Μερικές διαφορικές εξισώσεις
Εξέταση 14 Σεπτεμβρίου 2020

1. (20 Βαθμοί) Θεωρούμε για τη συνάρτηση $u(x,t)$ το πρόβλημα

$$\begin{aligned} u_t + t^2 u_x &= 0, \\ u(x,0) &= g(x) \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου $g \in C^1(\mathbb{R})$.
(α) Για δεδομένο $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0,\infty)$, ποια είναι η χαρακτηριστική που διέρχεται από αυτό;
(β) Να βρεθεί συνάρτηση που ικανοποιεί το παραπάνω πρόβλημα στο μέγιστο δυνατόν υποσύνολο H του $\mathbb{R} \times [0,\infty)$ το οποίο περιέχει τον οριζόντιο άξονα $\mathbb{R} \times \{0\}$.

2. (20 Βαθμοί) Να αναχθεί η εξίσωση $u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} - u_y = 0$ στην $U_{\xi\xi} = U_\eta$ όπου $U(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), y(\xi,\eta))$ για κατάλληλες γραμμικές συναρτήσεις $x(\xi,\eta), y(\xi,\eta)$.

3. (20 Βαθμοί) Να βρεθεί συνάρτηση $u = u(x,t) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} & u_{tt} - u_{xx} = 0 \qquad \text{στο } \mathbb{R}^2 \\ & \lim_{x\to\infty} u(x,x)/e^x = 1, \\ & \lim_{x\to-\infty} u(x,-x)/x^3 = 1. \end{aligned}$$

4. (30 Βαθμοί) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} u_t - 5u_{xx} &= 0 && \text{για κάθε } (x,t) \in (0,2) \times (0,\infty), && (1) \\ u(0,t) = u(2,t) &= 0 && \text{για κάθε } t > 0, && (2) \\ u(x,0) &= \sin(\pi x) - 3\sin(5\pi x/2) && \text{για κάθε } x \in [0,2]. && (3) \end{aligned}$$

(α) Να βρεθούν οι συναρτήσεις της μορφής $u(x,t) = X(x)T(t)$ που ικανοποιούν τις (1), (2).
(β) Να βρεθεί μια λύση του προβλήματος.
(γ) Να δειχθεί ότι το πρόβλημα έχει ακριβώς μια λύση.

5. (25 Βαθμοί) Έστω $u \in C^2(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ η οποία ικανοποιεί την εξίσωση κύματος $u_{tt} = 3u_{xx}$ στο $\mathbb{R} \times (0,\infty)$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $t \geqslant 0$ ισχύει $\lim_{|x|\to\infty} u_x(x,t) = \lim_{|x|\to\infty} u_t(x,t) = 0$. Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $M : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$M(t) := \int_{\mathbb{R}} u_t(x,t) u_x(x,t)\, dx$$

για κάθε $t \geqslant 0$ είναι σταθερή.

Σημείωση: Όπου χρειαστεί παραγώγιση ολοκληρώματος που εξαρτάται από παράμετρο, θεωρούμε ότι ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις και η παράγωγος περνάει στον ολοκληρωτέο.

Η διάρκεια της εξέτασης είναι $1\frac{1}{2}$ ώρα. Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις[1]

1. (α) $\gamma(t) = ((t^3/3) + c, t)$ με $c = x_0 - (t_0^3/3)$. Ισχύει $\gamma(t_0) = (x_0, t_0)$.
(β) $H = \mathbb{R} \times [0, \infty)$.

$$u(x,t) = g\left(x - \frac{t^3}{3}\right)$$

2. $x = \xi, y = 2\xi + \eta$.

3. Γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι κάθε ομαλή λύση της δοσμένης εξίσωσης κύματος γράφεται ως

$$u(x,t) = f(x+t) + g(x-t)$$

με τις $f, g \in C^2(\mathbb{R})$. Επιλέγουμε f, g ώστε $f(2x) = e^x, g(2x) = x^3$. Δηλαδή $f(x) = e^{x/2}, g(x) = x^3/8$.

4. (β) $u(x,t) = e^{-5\pi^2 t}\sin(\pi x) - 3e^{-5\cdot(25\pi^2/4)\pi^2 t}\sin(5\pi x/2)$.

5.

$$\begin{aligned} M'(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} (u_{tt}u_x + u_t u_{xt})\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (3u_{xx}u_x + u_t u_{xt})\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_t^2\right)\,dx = \left(\frac{3}{2}u_x^2 + \frac{1}{2}u_t^2\right)\Bigg|_{-\infty}^{\infty} = 0. \end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα έπεται από τα δεδομένα για τα όρια των u_x, u_t.

[1] Σε μια εξέταση δεν γράφουμε έτσι τις λύσεις μας. Χρειάζονται επεξήγηση.