Μερικές διαφορικές εξισώσεις

Εξέταση 29 Ιανουαρίου 2019

1. (20 Βαθμοί) Να λυθεί η

$$tu_x + u_t = u^2,$$
$$u(x,0) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

στο μέγιστο υποσύνολο του $H = \mathbb{R} \times [0,\infty)$ που αυτό είναι δυνατόν. Η f είναι μια δεδομένη συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

2. (15 Βαθμοί) Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - 4u_{xx} = \cos(2t) & \text{στο } \Omega := \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \sin x & \text{για } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x,0) = \cos x & \text{για } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

3. (10 Βαθμοί) Να αναχθεί η εξίσωση $u_{xx} - u_{xt} - 6u_{tt} = 0$ σε εξίσωση της μορφής $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$ όπου $U(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta))$ για κατάλληλες γραμμικές συναρτήσεις $x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)$.

4. (20 Βαθμοί) Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(x) = \begin{cases} x & \text{για } x \in [0,\pi/2], \\ \pi - x & \text{για } x \in (\pi/2,\pi], \\ -\phi(-x) & \text{για } x \in [-\pi,0). \end{cases}$$

(α) Να προσδιοριστεί η σειρά Fourier της ϕ.

(β) Να δειχθεί ότι η σειρά Fourier από το (α) συγκλίνει ομοιόμορφα απολύτως στην ϕ στο $[-\pi,\pi]$.

(γ) Να λυθεί με τη μέθοδο χωρισμού μεταβλητών το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{array}{ll} u_t = 4u_{xx} & \text{στο } \Omega := (0,\pi) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = \phi(x) & \text{για } x \in [0,\pi], \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{για } t > 0. \end{array}$$

Ειδικότερα, να διαπιστωθεί ότι η λύση είναι στοιχείο του $C(\bar{\Omega}) \cap C^{2,1}(\Omega)$.

5. (10 Βαθμοί) Έστω $\phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ συνάρτηση στοιχείο του $C^2([0,\infty))$. Επεκτείνουμε τη ϕ σε άρτια συνάρτηση ϕ_a στο $\mathbb{R}$ μέσω της

$$\phi_a(x) = \begin{cases} \phi(-x) & \text{για } x < 0, \\ \phi(x) & \text{για } x \geq 0. \end{cases}$$

Ποια είναι η ικανή και αναγκαία συνθήκη για τις τιμές $\phi(0), \phi'(0), \phi''(0)$ ώστε η ϕ_a να είναι στοιχείο του $C^2(\mathbb{R})$;

6. (15 Βαθμοί) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών (k είναι μια θετική σταθερά)

$$\begin{array}{ll} u_t = ku_{xx} & \text{στο } \Omega := (0,\infty) \times (0,\infty), \\ u(x,0) = e^{-x} & \text{για κάθε } x \in [0,\infty), \\ u_x(0,t) = 0 & \text{για κάθε } t > 0. \end{array}$$

Να δοθεί σε ολοκληρωτική αναπαράσταση μια λύση του τελευταίου προβλήματος.

7. (15 Βαθμοί) Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών και συνοριακών τιμών

$$\begin{array}{ll} u_{tt} = 2u_{xx} - u_t & \text{στο } \Omega := (0,1) \times (0,\infty), \\ u_x(0,t) = g(t) & \text{για κάθε } t > 0, \\ u_x(1,t) = h(t) & \text{για κάθε } t > 0, \\ u(x,0) = k(x) & \text{για κάθε } x \in [0,1], \\ u_t(x,0) = \lambda(x) & \text{για κάθε } x \in [0,1], \end{array}$$

όπου g, h, k, λ είναι δεδομένες συναρτήσεις. Να δειχθεί ότι το πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση.

Άριστα είναι το 100. **Καλή επιτυχία!**

Απαντήσεις

1. Λύνουμε την εξίσωση με τη μέθοδο των χαρακτηριστικών. Οι εξισώσεις που ικανοποιούνται από κάθε χαρακτηριστική $(x(s), t(s), z(s))_{s\in\mathbb{R}}$ (όπου $z(s) := u(x(s), t(s))$) είναι

$$\begin{aligned} x'(s) &= t(s),\\ t'(s) &= 1,\\ z'(s) &= z^2(s). \end{aligned}$$

Η τρίτη σχέση ισχύει γιατί χρησιμοποιώντας τις δύο πρώτες και τη δοσμένη διαφορική εξίσωση βρίσκουμε ότι (αν η u ικανοποιεί την εξίσωση, τότε)

$$\begin{aligned} z'(s) &= u_x(x(s), t(s))x'(s) + u_t(x(s), t(s))t'(s)\\ &= u_x(x(s), t(s))t(s) + u_t(x(s), t(s)) = u^2(x(s), t(s)) = z^2(s). \end{aligned}$$

Από όλες τις χαρακτηριστικές διαλέγουμε εκείνες με $t(s) = s$ (αυτές μας αρκούν για τη λύση). Τότε οι εξισώσεις για τις x και z δίνουν $x(s) = \frac{s^2}{2} + A$ (με A σταθερά) και

$$\frac{z'(s)}{z^2(s)} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{z(s)}\right)' = -1 \Rightarrow \frac{1}{z(s)} = -s + B \tag{1}$$

με B σταθερά.

Έστω τώρα $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$. Επιλέγουμε A ώστε $x(t_0) = x_0$, που σημαίνει $t_0^2/2 + A = x_0$, δηλαδή θέτουμε $A = x_0 - t_0^2/2$ (επιλέγουμε δηλαδή μια χαρακτηριστική που η προβολή της στο x, t επίπεδο περνάει από το (x_0, t_0)). Τότε, χρησιμοποιώντας την (1), βρίσκουμε ότι

$$u(x_0, t_0) = u(x(t_0), t(t_0)) = z(t_0) = \frac{1}{B - t_0}. \tag{2}$$

[Μένει να προσδιορίσουμε το B. Αυτό θα προκύψει από τα αρχικά δεδομένα. Γιατί η (1) θα ισχύει και όταν η χαρακτηριστική τέμνει την καμπύλη στην οποία γνωρίζουμε τις τιμές της u.]

Η προβολή της χαρακτηριστικής στο x, t επίπεδο τέμνει το $\mathbb{R} \times \{0\}$ όταν $s = 0$. Έχουμε τότε $z(0) = 1/B$ αλλά και $z(0) = u(x(0), t(0)) = u(A, 0) = f(A) = f(x_0 - t_0^2/2)$. Άρα $B = 1/f(x_0 - t_0^2/2)$ και επομένως, αντικαθιστώντας την τιμή του B στη (2) βρίσκουμε

$$u(x_0, t_0) = \frac{f\left(x_0 - \frac{t_0^2}{2}\right)}{1 - t_0 f\left(x_0 - \frac{t_0^2}{2}\right)}.$$

Σε αυτή τη σχέση φτάσαμε με συνεπαγωγές, όχι με ισοδυναμίες, υποθέτοντας ότι η u είναι λύση και κάνοντας διάφορες παραδοχές (π.χ., ότι $z(s) \neq 0$ ώστε να διαιρέσουμε). Δεν θα επιχειρήσουμε να τις δικαιολογήσουμε, αλλά κάνουμε το εξής.

Θέτουμε $U := \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty) : 1 \neq tf(x - t^2/2)\}$ και

$$u(x, t) = \frac{f\left(x - \frac{t^2}{2}\right)}{1 - tf\left(x - \frac{t^2}{2}\right)}$$

για κάθε $(x, t) \in U$. Προφανώς η u ικανοποιεί την $u(x, 0) = f(x)$, και κάνοντας πράξεις, βρίσκουμε ότι ικανοποιεί και την $tu_x + u_t = u^2$ στο U (εδώ χρησιμοποιούμε το ότι η f είναι παραγωγισιμη).

2. Εφαρμόζουμε τον γνωστό τύπο για τη μη ομογενή εξίσωση κύματος (σχέση (2.59) στο βιβλίο των Ακρίβη-Αλικάκου). Η λύση είναι η

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\sin(x - 2t) + \sin(x + 2t)}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} \int_{x-2t}^{x+2t} \cos(s)\, ds + \frac{1}{2 \cdot 2} \int_0^t \int_{x-2(t-s)}^{x+2(t-s)} \cos(2s)\, dyds\\ &= \sin x \cos(2t) + \frac{1}{4}\{\sin(x + 2t) - \sin(x - 2t)\} + \frac{1}{4} \int_0^t 4(t - s) \cos(2s)\, ds\\ &= \sin x \cos(2t) + \frac{1}{2} \cos x \sin(2t) + \frac{1}{4}(1 - \cos(2t)). \end{aligned}$$

3. Η εξίσωση γράφεται $(\partial_x^2 - \partial_t\partial_x - 6\partial_t^2)u(x,t) = 0$ (πολλαπλασιασμό τελεστών εδώ εννοούμε τη σύνθεση τελεστών). Με συμπλήρωση του τετραγώνου, ο διαφορικός τελεστής γράφεται ως

$$\left(\partial_x - \frac{1}{2}\partial_t\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\partial_t\right)^2.$$

Θέλουμε

$$\partial_\xi = \partial_x - \frac{1}{2}\partial_t, \tag{3}$$

$$\partial_\eta = \frac{5}{2}\partial_t. \tag{4}$$

Αν $U(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta))$, τότε ο κανόνας της αλυσίδας δίνει

$$\partial_\xi U = u_x\partial_\xi x + u_t\partial_\xi t = (\partial_\xi x \cdot \partial_x + \partial_\xi t \cdot \partial_t)u, \tag{5}$$

$$\partial_\eta U = u_x\partial_\eta x + u_t\partial_\eta t = (\partial_\eta x \cdot \partial_x + \partial_\eta t \cdot \partial_t)u. \tag{6}$$

Οι (5), (6) ταυτίζονται με τις (3), (4) αν επιλέξουμε $\partial_\xi x = 1, \partial_\xi t = -1/2, \partial_\eta x = 0, \partial_\eta t = 5/2$. Οι γραμμικές συναρτήσεις x, t που ικανοποιούν αυτές τις σχέσεις είναι οι

$$x = \xi,$$

$$t = -\frac{1}{2}\xi + \frac{5}{2}\eta.$$

Με αυτή την αλλαγή μεταβλητών, η δοσμένη εξίσωση για την u είναι ισοδύναμη με την $U_{\xi\xi} - U_{\eta\eta} = 0$ για την U.

4. (α) Η ϕ είναι περιττή (από τον ορισμό των τιμών της στο $[-\pi, 0)$), οπότε οι συντελεστές Fourier που είναι συντελεστές των $\cos(nx), n \in \mathbb{N}$, είναι μηδέν. Έτσι,

$$\phi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \sin(nx)$$

με

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\sin(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi(x)\sin(nx)\,dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (\pi - x)\sin(nx)\,dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,dx + \int_0^{\pi/2} y\sin(n\pi - ny)\,dy\right) \\
&= \frac{2}{\pi}(1 - (-1)^n)\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)\,dx.
\end{aligned}$$

Όταν το n είναι άρτιος, ο παράγοντας $1 - (-1)^n = 0$, ενώ όταν $n = 2k+1$ με $k \in \mathbb{N}$, τότε το ολοκλήρωμα υπολογίζεται (με ολοκλήρωση κατά παράγοντες) ως $(-1)^k/(2k+1)^2$. Άρα

$$\phi(x) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\{(2k+1)x\}.$$

(β) Ο k-ος όρος της σειράς έχει απόλυτη τιμή που φράσσεται από το $(2k+1)^{-2}$. Επειδή $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2} < \infty$, έπεται από το κριτήριο Weierstrass ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα απολύτως. Το όριο της σειράς είναι η ϕ γιατί η ϕ είναι συνεχής με $\phi(-\pi) = \phi(\pi)$ και με παράγωγο κατά τμήματα συνεχή (εφαρμόζουμε δηλαδή το Θεώρημα 3.5 από το βιβλίο των Ακρίβη-Αλικάκου).
(γ) Κατά τα γνωστά, βρίσκουμε[1] ότι οι γραμμικά ανεξάρτητες λύσεις του προβλήματος

$$\begin{aligned}
&u_t = 4u_{xx} && \text{στο } \Omega \\
&u(0,t) = u(\pi,t) && \text{για κάθε } t > 0
\end{aligned}$$

[1] Στις εξετάσεις, αυτό πρέπει να εξηγηθεί πλήρως. Δες στις σελίδες 241, 242 του βιβλίου των Ακρίβη-Αλικάκου.

που έχουν τη μορφή $u(x,t) = X(x)T(t)$ είναι πολλαπλάσια των $u_n(x,t) = \sin(nx)e^{-4n^2 t}$ όπου $n \in \mathbb{N}^+$. Θέτουμε λοιπόν

$$u(x,t) := \sum_{n=1}^{\infty} A_n u_n(x,t). \tag{7}$$

Αυτή η u ικανοποιεί την $u(x,0) = \phi(x)$ αρκεί να επιλέξουμε κατάλληλα τις σταθερές A_n. Πώς; Όπως υποδεικνύει το ερώτημα (β). Δηλαδή $A_{2k} = 0$, και

$$A_{2k+1} = \frac{4}{\pi}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για αυτή την επιλογή των A_n, η u που ορίσαμε πιο πάνω είναι συνεχής στο $\bar{\Omega}$ γιατί συγκλίνει ομοιόμορφα σε αυτό και οι όροι της είναι συνεχείς συναρτήσεις.

Για το ότι η $\partial_t u$ είναι συνεχής στο Ω, κάνουμε το εξής: Παραγωγίζοντας όρο προς όρο, ως προς t, τη σειρά (7), παίρνουμε τη σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \partial_t\{A_n u_n(x,t)\} = -4\sum_{n=1}^{\infty} A_n n^2 \sin(nx)e^{-4n^2 t}. \tag{8}$$

Αυτή η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε σύνολο της μορφής $\Omega_\varepsilon := [0,\pi]\times[\varepsilon,\infty)$ με $\varepsilon > 0$. Πράγματι, για $\varepsilon > 0$ δεδομένο, έχουμε

$$\sup_{(x,t)\in\Omega_\varepsilon} |A_n n^2 \sin(nx)e^{-4n^2 t}| \le n^2 e^{-4n^2\varepsilon}.$$

Επειδή η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-4n^2\varepsilon}$ συγκλίνει, το κριτήριο Weirstrass δίνει την ομοιόμορφη απόλυτη σύγκλιση της (8) στο Ω_ε. Επίσης, στο Ω_ε, η σειρά (7) συγκλίνει ομοιόμορφα. Άρα, με βάση γνωστή πρόταση του απειροστικού λογισμού[2] η $\partial_t u$ υπάρχει στο Ω_ε και δίνεται από τη σειρά (8), η οποία κατά τα γνωστά είναι συνεχής στο Ω_ε. Και επειδή $\Omega = \cup_{\varepsilon>0}\Omega_\varepsilon$, έπεται ότι $u \in C^{0,1}(\Omega)$.

Χρησιμοποιώντας την έκφραση (8) για την $\partial_t u$, δείχνουμε με παρόμοιο τρόπο ότι οι $\partial_x\partial_t u, \partial_x^2\partial_t u$ υπάρχουν και είναι συνεχείς στο Ω. Έχουμε τελικά λοιπόν ότι $u \in C^{2,1}(\Omega)$ και οι παράγωγοι $\partial_t u, \partial_x\partial_t u, \partial_x^2\partial_t u$ υπολογίζονται παραγωγίζοντας όρο προς όρο τη σειρά που ορίζει την u.

Η *u* είναι λυση: Επειδή οι $\partial_t u, \partial_x\partial_t u, \partial_x^2\partial_t u$ υπολογίζονται με παραγώγιση της σειράς (7) όρο προς όρο, βρίσκουμε ότι στο Ω ισχύει

$$u_t - 4u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\{\partial_t u_n(x,t) - 4\partial_x^2 u_n(x,t)\} = 0$$

αφού κάθε όρος ισούται με 0. Οι αρχικές και συνοριακές συνθήκες ικανοποιούνται εξαιτίας της επιλογής των A_n και u_n. Και όπως σημειώσαμε πιο πάνω, ισχύει ότι $u \in C^{2,1}(\Omega)$.

5. Η συνθήκη είναι η $\phi'(0) = 0$. Προφανώς η ϕ_a είναι C^2 στο $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ και μένει να εξετάσουμε τι γίνεται στο 0.

Ας υποθέσουμε ότι αυτή η συνθήκη ισχύει. Επειδή

$$\phi_a(0+) = \phi_a(0-) = \phi(0+) = \phi(0) = \phi_a(0),$$

η ϕ_a είναι συνεχής και στο 0, άρα σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ (η τρίτη ισότητα ισχύει γιατί η ϕ είναι συνεχής στο 0).

Η $\phi_a'(x)$ ισούται με $\phi'(x)$ στο $(0,\infty)$ και με $-\phi'(-x)$ στο $(-\infty,0)$. Άρα τα πλευρικά της όρια στο 0 είναι

$$\phi_a'(0-) = -\phi'(0+) = -\phi'(0) = 0,$$
$$\phi_a'(0+) = \phi'(0+) = \phi'(0) = 0.$$

Από γνωστή πρόταση του απειροστικού λογισμού[3], η ϕ_a είναι παραγωγίσιμη στο 0 με παράγωγο την κοινή τιμή των δύο ορίων, δηλαδή 0. Και προφανώς είναι συνεχής στο 0. Συνολικά λοιπόν, $\phi_a \in C^1(\mathbb{R})$.

[2] Πόρισμα 27.31 στο Απειροστικός Λογισμός των Νεγρεπόντη, Γιωτόπουλου, Γιαννακούλια.

[3] Αν η $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο a, παραγωγίσιμη στο $(a, a+\varepsilon)$ για κάποιο $\varepsilon > 0$, και $\lim_{x\to a^+} f'(x) = \ell$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε η δεξιά παράγωγος της f στο a, $\lim_{h\to 0^+}\{f(a+h) - f(a)\}/h$, υπάρχει και ισούται με το όριο ℓ. Πόρισμα 18.24 στον Απειροστικό Λογισμό των Νεγρεπόντη. Γιωτόπουλου, Γιαννακούλια. Είναι εύκολη άσκηση πάνω στο θεώρημα μέσης τιμής.

Η $\phi_a''(x)$ ισούται με $\phi''(x)$ στο $(0,\infty)$ και με $\phi''(-x)$ στο $(-\infty,0)$. Άρα τα πλευρικά της όρια στο 0 είναι

$$\begin{aligned}\phi_a''(0-) &= \phi''(0+) = \phi''(0),\\ \phi_a''(0+) &= \phi''(0+) = \phi''(0).\end{aligned}$$

Έπεται όπως πιο πάνω ότι η ϕ_a' είναι παραγωγίσιμη στο 0 και η παράγωγός της είναι συνεχής στο 0. Άρα $\phi_a \in C^2(\mathbb{R})$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $\phi_a \in C^2(\mathbb{R})$. Πρέπει $\phi_a'(0-) = \phi_a'(0+)$, δηλαδή $-\phi'(0) = \phi'(0)$, άρα $\phi'(0) = 0$.

Σημείωση: Παντού πιο πάνω, τα σύμβολα $\phi'(0), \phi''(0)$ αναφέρονται στην παράγωγο από δεξιά της ϕ και της ϕ' αντίστοιχα αφού η ϕ έχει πεδίο ορισμού το $[0,\infty)$.

6. Επεκτείνουμε την e^{-x} σε άρτια στο $\mathbb{R}$, δηλαδή θέτουμε $\phi(x) = e^{-|x|}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε μια λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} v_t &= kv_{xx} && \text{στο } \mathbb{R}\times(0,\infty),\\ v(x,0) &= \phi(x) && \text{για κάθε } x\in\mathbb{R},\end{aligned}$$

δίνεται για $(x,t) \in \mathbb{R}\times(0,\infty)$ από την

$$v(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4kt}}\, dy.$$

[Αυτό γιατί η ϕ είναι φραγμένη και συνεχής στο $\mathbb{R}$] Για σταθερό $t > 0$, η v είναι άρτια ως προς x γιατί

$$v(-x,t) = \int_{\mathbb{R}} \phi(y)\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} e^{-\frac{(y+x)^2}{4kt}}\, dy \overset{y=-z}{=} \int_{\mathbb{R}} \phi(-z)\frac{1}{\sqrt{4k\pi t}} e^{-\frac{(z-x)^2}{4kt}}\, dz = v(x,t).$$

Για την τελευταία ισότητα, χρησιμοποιήσαμε το ότι η ϕ είναι άρτια. Επειδή, με βάση γνωστό θεώρημα, η $v \in C^{2,1}(\mathbb{R}\times(0,\infty))$ (είναι μάλιστα C^∞ σε εκείνο το χωρίο), για $t > 0$, παραγωγίζοντας την $v(-x,t) = v(x,t)$ ως προς x και θέτοντας $x = 0$, παίρνουμε ότι $v_x(0,t) = 0$.

Με βάση τα παραπάνω, έπεται ότι ο περιορισμός της v στο $\bar{\Omega}$, δηλαδή η συνάρτηση $u = v|\bar{\Omega}$, είναι μια λύση του προβλήματος στην εκφώνηση της άσκησης. Μια εναλλακτική έκφραση για την u (που εκμεταλεύεται το ότι η ϕ είναι άρτια) είναι η

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4k\pi t}}\int_0^\infty e^{-y}\left(e^{-\frac{(y+x)^2}{4kt}} + e^{-\frac{(y-x)^2}{4kt}}\right) dy$$

για $x, t > 0$.

7. Έστω u_1, u_2 δύο λύσεις. Θέτουμε $u := u_1 - u_2$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $E : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$E(t) := \int_0^1 \{u_t^2(x,t) + 2u_x^2(x,t)\}\, dx$$

για κάθε $t \geq 0$. Η u λύνει το πρόβλημα που ικανοποιούν οι u_1, u_2 αλλά με $g = h = k = \lambda = 0$ (μηδενικές συναρτήσεις). Έχουμε επίσης ότι $E(0) = 0$ και η E έχει παράγωγο

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2\int_0^1 \{u_t(x,t)u_{tt}(x,t) + 2u_x(x,t)u_{xt}(x,t)\}\, dx = 2\int_0^1 \{u_t(2u_{xx} - u_t) + 2u_x u_{xt}\}\, dx\\ &= 4\int_0^1 (u_t u_{xx} + u_x u_{xt})\, dx - 2\int_0^1 u_t^2\, dx = 4\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}\{u_x u_t\}\, dx - 2\int_0^1 u_t^2\, dx\\ &= u_x(x,t)u_t(x,t)\Big|_{x=0}^{x=1} - 2\int_0^1 u_t^2\, dx = -2\int_0^1 u_t^2\, dx \leq 0.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το ότι $u_x(0,t) = u_x(1,t) = 0$ για κάθε $t > 0$. Άρα $E(t) = 0$ για κάθε $t > 0$ και επομένως $\nabla u = (u_x, u_t) = 0$ στο Ω. Έπεται ότι η u είναι σταθερή στο Ω, και επειδή το όριό της καθώς $t \to 0^+$ και $x \in (0,1)$ σταθερό ισούται με 0, έχουμε ότι η u είναι 0 στο $\bar{\Omega}$. Άρα το πρόβλημα έχει το πολύ μια λύση.