\,d\phi = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\cos(n\phi)\,d\phi$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\sin(n\phi)\,d\phi$

Άρα, $\tilde{u}(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\,d\phi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{r^n}{a^n}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\left[\cos(n\phi)\cos(n\theta)+\sin(n\phi)\sin(n\theta)\right]d\phi$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\phi)\underbrace{\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos(n(\theta-\phi))\right)}_{S}d\phi$$

$$S+1 = 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\cos(n(\theta-\phi)) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{a}\right)^n\left(e^{in(\theta-\phi)}+e^{-in(\theta-\phi)}\right)$$

$$= \frac{1}{1-\frac{r}{a}e^{i(\theta-\phi)}} + \frac{1}{1-\frac{r}{a}e^{-i(\theta-\phi)}} = \frac{2-2\frac{r}{a}\cos(\theta-\phi)}{1+\frac{r^2}{a^2}-2\frac{r}{a}\cos(\theta-\phi)}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1-\frac{r^2}{a^2}}{1+\frac{r^2}{a^2}-2\frac{r}{a}\cos(\theta-\phi)} = \frac{a^2-r^2}{a^2+r^2-2ar\cos(\theta-\phi)} = \frac{|z'|^2-|z|^2}{|z'-z|^2} \quad \square$$

Ο τύπος σε καρτεσιανές συντεταγμένες

Για $z=(x,y)\in B(0,a)$, $(x,y)=(r\cos\theta, r\sin\theta)$

<u>Ισχύει</u>: $u(z) = \tilde{u}(r,\theta) = \frac{a^2-|z|^2}{2\pi a}\int_{|z'|=a}\frac{g(z')}{|z-z'|^2}\,d \quad (10)$

(επικαμπύλιο ολοκλήρωμα πρώτου είδους)

$\left(\int_c f\,ds = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\gamma'(t)\|\,dt\right)$

Απόδειξη

Θεωρούμε $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma(\phi) = (a\cos\phi, a\sin\phi)$, παραμετρικοποίηση του $C: |z'| = a$

Για $z' = \gamma(\phi)$ έχουμε $|z-z'|^2 = |re^{i\theta} - ae^{i\phi}|^2$

$$= (re^{i\theta} - ae^{i\phi})(re^{-i\theta} - ae^{-i\phi})$$
$$= r^2 + a^2 - ar(e^{i(\phi-\theta)} + e^{-i(\phi-\theta)})$$
$$= r^2 + a^2 - ar\cos(\theta - \phi)$$

$\gamma'(\phi) = (-a\sin\phi, a\cos\phi) \Rightarrow |\gamma'(\phi)|^2 = a^2 \Leftrightarrow |\gamma'(\phi)| = a$

Άρα $u(x,y) = \tilde{u}(r,\theta) \overset{9}{=} \dfrac{a^2 - r^2}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} h(\phi) \frac{1}{a^2 + r^2 - 2ar\cos(\theta - \phi)} d\phi$

$$= \frac{a^2 - |z|^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(\gamma(\phi)) \frac{1}{|z - \gamma(\phi)|^2} \frac{|\gamma'(\phi)|\, d\phi}{a}$$

$$= \frac{a^2 - |z|^2}{2\pi a} \int_{|z'|=a} g(z') \frac{1}{|z - z'|^2} ds$$

Πρόταση: Έστω $\Omega = B(0, a)$. Αν $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής τότε το πρόβλημα : $\Delta u = 0$ στο Ω

$u(x,y) = g(x,y) \quad \forall (x,y) \in \partial\Omega$

έχει μοναδική λύση με $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ η οποία δίνεται από τις 9, 10. Μάλιστα με $C^\infty(\Omega)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: 1) Αν $\Omega \subset \mathbb{C}$ ανοιχτό και $f : \Omega \to \mathbb{C}$ ολόμορφη: $f = u + iv$ τότε $\Delta u = \Delta v = 0$ στο Ω

Αυτό γιατί στο Ω έχουμε: $\left.\begin{matrix} u_x = v_y \\ u_y = v_x \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} u_{xx} = v_{yx} \\ u_{yy} = -v_{xy} \end{matrix} \Rightarrow \Delta u = 0$

2) Βρήκαμε ότι οι $r^n\cos(n\theta)$, $r^n\sin(n\theta)$ είναι αρμονικές

Αναμενόμενο γιατί: $r^n\cos(n\theta) = \mathrm{Re}(z^n)$ $\quad z = re^{i\theta}$

$r^n\sin(n\theta) = \mathrm{Im}(z^n)$

3) Αν η g στον τύπο Poisson είναι απλώς μετρήσιμη και φραγμένη, τότε η u που ορίζει ο τύπος: (i) είναι C^∞ στο Ω, (ii) $\Delta u = 0$ στο Ω, (iii) $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ |z| < a}} u(z) = g(z_0)$ $\forall z_0 \in \partial\Omega$ σημείο συνέχειας της g.

Άσκηση 6.3.2 (Strauss)

(Και τα δυο βιβλία ταυτίζουν τη u με τη $\tilde{u}$)

$\underline{O} = B(0,a)$

Να λυθεί η: $\Delta u = 0$ στο $\underline{O}$.

$u = 1 + 3\sin\theta$ στο $\partial \underline{O}$

Έχουμε παραλείψει κάποια βήματα. Ίδια με αυτά στην αρχή αυτού του μαθήματος

Λύση: Έχουμε δει ότι οι $r^n\cos(n\theta), n\in\mathbb{N}$, $r^n \sin(n\theta), n\in\mathbb{N}^+$ είναι αρμονικές

Θα βρούμε κατάλληλα $(A_n)_{n\geq 0}, (B_n)_{n\geq 0}$ ώστε η $u(r,\theta) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)r^n$, να λύνει το πρόβλημα. Επιλέγουμε $A_0 = 1$, $A_n = 0 \ \forall n\geq 1$

$B_1 = \frac{3}{a}$, $B_n = 0 \ \forall n \geq 2$

Δηλαδή, $u(r,\theta) = 1 + \frac{3}{a}\sin(\theta)\, r$

Αυτή η u είναι συνεχής στο $\overline{O}$, C^∞ στο O

$\Delta u = 0$ και $u(a,\theta) = 1 + 3\sin\theta$

Συνέπειες του τύπου Poisson

(Ιδιότητα της μέσης τιμής, Αρχή μεγίστου, C^∞)

Πρόταση: (Ιδιότητα της μέσης τιμής)

Έστω $z_0 \in \mathbb{R}^2$, $a > 0$ $D = B(z_0, a)$, $u\in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ με $\Delta u = 0$ στο D.

Τότε: $$u(\underset{(x_0,y_0)}{z_0}) = \frac{1}{2\pi a}\int_{|z-z_0|=a} u(z)\,ds \overset{*}{=} \frac{1}{2\pi \cancel{a}}\int_0^{2\pi} u(x_0 + a\cos\phi, y_0 + a\sin\phi)\cancel{a}\, d\phi$$

Παραμετρικοποίηση: $\gamma(\phi) = z_0 + a(\cos\phi, \sin\phi)$ $*$

$\gamma'(\phi) = a(-\sin\phi, \cos\phi)$, $\|\gamma'(\phi)\| = a$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(x_0 + a\cos\phi, y_0 + a\sin\phi)\, d\phi$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $z_0=0$. Από τον τύπο του Poisson: $u(0)=\frac{a^2}{2\pi a}\int_{|z'|=a} u(z')\frac{1}{\underbrace{|z'|^2}_{=a^2}}ds$

$g=u|\partial\Omega$

[αφού $u(z)=\frac{a^2-|z|^2}{2\pi a}\int_{|z'|=a}\frac{g(z')}{|z-z'|^2}ds$]

$\Delta u=0$ στο Ω

$u=g$ στο $\partial\Omega$

$$=\frac{1}{2\pi a}\int_{|z'|=a}u(z')\,ds$$

Αν $z_0\neq 0$. Θεωρούμε ότι $U:\overline{B}(0,a)\to\mathbb{R}$ με:

$U(z)=u(z+z_0)$

$U(x,y)=u(x_0+x,\,y_0+y)$

τότε $\Delta U=0$ $\quad U\in C(\overline{B}(0,a))$

Από την περίπτωση ($z_0=0$) έχουμε:

$$U(0)=\frac{1}{2\pi a}\int_{|z'|=a}U(z')\,ds \qquad z'=z-z_0$$

$$\Rightarrow u(z_0)=\frac{1}{2\pi a}\int_{|z-z_0|=a}U(z-z_0)\,ds=\frac{1}{2\pi a}\int_{|z-z_0|=a}u(z)\,dz$$

Scanned by CamScanner

Δευτέρα 13/1/20
Μάθημα 23ο

Στο βιβλίο κ. Αλικάκου υπάρχει και το εξής: Ιδιότητα μ. τιμής ⇔ αρμ. συν.

Υπενθύμιση από προηγούμενο μάθημα:
$D = B(z_0, a)$
$u \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$, $\Delta u = 0$ στο D

Ιδιότητα μέσης τιμής

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi a} \int_{z:|z-z_0|=a} u(z)\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\underbrace{z_0 + a(\cos\theta, \sin\theta)}_{z_0 + ae^{i\theta}})\,d\theta \quad (*)$$

Πόρισμα: D όπως πιο πάνω, τότε $u(z_0) = \frac{1}{\pi a^2} \iint_D u(x,y)\,dx\,dy$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες.

$$\iint_D u(x,y)\,dx\,dy \overset{\text{πολικές}}{=\!=} \int_0^a \int_0^{2\pi} u(z_0 + r(\cos\theta, \sin\theta))\, r\, d\theta\, dr$$

από (*)

$$= \int_0^a r\, 2\pi u(z_0)\, dr$$

$$= u(z_0)\pi a^2$$

Πρόταση (Αρχή μεγίστου)

"που δε σπάει σε δύο κομμάτια"

Έστω $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοιχτό, συνεκτικό, $u \in C^2(D)$ αρμονική. Αν υπάρχει $z_0 \in D$ ώστε $u(z) \leq u(z_0)$ $\forall z \in D$, τότε η u είναι σταθερή στο D.

Απόδειξη:
(Ένας μ.χ είναι συνεκτικός, όταν τα μόνα ανοιχτά και κλειστά σύνολα σε αυτόν είναι μόνο το $\emptyset$ και όλος ο χώρος)

Έστω $A = \{z \in D : u(z) = u(z_0)\}$
Το A είναι ανοιχτό στο D: Έστω $w_0 \in A$, δηλαδή $w_0 \in D$, $u(w_0) = u(z_0)$
$\exists r > 0$ ώστε $\overline{B(w_0, r)} \subset D$

Τότε $u(w_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(w_0 + R(\cos\varphi, \sin\varphi))\,d\varphi =$

για $R \in [0, r]$: χρήση της ιδιότητας της μέσης τιμής

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(z_0)\,d\phi \Rightarrow \int_0^{2\pi}\Big\{\underbrace{u(z_0)-u(w_0+R(\cos\phi,\sin\phi))}_{A(\phi)}\Big\}\,d\phi = 0$$

$A(\phi)$ συνεχής, $A(\phi)\geq 0$

$\Rightarrow A(\phi)=0 \quad \forall \phi\in[0,2\pi]$

$\Rightarrow u(w_0+Re^{i\phi}) = u(z_0) \quad \forall \phi\in[0,2\pi] \quad \forall R\in[0,r]$

$\Rightarrow B(w_0,r)\subset A$

Το A είναι κλειστό στο D: Έστω $(z_n)_{n\geq 1}$ σημεία του A με $z_n \to \hat{z}\in D$

Επειδή $z_n\in A \Rightarrow u(z_n)=u(z_0) \xRightarrow[n\to\infty]{u \text{ συνεχής}} u(\hat{z})=u(z_0) \Rightarrow \hat{z}\in A$

Επειδή $A\neq\emptyset$ και D συνεκτικό, έπεται ότι $A=D$.
Δηλαδή, $u(z)=u(z_0) \quad \forall z\in D$
(Τα βιβλία το αποδεικνύουν με άλλον τρόπο)

Πόρισμα: $D\subset\mathbb{R}^2$ ανοιχτό, συνεκτικό, φραγμένο, $u\in C(\bar{D})\cap C^2(D)$ αρμονική. Τότε:

$$\max_{z\in\bar{D}} u(z) = \max_{z\in\partial D} u(z) \quad \underline{\text{και}} \quad \min_{z\in\bar{D}} u(z) = \min_{z\in\partial D} u(z) \qquad (*)$$

Απόδειξη: $\bar{D}$ συμπαγές, u συνεχής στο $\bar{D} \Rightarrow \exists\, z_n, z_m\in\bar{D}$ ώστε:
$u(z_n)\leq u(z)\leq u(z_m)$

Αν $z_n\in D$, $z_m\in D$ τότε η u σταθερή στο D $\xRightarrow{u \text{ συνεχής στο } \bar{D}}$ u σταθερή στο $\bar{D}$ και οι (*) ισχύουν.

Αν $z_n, z_m\notin D$ τότε $z_n, z_m\in\partial D$

Πρόταση 3: $D \subset \mathbb{R}^2$ ανοικτό, $u \in C^2(D)$ αρμονική

$\Longrightarrow u \in C^\infty(D)$

Σκιαγράφηση απόδειξης

Έστω $z_0 \in D$. $\exists\, r>0$ ώστε $\overline{B(z_0, 2r)} \subset D$

Για $z \in B(z_0, r)$ έχουμε

Τύπος Poisson: $$u(z) = \frac{a^2 - |z-z_0|^2}{2\pi\, 2r} \int_{|z'-z_0|=2r} g(z') \frac{1}{|z-z'|^2}\, ds$$

Άσκηση 6.3.1 (Strauss)

$\Omega = B(0,2)$, $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ αρμονική στο Ω με

$u = 3\sin(2\theta) + 1$ για $r=2$ $\quad [u(r,\theta)]$

a) $\max\limits_{z \in \overline{\Omega}} u(z) = ;$ $\qquad$ β) $u(0) = ;$

Λύση

a) Από την αρχή του μεγίστου $\max\limits_{z\in\overline{\Omega}} u(z) = \max\limits_{z \in \partial\Omega} u(z) = \max\limits_{\theta\in[0,2\pi]} (3\sin(2\theta)+1) = 4$

για $\theta = \frac{\pi}{4}$ ή $\theta = \frac{3\pi}{4}$

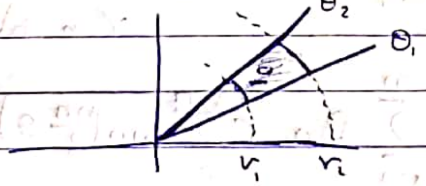
β) $$u(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \underbrace{u(2(\cos\theta, \sin\theta))}_{u(2e^{i\theta})}\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (3\sin(2\theta)+1)\, d\theta = 1$$

Η εξίσωση Laplace σε άλλα χωρία (§6.4: Strauss)

Χωρία της μορφής $[r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2]$ σε πολικές συντεταγμένες

με $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$, $0 \le \theta_2 - \theta_1 \le 2\pi$



Γράφουμε τη Laplace σε πολικές συντεταγμένες και χρησιμοποιούμε χωριστό μεταβλητών.

$\tilde{u}(r,\theta) = u(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$\Delta u(x,y) = \tilde{u}_{rr} + \frac{1}{r}\tilde{u}_r + \frac{1}{r^2}\tilde{u}_{\theta\theta}$

Στο χωριστό μεταβλητών αναζητώ λύσεις της μορφής

$$\tilde{u}(r,\theta) = X(r)\,Y(\theta)$$

$$\Delta u = 0 \Rightarrow X''(r)\,Y(\theta) + \frac{1}{r}X'(r)\,Y(\theta) + \frac{1}{r^2}X(r)\,Y''(\theta) = 0 \xrightarrow{\frac{1}{X(r)Y(\theta)}\cdot r^2}$$

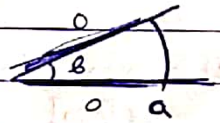
$$\Rightarrow r^2\frac{X''(r)}{X(r)} + r\frac{X'(r)}{X(r)} = -\frac{Y''(\theta)}{Y(\theta)} = \lambda$$

σταθερά διαχωρισμού.

Άσκηση 6.11 (Αλικάκος) + 6.4.6 Strauss

$$\underline{O} = \underset{r}{(0,a)} \times \underset{\theta}{(0,b)} \quad \text{με } b<2\pi$$

Να βρεθεί αρμονική στο $\underline{O}$ με $u(r,0) = u(r,b) = 0$



i) $u(a,\theta) = \sin\left(\frac{\pi}{b}\theta\right) - 3\sin\left(\frac{2\pi}{b}\theta\right)$ (Strauss)

ii) $u(a,\theta) = 100$ (Αλικάκος)

Λύση

Βήμα 1: Λύσεις της μορφής $X(r)Y(\theta)$ με $Y(0) = Y(b) = 0$

Στο πρώτο βήμα προσπαθώ να ικανοποιήσω τις ομογενείς αρχικές συνθήκες

Βρίσκουμε ότι πρέπει $\lambda>0$ και μάλιστα $\lambda = \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$, $n\in\mathbb{N}^+$

$$Y_n(\theta) = \sin\left(\frac{n\pi}{b}\theta\right)$$

$X \rightarrow r^{-\sqrt{\lambda}}$, $r^{\sqrt{\lambda}}$. κρατάω $r^{\sqrt{\lambda}} = r^{\frac{n\pi}{b}}$

(η άλλη εκρήγνυται)

Βήμα 2: Έστω $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\, r^{\frac{n\pi}{b}} \sin\left(\frac{n\pi}{b}\theta\right)$

i) Πρέπει

$$\left.\begin{aligned} &B_1 a^{\pi/b} = 1 \\ &B_2 a^{2\pi/b} = -3 \\ &B_n = 0,\ n\geq 3 \end{aligned}\right\} \quad u(r,\theta) = \left(\frac{r}{a}\right)^{\pi/b}\sin\left(\frac{\pi}{b}\theta\right) - 3\left(\frac{r}{a}\right)^{2\pi/b}\sin\left(\frac{2\pi}{b}\theta\right)$$

Η u λύνει το πρόβλημα .... (βήμα 3)

ii) Αναλύω το 100 σε σειρά ημιτόνων στο $[0, b]$ κάνοντας περιττή επέκταση της 100

δηλ.

$$h(\theta) = \begin{cases} 100 & , \theta \in (0, b] \\ 0 & , \theta = 0 \\ -100 & , \theta \in [-b, 0) \end{cases}$$

$$h(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}\theta\right) \quad \text{με} \quad b_n = \frac{1}{b}\int_{-b}^{b} h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) dx =$$

$$= \frac{2}{b}\int_0^b h(x) \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) dx = \begin{cases} \frac{400}{n\pi} & , n: \text{περιττός} \\ 0 & , n: \text{άρτιος} \end{cases}$$

Επιλέγω B_n ώστε $u(a,\theta) = 100 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{b}\theta\right)$

δηλ. $B_n a^{\frac{n\pi}{b}} = b_n$

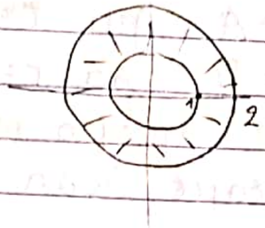
οπότε $u(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \left(\frac{r}{a}\right)^{\frac{n\pi}{b}} \sin\left(\frac{n\pi}{b}\theta\right)$

ο γεωμετρικός όρος βοηθάει στο να συγκλίνει άρα να περνάει η παράγωγος μέσα

Scanned by CamScanner

Τετάρτη 15/1/20
Μάθημα 24ο

Άσκηση: $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad , r \in (1,2)\}$



Να λυθεί το: $\Delta u = 0$ στο Ω

$\tilde{u}_r(1,\theta) = 0$ ① $\theta \in [0,2\pi]$

Αυτή είναι η $\tilde{u}$: $u(2,\theta) = \sin(2\theta)$ "

$\tilde{u}$ (δηλαδή η u σε πολικές)

Λύση: Τη λύνουμε σε πολικές συντεταγμένες, με χωρισμό μεταβλητών

Βήμα 1: Λύσεις $u^2(r,\theta) = X(r)\,Y(\theta) \quad (r,\theta) \in [1,2] \times \mathbb{R}$, Y 2π-περιοδική

$$\frac{r^2 X''(r)}{X(r)} + r\frac{X'(r)}{X(r)} = -\frac{Y''(\theta)}{Y(\theta)} = \lambda$$

Η εξίσωση για την Y δίνει ότι $\lambda \geq 0$. Γιατί; ?

$$\lambda Y = -Y'' \Rightarrow \lambda \int_0^{2\pi} Y^2(\theta)\,d\theta = -\int_0^{2\pi} Y\,Y''\,d\theta = -Y(\theta)\,Y'(\theta)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} (Y'(\theta))^2 d\theta$$

Για την Y:

- Για $\lambda = 0$, λύση $Y(\theta) = 1$
- Για $\lambda > 0$, λύση $Y(\theta) = A\cos(\sqrt{\lambda}\,\theta) + B\sin(\sqrt{\lambda}\,\theta)$

Από την ① παίρνω: $X'(1) = 0$

Y 2π-περιοδική $\Rightarrow \sqrt{\lambda} = n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \lambda = n^2$, $n \in \mathbb{N}^+$

Για την X:

- Για $\lambda = 0$, $rX''(r) + X'(r) = 0 \Rightarrow (rX')' = 0 \Rightarrow$
  $rX' = A \Rightarrow X = A\log r + B$
- Για $\lambda = n^2$: $X(r) = Ar^{-1} + Br^n$
  $0 = X'(1) = A\,1^{-n-1} + n\,B\,1^{n-1} = n(B-A)$
  $\Rightarrow A = B$
  $X(r) = r^{-1} + r^n$

Βήμα 2: Έστω $u(r,\theta) = B + \sum_{n=1}^{\infty} (r^{-n} + r^n)(\Gamma_n \cos(n\theta) + \Delta_n \sin(n\theta))$

$$\sin(2\theta) = \tilde{u}(2,\theta) = B + \sum_{n=1}^{\infty} (2^{-n} + 2^n)(\Gamma_n \cos(n\theta) + \Delta_n \sin(n\theta))$$

$B = 0$, $\Gamma_n = 0 \ \forall n$, $\Delta_n = 0$ για $n \neq 2$

$1 = (2^{-2} + 2^n)\,\Delta_2 = \frac{17}{4}\Delta_2$

$$\tilde{u}(r,\theta) = \left(\frac{r^{-2} + r^2}{2^{-2} + 2^2}\right)\sin(2\theta)$$

Άσκηση: Ω όπως πριν

$\Delta u = 0$ στο Ω

$u = A$ για $r=1$

$u = B$ για $r=2$

(Δε δουλεύω με χωρισμό μεταβλητών. Προβλέπω ότι η λύση δεν εξαρτάται από το θ, διότι τα δεδομένα δεν εξαρτώνται)

Λύση: Αναζητάμε λύση της μορφής: $u(r,\theta) = X(r)$

Πρέπει: $X''(r) + \frac{1}{r} X'(r) = 0$

$$(r X'(r))' = 0 \Rightarrow r X'(r) = C_1$$

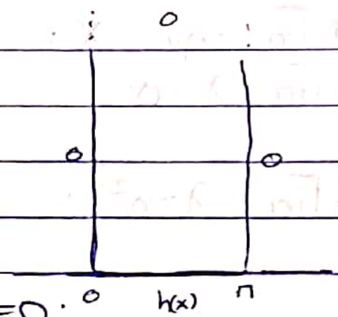
$$X(r) = C_1 \log r + C_2$$

$$\left.\begin{array}{l} X(1) = A \Rightarrow C_2 = A \\ X(2) = B \Rightarrow C_1 \log 2 + C_2 = B \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} C_2 = A \\ C_1 = \dfrac{(B-A)}{\log 2} \end{array}$$

(Να διαβάσω από Strauss, πως λύνουμε τη Laplace σε δακτύλιο. Όλες τις ασκήσεις) SOS

Άσκηση 6.2.7 (Strauss)

$\Omega = (0,\pi) \times (0,\infty)$



(a) Να λυθεί το $\Delta u = 0$ στο Ω

$u(0,y) = u(\pi,y) = 0 \quad y > 0$

$u(x,0) = h(x) \quad \forall x \in (0,\pi)$

$\lim\limits_{y\to\infty} u(x,y) = 0 \quad \forall x \in (0,\pi)$

(b) Τι γίνεται αν λύνει η συνθήκη $u(x,0) = 0$;

Λύση: Δουλεύω με χωρισμό μεταβλητών

Λύση: $u(x,y) = X(x)Y(y) \qquad X(0) = X(\pi) = 0$

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda$$

Δείχνουμε $\lambda > 0$ $\left(\begin{array}{l} XX'' = \lambda X^2 \\ \lambda \langle X, X \rangle = \langle X', X' \rangle \end{array} \right)$

$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}\, x) + B\sin(\sqrt{\lambda}\, x)$

$0 = X(0) = A \Longrightarrow A = 0$

$0 = X(\pi) = B\sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) \xrightarrow{B\neq 0} \sin(\sqrt{\lambda}\,\pi) = 0 \xrightarrow{\lambda>0} \sqrt{\lambda} = n \in \mathbb{N}^+ \quad (\lambda = n^2)$

δηλ. $\boxed{X_n(x) = \sin(nx)}$, $n \in \mathbb{N}^+$

Για $\lambda = n^2$: $Y''(y) - n^2 Y(y) = 0 \Longrightarrow Y(y) = c_1 e^{-ny} + c_2 e^{ny}$

Χαρακτηριστική: $a^2 - n^2 = 0$

$\xrightarrow{Y(\infty)=0} c_2 = 0$ άρα $\boxed{Y_n(y) = e^{-ny}}$

Βήμα 2: Θέτω $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny}\sin(nx)$ $\quad A_n = ;$

$h(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)$

Αναπτύσσω την $h(x)$ σε σειρά Fourier (περιττή επέκταση)

παίρνω $\quad A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x)\sin(nx)\,dx$

Βήμα 3: Η u είναι λύση (ή αλλιώς γιατί περνάει μέσα η παράγωγος)

.... (Υπενθύμιση: $\sum f_n'$: συγκλίνει ομοιόμορφα

$\sum f_n$: συγκλίνει

Τότε περνάει ...)

Strauss §1.6: Ταξινόμηση των γραμμικών Μ.Δ.Ε. 2ης τάξης με σταθερούς συντελεστές στο $\mathbb{R}^2$

Γενική μορφή: $a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + a_1 u_x + a_2 u_y + a_0 u = f$ (1)

με $|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| \neq 0$

Έχουμε δει τις
- $u_{xx} + u_{yy} = 0$ Laplace
- $u_{xx} - u_{yy} = 0$ κύματος
- $u_{xx} - u_y = 0$ θερμότητας

$$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}\cdot a_{22}$$

Scanned by CamScanner

$\Delta = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$

(1)
- Ελλειπτική αν $\Delta < 0$ ⇝ Laplace $\Delta = -1$
- υπερβολική $\Delta > 0$ ⇝ κύματος $\Delta = 1$
- παραβολική $\Delta = 0$ ⇝ Θερμότητας $\Delta = 0$

<u>Πρόταση:</u> Με μια γραμμική αλλαγή μεταβλητών

$$\begin{pmatrix} \xi \\ n \end{pmatrix} = A_{2\times2}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{και} \quad U(\xi,n) := u(x,y)$$

η (1) ανάγεται ~~στην~~

(α) $U_{\xi\xi} + U_{nn}$ + όροι χαμηλότερης τάξης $= g$, $\Delta < 0$

(β) $U_{\xi\xi} - U_{nn}$ + ---------- $= g$, $\Delta > 0$

(γ) $U_{\xi\xi}$ + ------- $= g$, $\Delta = 0$

<u>Απόδειξη</u>

$\boxed{\text{1η περίπτωση}}$ Αν $a_{11} = a_{22} = 0$ δηλ. $a_{12} \neq 0$

$\Delta = a_{12}^2 > 0$

- $u_{xy} = \frac{1}{4}\left((\partial_x + \partial_y)^2 u - (\partial_x - \partial_y)^2 u \right)$

$$\partial_{xx} + 2\partial_{xy} + \partial_{yy}$$

Άρα μου αρκεί $\underline{\partial_\xi = \partial_x + \partial_y}$ και $\underline{\partial_n = \partial_x - \partial_y}$

Έστω $U(\xi,n) = u(x(\xi,n), y(\xi,n))$

$$\partial_\xi U = \partial_x u\, \partial_\xi x + \partial_y u\, \partial_\xi y$$
$$\partial_n U = \partial_x u\, \partial_n x + \partial_y u\, \partial_n y$$

Τελικά θέλω $\left.\begin{array}{ll} \partial_\xi x = 1, & \partial_\xi y = 1 \\ \partial_n x = 1, & \partial_n y = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{l} x = \xi + n \\ y = \xi - n \end{array}$

$$\Updownarrow$$

$$\xi = \frac{x+y}{2}, \quad n = \frac{x-y}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \xi \\ n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} u(x,y) = U\left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right) \\ u_x = U_\xi \cdot \frac{1}{2} + U_\eta \frac{1}{2} \\ u_y = U_\xi \frac{1}{2} - U_\eta \frac{1}{2} \end{cases}$$

Τότε $u_{xy} = \frac{1}{4}\left(\partial_{\xi\xi} U - \partial_{\eta\eta} U\right)$

η ① γράφεται $a_{12} \frac{1}{2}\left(U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta}\right)$ + γραμ. συνδυασμός των $U_\xi, U_\eta, U = f(\xi+\eta, \xi-\eta)$

$\boxed{\text{Περίπτωση 2}}$: $a_{11} \neq 0$ ή $a_{22} \neq 0$

Υποθέτω ότι $a_{11} = 1$. Το κομμάτι 2ης τάξης της (1) είναι

$$\left(\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{22}\partial_y^2\right)u = \left(\partial_x + a_{12}\partial_y\right)^2 u - \underbrace{\left(a_{12}^2 - a_{22}\right)}_{\Delta} \partial^2_y \, u$$

διακρίνω περιπτώσεις

Περίπτωση 2α

$\Delta < 0$

Περίπτωση 2β

$\Delta > 0$

Δευτέρα 20/1/20
Μάθημα 25º

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + \text{όροι χαμ. τάξης} = f(x,y) \quad (1)$$
$$|a_{11}| + |a_{12}| + |a_{22}| > 0$$

$\Delta = a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$

$\Delta<0$	ελλειπτική	$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} + \dots$	$= g$
$\Delta>0$	υπερβολική	$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta}$	$= g$
$\Delta=0$	παραβολική	$U_{\xi\xi} + \dots$	$= g$

Περίπτωση 2 $\quad a_{11} \neq 0$ ή $a_{22} \neq 0$

Έστω ότι $a_{11} = 1$

$$\partial_x^2 + 2a_{12}\partial_x\partial_y + a_{22}\partial_y^2 = (\partial_x + a_{12}\partial_y)^2 - \underbrace{(a_{12}^2 - a_{22})}_{\Delta}\partial_y^2 \quad (2)$$

Περίπτωση 2α: $\quad \Delta<0$

Ορίζουμε $U(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ ώστε:

$$\left.\begin{aligned} \partial_\xi U &= (\partial_x + a_{12}\partial_y)u \\ \partial_\eta U &= \sqrt{|\Delta|}\,\partial_y u \end{aligned}\right\} \quad \partial_\xi x = 1, \ \partial_\xi y = a_{12}$$

Έχουμε:
$$\left.\begin{aligned} \partial_\xi U &= \partial_x u\, \partial_\xi x + \partial_y u\, \partial_\xi y \\ \partial_\eta U &= \partial_x u\, \partial_\eta x + \partial_y u\, \partial_\eta y \end{aligned}\right\} \quad \partial_\eta x = 0, \ \partial_\eta y = \sqrt{|\Delta|}$$

Άρα $x = \xi$
$y = a_{12}\xi + \sqrt{|\Delta|}\,\eta$

Τότε $(2) = \partial_\xi^2 U + \partial_\eta^2 U$

Περίπτωση 2β: $\quad \Delta>0$

Πάλι θέτουμε $x(\xi,\eta)$, $y(\xi,\eta)$ όπως στην 2α

Τότε η $(2) = \partial_\xi^2 U - \partial_\eta^2 U$

$\boxed{\text{Περίπτωση } 3}$ $\Delta = 0$

Θέλουμε $\partial_\xi U = (\partial_x + a_{12}\partial_y) u$

Δηλαδή $\partial_\xi x = 1$, $\partial_\xi y = a_{12}$

Επιλέγουμε $x = \xi$

$y = a_{12}\xi + \eta$

(τότε: $(\xi,\eta) \mapsto (x,y)$ είναι 1-1 διαφορίσιμη με αντίστροφη

τότε ② $= \partial_\xi^2 U$

$u_{xy} = 0$

$u_x = a(x)$

$u = \int_0^x a(s)ds + \beta(y)$

$U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$

Άσκηση 2.22 /σελ 180 (Αλικάκος)

Ποια η γενική λύση της $u_{tt} - 4u_{xt} + u_{xx} = 0$;

<u>Λύση</u>:

$$0 = (\partial_t^2 - 4\partial_x\partial_t + \partial_x^2)u = \underbrace{(\partial_t - 2\partial_x)^2}_{\text{αυτό θέλω να είναι } \partial_\xi} u - 3\partial_x^2 u$$

$U(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta))$

$U_\xi = u_x x_\xi + u_y t_\xi$

$U_\eta = u_x x_\eta + u_y t_\eta$

$\eta = \dfrac{x+2t}{\sqrt{3}}$

$\xi = t$

Θέλουμε $t_\xi = 1$, $x_\xi = -2$, $x_\eta = \sqrt{3}$ $\Big\} \Rightarrow$ $x = -2\xi + \sqrt{3}\eta$, $t = \xi$

Άρα, $U(\xi,\eta) = u(-2\xi + \sqrt{3}\eta, \xi)$ και η εξίσωση γίνεται:

$\partial_\xi^2 U - \partial_\eta^2 U = 0$

Αυτή τώρα είναι μια εξίσωση κύματος.

Γενική λύση: $U(\xi,\eta) = f(\xi+\eta) + g(\xi-\eta)$, με $f,g \in C^2(\mathbb{R})$

Άρα, $u(x,y) = f\left(\dfrac{x+2t}{\sqrt{3}} + t\right) + g\left(t - \left(\dfrac{x+2t}{\sqrt{3}}\right)\right)$

Δηλαδή, $u(x,y) = f\left(\frac{x}{\sqrt{3}} + \left(\frac{2}{\sqrt{3}}+1\right)t\right) + g\left(\left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)t - \frac{x}{\sqrt{3}}\right)$

(Παρόμοιες sos στο Strauss → 1.6.4, 2.1.9)

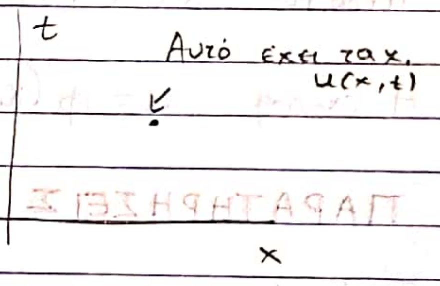
(Δε μαθαίνω απ' έξω τους μετασχηματισμούς. Δουλεύω όπως στην παραπάνω άσκηση και τους βρίσκω)

Η ΕΞΙΣΩΣΗ Burgers / Κρουστικά κύματα

μη γραμμική, λόγω του γινομένου αυτού

$$u_t + uu_x = 0$$

Ερμηνεύουμε το u ως ταχύτητα
$u(x,t)$: η ταχύτητα ενός σωματιδίου τον χρόνο t, στο σημείο x



Αν $x(t)$ είναι η θέση στο σημείο τότε:
$$x'(t) = u(x(t),t)$$
και $\frac{d}{dt}u(x(t),t) = u_x\, x'(t) + u_t = uu_x + u_t$

Γενικότερη εξίσωση

$$u_t + c(u)u_x = 0 \quad \text{στο} \quad O = \mathbb{R}\times(0,\infty)$$
$$u(x,0) = \varphi(x)$$

$\varphi, c \in C^1(\mathbb{R})$ $\quad c'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Χαρακτηριστική που περνάει από το $(x_0, t_0, u(x_0,t_0))$

Έστω $(x(s), t(s), z(s))_{s\in\mathbb{R}}$ όπου $z(s) = u(x(s), t(s))$

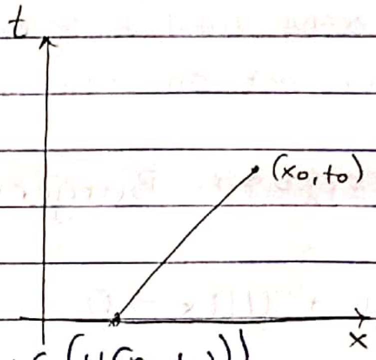
Πρέπει:
$$x'(s) = c(z(s))$$
$$t'(s) = 1$$
$$z'(s) = u_x\, x'(s) + u_t\, t'(s) = u_x\, c(u) + u_t = 0$$

$$\Rightarrow z(s) = u(x_0, t_0) \quad \forall s \in \mathbb{R}$$
$$t(s) = s + t_0$$

$x(s) = s\ c\,(u(x_0,t_0)) + x_0$

$x(s) = (t(s) - t_0)\ c\,(u(x_0,t_0)) + x_0$

Η χαρακτηριστική είναι ευθεία.



$z(0) = z(-t_0) \Rightarrow$

$u(x_0,t_0) = u(x(-t_0), 0) = \phi(x(-t_0)) = \phi(x_0 - t_0 \cdot c(u(x_0,t_0)))$

Η σχέση $u = \phi(x_0 - t_0 c(u))$ ορίζει το $u(x_0,t_0)$ πεπλεγμένα

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

$\boxed{A.}$ Ύπαρξη λύσης για μικρό t

Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Πεπλεγμένης συνάρτησης στην $F(x,t,u) = u - \phi(x - tc(u))$ στο $(\bar{x}, 0, \phi(\bar{x}))$

Η F είναι C^1 και $F(\bar{x}, 0, \phi(\bar{x})) = 0$,

$\partial_u F(\bar{x}, 0, \phi(\bar{x})) = 1 - \phi'(x - tc(u))(-tc'(u))\Big|_{\substack{t=0\\ x=\bar{x}\\ u=\phi(\bar{x})}} = 1 \neq 0$

Άρα, για (x,t) σε περιοχή του $(\bar{x}, 0)$, η $F(x,t,u) = 0$, λύνεται μοναδικά ως προς u. Έστω $u(x,t)$ η λύση

$u(x,t) = \phi(x - tc(u(x,t)))$

$\Rightarrow u_t = \phi'(x - tc(u))\,(-c(u) - tc'(u)u_t)$

$= -\phi'(x - tc(u))\,c(u) - u_t\, t\, c'(u)\,\phi'(x - tc(u))$

$$\Rightarrow u_t = -\frac{\phi'(x - tc(u))\,c(u)}{1 + tc'(u)\phi'(x - tc(u))}$$

$$u_x = \phi'(x - tc(u(x,t))) - \phi'(x - tc(u(x,t)))\, tc'(u)\, u_x$$

$$\Rightarrow \quad u_x = \frac{\phi'(x - tc(u))}{1 + tc'(u)\,\phi'(x - tc(u))}$$

$c(u) = u$

Έχουμε λοιπόν: $\quad u_t + c(u)\, u_x = 0$

$\boxed{B.}$ Η χαρακτηριστική που ξεκινάει από το $(\bar{x}, 0)$, έχει κλίση:

$$x'(s) = c(z(s)) = c(\phi(\bar{x}))$$

Άρα, είναι η γραμμή $\quad x = \bar{x} + t\,c(\phi(\bar{x}))$

— Όταν συγκρούονται δύο χαρακτηριστικές, τότε η λύση "παύει να υπάρχει

Άσκηση: Να λυθεί η $\quad u_t + u u_x = 0$

$$u(x,0) = x$$

$c(u) = u$

Λύση: $\quad u = \phi(x - tc(u))$

$$\Rightarrow \quad u = -x + tu \Rightarrow u = -\frac{x}{1-t}$$

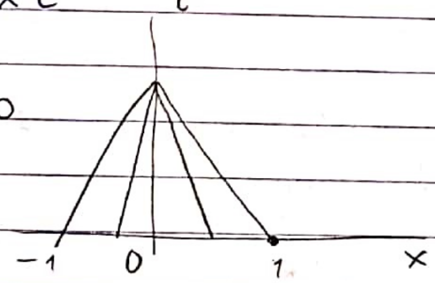
Ορίζεται μόνο για $t \in [0,1)$

Έχουμε κρούση τον χρόνο $t = 1$.

Η χαρακτηριστική που ξεκινάει από το $(\bar{x}, 0)$ είναι η:

$$x = \bar{x} + t(-\bar{x}) = \bar{x}(1-t) = \bar{x} - \bar{x}t$$

Όλες οι χαρακτηριστικές, όταν το $t = 1$, το $x = 0$



Χρόνος Θραύσης

Χρόνος θραύσης είναι ο μικρότερος χρόνος κατά τον οποίο συγκρούονται δυο χαρακτηριστικές. Επίσης είναι ο μικρότερος χρόνος τ ώστε να υπάρχει λύση στο $\mathbb{R} \times [0, \tau)$. Υποθέτοντας ότι η $c \circ \phi$ είναι διαφορίσιμη, δίνεται από τον τύπο

$$t_\theta = \inf \left\{ -\frac{1}{(c \circ \phi)'(x)} : x \in \mathbb{R} \text{ με } (c \circ \phi)'(x) < 0 \right\}.$$

Αν $(c \circ \phi)'(x) \geqslant 0$ για κάθε x, τότε ο τύπος ισχύει πάλι γιατί το σύνολο μετά το inf είναι το κενό και $\inf \varnothing = \infty$ (πάντα υποθέτουμε ότι $c'(y) > 0$ για όλα τα y, οπότε η συνθήκη μπορεί να γραφτεί και ως $\phi'(x) \geqslant 0$).

Λύση υπάρχει στο $[0, t_0)$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

$$c(\varphi(\xi))' = c'(\varphi(\xi))\, \varphi'(\xi)$$

Αν $\varphi'(\xi) \geq 0$ τότε $t_0 = \infty$

Δεν έχουμε σύγκρουση των χαρακτηριστικών

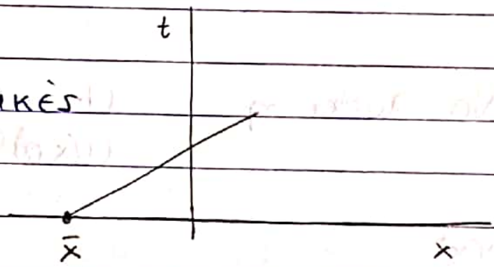
Τετάρτη 22/1/20
Μάθημα 26ο

$$u_t + c(u)u_x = 0 \quad , (x,t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$$
$$u(x,0) = \phi(x) \quad , x \in \mathbb{R}$$

$c'(y) > 0 \quad \forall y$

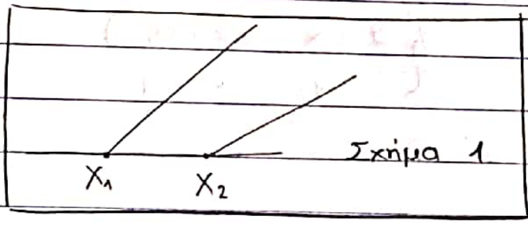
$$\begin{cases} x'(t) = c(z(t)) \\ z(t) = u(x(t),t) \Rightarrow z'(t) = u_t + x'(t)\, u_x = 0 \\ \qquad \Rightarrow z(t) = z(0) = \phi(x(0)) \end{cases}$$

Η χαρακτηριστική που ξεκινάει από το $(\bar{x}, 0)$ είναι η:
$$x(t) = \bar{x} + t\, c'(\phi(\bar{x}))$$



Αν η $\phi \nearrow$ τότε δύο χαρακτηριστικές δεν συγκρούονται.

Γιατί:



Σχήμα 1

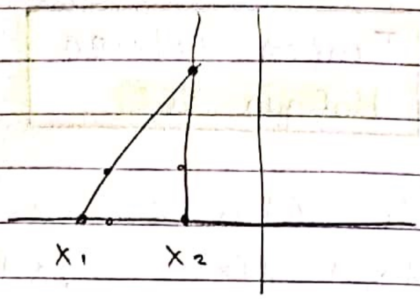
Η x_2 θα πρέπει να έχει μεγαλύτερη κλίση, όπως στο σχήμα 1 και άρα οι χαρακτηριστικές δεν συγκρούονται.

Γιατί αν $x_1 < x_2$ και οι χαρακτηριστικές από το x_1, x_2 συγκρούονται, τότε για κάποιο $t > 0$ θα είχαμε:
$$x_1 + t\, c(\phi(x_1)) = x_2 + t\, c(\phi(x_2))$$
$$\Rightarrow t\big(c(\phi(x_1)) - c(\phi(x_2))\big) = x_2 - x_1 > 0$$

Αν η ϕ δεν είναι $\nearrow$, υπάρχουν $x_1 < x_2$ με $\phi(x_1) > \phi(x_2)$.
Άρα, $c(\phi(x_1)) > c(\phi(x_2))$ και το χρόνο $t = \dfrac{x_2 - x_1}{c(\phi(x_1)) - c(\phi(x_2))} > 0$

οι χαρακτηριστικές από τα x_1, x_2 συγκρούονται.

Σύγκρουση διπλανών χαρακτηριστικών



▶ Αν $\varphi'(x_1) < 0$ στον πιο πάνω υπολογισμό, παίρνουμε $x_2 \longrightarrow x_1^+$

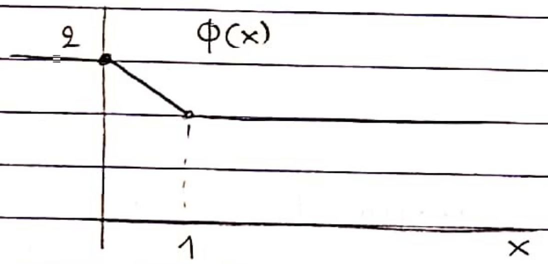
Ο χρόνος κρούσης: $t = -\dfrac{1}{\dfrac{c(\varphi(x_2)) - c(\varphi(x_1))}{x_2 - x_1}}$

συγκλίνει στο $-\dfrac{1}{(c\circ\varphi)'(x_1)}$

Άσκηση: Να λυθεί η:

$$u_t + u u_x = 0$$

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} 2, & x < 0 \\ 2 - x, & x \in [0,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

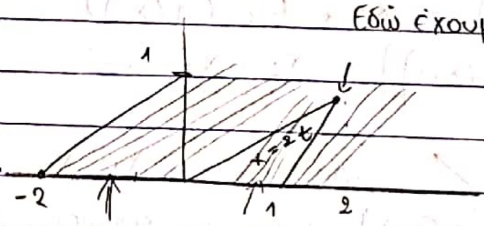


Λύση: Χαρακτηριστική που ξεκινάει από το $(x_0, 0)$ είναι η:

$$X(t; x_0) = x_0 + \varphi(x_0)\cdot t$$

Σχεδιάζουμε κάποιες χαρακτηριστικές:

Εδώ έχουμε θραύση (άλλαξε η κλίση)



Όλες αυτές παράλληλα

Για $x_0 \in [0,1]$: $X(1, x_0) = x_0 + 2 - x_0 = 2$

Άρα, από σχήμα $\longrightarrow \boxed{t_\theta = 1}$

Μπορούμε ωστόσο να βρούμε το χρόνο θραύσης και από τον τύπο:

$$t_\theta = \inf_{\xi \in \mathbb{R}} \left\{ -\frac{1}{\varphi'(\xi)} \right\} = 1$$

Η λύση ικανοποιεί την $u(x,t)=\phi(x-u(x,t)\cdot t)$ (*)

Για $0<t<1$: Αν $x\leq 2t$: $u(x,t)=2$

Αν $x\geq t+1$: $u(x,t)=1$

Αν $2t<x<t+1$: αν ισχύει ότι $x-u\cdot t\in(0,1)$ (Ι) τότε:

η (*) δίνει: $u(x,t)=2-x+u(x,t)\cdot t$

Δηλαδή $u(x,t)=\dfrac{2-x}{1-t}$ (πρέπει να τσεκάρω αν ικανοποιεί την (Ι))

Γι'αυτό: $x-ut=x-\dfrac{2-x}{1-t}\cdot t=\dfrac{x-xt-2t+xt}{1-t}=\dfrac{x-2t}{1-t}$

Αυτό τώρα, είναι >0 γιατί $x>2t$

και <1 γιατί $\dfrac{x-2t}{1-t}<1 \Leftrightarrow x<1+t$ (ισχύει ✓)

Οπότε τελικά:

$$u(x,t)=\begin{cases} 2, & x\leq 2t \\ \dfrac{2-x}{1-t}, & 2t<x<t+1 \\ 1, & x\geq t+1 \end{cases}$$

$1-t$ → Εκρήγνυται για $t\to 1$

↱ βασικό παράδειγμα

Άσκηση (Strauss)

$u_t+uu_x=0$

$u(x,0)=x^2$, $x\in\mathbb{R}$ → Για $x<0$ είναι φθίνουσα, άρα θα έχουμε κρούση

Λύση: Η λύση θα ικανοποιεί την $u=\phi(x-ut)$

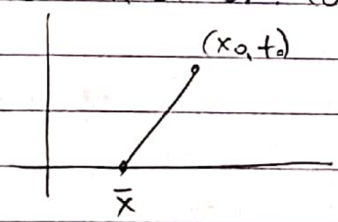
↳ sos: Να ξέρουμε να δείχνουμε πως προκύπτει αυτή η σχέση. (Θεωρία)

$u=(x-ut)^2=x^2+u^2t^2-2uxt$

$t^2u^2-(2xt+1)u+x^2=0$

$u=\dfrac{2xt+1\pm\sqrt{(2xt+1)^2-4t^2x^2}}{2t^2}$

$=\dfrac{2xt+1\pm\sqrt{4xt+1}}{2t^2}$



$u(x_0,t_0)=\phi(\bar{x})$

$x(t)=\bar{x}+t\,\phi(\bar{x})$

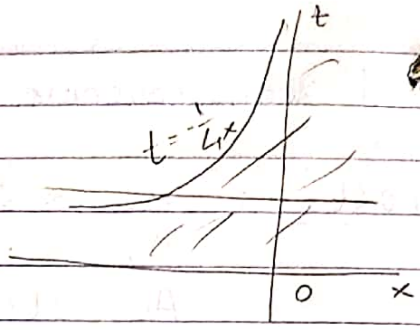
ίδιον

Για $t=t_0$: $x(t_0)=\bar{x}+t_0\cdot\phi(\bar{x})$, $x(t_0)=x_0$

$\Rightarrow \bar{x}=x_0-t_0\cdot u(x_0,t_0)$

Πρέπει $4xt+1>0$. Δηλαδή, $x \geq 0 \quad t>0$

ή $\quad x<0 \quad , t < -\frac{1}{4x}$



Διαλέγουμε τη λύση με το

$$u(x,t) = \frac{2xt+1-\sqrt{4xt+1}}{2t^2} = \frac{(2xt+1)^2-4xt-1}{2t^2(2xt+1+\sqrt{4xt+1})}$$

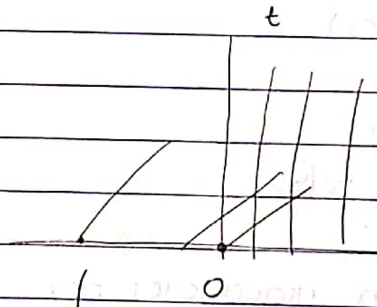
$$= \frac{4x^2t^2}{2t^2(2xt+1+\sqrt{4xt+1})} = \frac{x^2}{2xt+1+\sqrt{4xt+1}}$$

$$t_0 = \inf_{\substack{\xi\in\mathbb{R} \\ \varphi'(\xi)<0}} \left\{-\frac{1}{\varphi'(\xi)}\right\} = \inf_{\xi<0}\left\{-\frac{1}{2\xi}\right\} = \inf_{x>0} \frac{1}{2x} = 0$$

Η χαρακτηριστική που ξεκινάει από το $x_1<0$ συγκρούεται με τις διπλανές της στο $\left(\frac{x}{2}, -\frac{1}{2x}\right)$

Αν $\phi(x) = \begin{cases} 1, & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$

$t_0 = ;$



Από σχήμα → Χρόνος θραύσης $=0$

(Βλέπω το σχήμα στο πλάι!)

- Εξίσ κύματος
- Ολοκλ τύπος → εξίσωση θερμότητας
- Αρχή μεγίστου (εξ θερμότητας + Laplace) SOS
- Χωρισμός μεταβλητών

Άσκηση 1.2.2 (Αλικάκος)

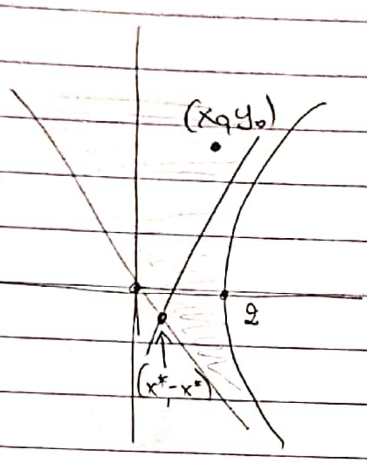
$$u_x + u_y = u^2 \quad (*)$$

$U = \{x \in \mathbb{R}^2 : x+y>0\} \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 4\}$

Να λυθεί η (*) στο U με $u(x,-x) = x$ → συνοριακή συνθήκη.

Να δειχθεί ότι $u(x,y) \to \infty$ αν $(x,y) \to (x_0,y_0)$ με $x_0^2 - y_0^2 = 4$

Λύση



Χαρακτηριστικές: $u(x(s), y(s))$

Έστω $(x(s), y(s), z(s))$

$x'(s) = 1 \Rightarrow x(s) = s$ → Δε χρειάζεται να πάρω σταθερά

$y'(s) = 1 \Rightarrow y(s) = s + C_1 \Rightarrow y(x) = x + C_1$

$z'(s) = z^2(s)$

Για την y παίρνω σταθερά γιατί θέλω να "σαρώσω" όλο το χώρο

$$z'(x) = z^2(x) \Rightarrow \frac{z'}{z^2} = 1 \Rightarrow -\left(\frac{1}{z}\right)' = 1 \Rightarrow \frac{1}{z} = -x + C_2$$

$$\Rightarrow z(x) = \frac{1}{C_2 - x}$$

Για δεδομένο (x_0, y_0) θέλουμε $y(x_0) = y_0$

Παίρνουμε $C_1 = y_0 - x_0$

Η χαρακτηριστική C_{x_0,y_0} : $y(x) = x + y_0 - x_0$, περνάει από το (x_0, y_0)

Περνάει από το Γ όταν $y(x) = -x$, δηλαδή:

$$x + y_0 - x_0 = -x \Rightarrow x = \frac{x_0 - y_0}{2}$$

$$u(x_0, y_0) = z(x_0) = \frac{1}{C_2 - x_0}$$

Όμως, $z(x^*) = u(x^*, -x^*) = x^* \Rightarrow \dfrac{1}{C_2 - x^*} = x^* \Rightarrow$

$$C_2 = x^* + \frac{1}{x^*}$$

Οπότε: $C_2 - x_0 = \dfrac{x_0 - y_0}{2} + \dfrac{2}{x_0 - y_0} - x_0 = -\dfrac{x_0 - y_0}{2} + \dfrac{2}{x_0 - y_0}$

$$= \frac{4-(x_0^2-y_0^2)}{2(x_0-y_0)}$$

Άρα, $u(x_0,y_0) = \dfrac{2(x_0-y_0)}{4-(x_0^2-y_0^2)}$

Δηλαδή, $u(x,y) = \dfrac{2(x-y)}{4-(x^2-y^2)}$

Αν $(x,y) \longrightarrow (x_0,y_0)$ με $x_0^2-y_0^2=4$, $x_0>0$ $x>y$

$u(x,y) \longrightarrow \infty$