1) Γράφουμε την εξίσωση ως $u_x - \frac{x}{t} u_t = 0$.

Το σύστημα για τις χαρακτηριστικές καμπύλες $(x(s), t(s))$, $s \in \mathbb{R}$ είναι [Υποθέτουμε ότι το δοσμένο πρόβλημα έχει λύση στο Ω]

$$\frac{dx}{ds} = 1$$

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{x}{t} \qquad \text{Γιατί } \frac{dz}{ds} = u_x \frac{dx}{ds} + u_t \frac{dt}{ds} = u_x - \frac{x}{t} u_t = 0$$

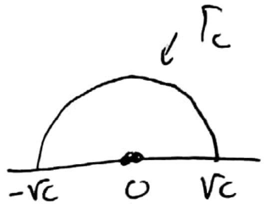
$$\frac{dz}{ds} = 0 \qquad \text{όπου } z(s) := u(x(s), t(s))$$

Είναι αρκετό να επιλέξουμε $x(s) = s$.

Η δεύτερη εξίσωση δίνει $t \frac{dt}{ds} = -s \Rightarrow (t^2(s))' = (-s^2)'$

$\Rightarrow t^2(s) + s^2 = c \in$ σταθερά

Άρα είναι χαρακτηριστικές οι εξής καμπύλες



$$\Gamma_c : \{ (s, \sqrt{c - s^2}) : s \in [-\sqrt{c}, \sqrt{c}] \}. \qquad c \geq 0$$

Η z είναι σταθερή συνάρτηση του s.

Για δεδομένο $(x,t) \in \Omega$, η Γ_c με $c = x^2 + t^2$ περιέχει το (x,t) (για $s = x$) και επειδή η z είναι σταθερή, έχουμε

$$u(x,t) = z(x) = z(-\sqrt{c}) = z(\sqrt{c})$$

(α) Σε αυτή την περίπτωση,

$z(-\sqrt{c}) = u(-\sqrt{c}, 0) = \cos(-\sqrt{c}) = \cos(\sqrt{c})$
$z(\sqrt{c}) = u(\sqrt{c}, 0) = \cos(\sqrt{c})$

Δηλαδή, αν υπάρχει λύση, τότε αυτή αναγκαστικά είναι η

$u(x,t) = \cos(\sqrt{x^2 + t^2}) \quad (x,t) \in \overline{\Omega}$.

Εύκολα επαληθεύουμε ότι η u λύνει το πρόβλημα.

(θ) Σε αυτή την περίπτωση, αν υπάρχει λύση θα πρέπει,

$u(x,t) = z(-\sqrt{c}) = z(\sqrt{c})$ που δίνει ότι $-\sqrt{c} = \sqrt{c}$ αδύνατο για $(x,t) \neq (0,c)$.

(γ) Αν υπάρχει λύση, θα είναι η

$$u(x,t) = z(\sqrt{c}) = \sqrt{c} = \sqrt{x^2+t^2} \quad \forall (x,t) \in \ldots$$

Ευκολα επαληθεύουμε ότι λύνει το πρόβλημα.

2) (α) Το σύστημα για τις χαρακτηριστικές είναι

$$\frac{dt}{ds} = 1$$

$$\frac{dx}{ds} = z(s)$$

$$\frac{dz}{ds} = 0 \qquad \text{όπου } z(s) = u(x(s), t(s))$$

Έπεται ότι
① $t(s) = s + c_1$
② $z(s) = c_2$
③ $x(s) = c_2 s + c_3$ με c_1, c_2, c_3 σταθερές

Η $(x(s), t(s))$ συναντά τον άξονα των x όταν $s = -c_1$ στο σημείο $(c_3 - c_1 c_2, 0)$.

Η c_2 πρέπει να ικανοποιεί την

$$c_2 = z(-c_1) = u(x(-c_1), 0) = \varphi(c_3 - c_1 c_2) \quad ④$$

Για δεδομένα $c_1, c_3 \in \mathbb{R}$, αν υπάρχει c_2 που να ικανοποιεί την ④ τότε η καμπύλη $(x(s), t(s))$, $s \in \mathbb{R} : s + c_1 > 0$ δίνει μια χαρακτηριστική. Και αυτές είναι όλες οι χαρακτηριστικές.

Για δεδομένο $x_0 \in \mathbb{R}$ παίρνουμε

$c_1 = 0$, $c_3 = x_0$.

Η (4) δίνει $c_2 = \varphi(x_0)$.

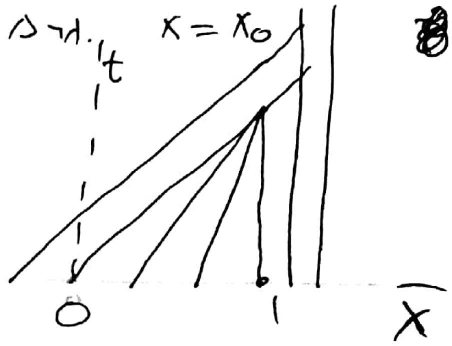
Άρα η $\{(\varphi(x_0)s + x_0, s), \ s \geq 0\}$ είναι η χαρακτηριστική που διέρχεται από το $(x_0, 0)$

(β) Οι χαρακτηριστικές είναι οι ευθείες

$\{(s + x_0, s) : s \geq 0\}$, $x_0 < 0$ Δηλ $x = x_0 + t$

$\{(s(1-x_0) + x_0, s) : s \geq 0\}$ $x_0 \in [0,1)$ Δηλ. $x = x_0 + (1-x_0)t$

$\{(x_0, s) : s \geq 0\}$ $x_0 \geq 1$ Δηλ. $x = x_0$



Εύκολα βλέπουμε ότι ο χρόνος θραύσης είναι $t^* = 1$.

Εκεί συναντιούνται οι χαρακτηριστικές που ξεκινούν από τα $x_0 \in [0,1]$.

(Άλλες συγκρούσεις γίνονται σε μεγαλύτερους χρόνους)

Έστω $t < t^* = 1$

- Αν $x \leq t$ από την εικόνα των χαρακτηριστικών έπεται ότι ορίζει $u(x,t) = 1$

  [Η u ισούται με 1 στην ευθεία χαρακτηριστική που ξεκινάει από $(x_0, 0)$ με $x_0 < 0$]

- Αν $x \geq 1$ όμοια ορίζει $u(x,t) = 0$

- Αν $t < x < 1$, η χαρακτηριστική που περνάει από

Το (x,t) είναι αυτό με x_0: $x = x_0 + (1-x_0)t$

Δηλαδή $x_0 = \frac{x-t}{1-t}$

Και έτσι η τιμή της u είναι $u(x,t) = 1 - x_0 = \frac{1-x}{1-t}$

Άρα $u(x,t) = \begin{cases} 1 & x \le t \\ \frac{1-x}{1-t} & t < x < 1 \\ 0 & x \geq 1 \end{cases}$

για $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1)$

3| Οι χαρακτηριστικές $(x(s), t(s))$ ικανοποιούν

$\frac{dx}{ds} = 1$ Άρα $\frac{dx}{dt} = 1$ οπότε $x = t + c_1$

$\frac{dt}{ds} = 1$

Η T_c: $x = c + t$, $t \geq 0$ είναι χαρακτηριστική $\forall c \in \mathbb{R}$

Η $z(t) = u(c+t, t)$ ικανοποιεί την

$$z'(t) = u_x + u_t = -u^2(c+t,t) = -z^2(t)$$

Αυτή $\Rightarrow -\frac{z'}{z^2} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{z}\right)' = 1 \Rightarrow \frac{1}{z(t)} = t + c_1$

$\Rightarrow z(t) = \frac{1}{t + c_1}$

Έπειτα $\frac{1}{c_1} = z(0) = u(c,0) = f(c)$

Για δεδομένα $x\in\mathbb{R}, t>0$ επιλέγουμε $c=x-t$

Τότε $u(x,t)=z(t)=\frac{1}{t+c_1}=\frac{1}{t+\frac{1}{f(c)}}=$

$$=\frac{f(c)}{1+tf(c)}=\frac{f(x-t)}{1+tf(x-t)}$$

Αν η f μηδενίζεται σε κάποια σημεία, τότε ενδέχεται πιο πάνω να έχουμε διαίρεση με το 0 μερικές φορές. Δεν πειράζει, η διαδικασία μας έδωσε έναν τύπο για την u. Θέλουμε τώρα

$$u(x,t)=\frac{f(x-t)}{1+tf(x-t)} \quad (*)$$

για όλα τα $(x,t)\in H$ με $1+tf(x-t)\neq 0$.
Αυτό είναι ένα ανοιχτό σύνολο και εκεί μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι η u ικανοποιεί την

$u_x+u_t+u^2=0$ και βέβαια είναι C^1.

Προφανώς για $t=0$ έχουμε $u(x,0)=f(x)$.

(α) Αν $f\geq 0$, ο παρονομαστής στην (*) πιο πάνω είναι πάντοτε $\neq 0$ οπότε η (*) ορίζει λύση σε όλο το H.

(β) Αν $f(x_0)<0$ τότε ο παρονομαστής στην (*) είναι $=0$ για όλα τα x,t με $x-t=x_0$ και $1+tf(x_0)=0$, $t>0$

Δηλ. $t=-\frac{1}{f(x_0)}>0$, $x=x_0-\frac{1}{f(x_0)}$

και τότε $\lim_{t\to t_0^-} u(x,t) = \frac{f(x_0)}{0^+} = -\infty$ αφού $f(x_0)<0$

(γ) Έστω ~~[illegible]~~ $m = \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x) > -\infty$.

Αν $m \geq 0$, από το (α) είχαμε ότι $T = \infty$

Αν $m < 0$ τότε η f παίρνει αρνητικές τιμές.

Κάθε x με $f(x)<0$ προκαλεί έκρηξη τον χρόνο

$t = -\frac{1}{f(x)}$ και όχι νωρίτερα (με βάση το (α)).

Άρα $T = \inf_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ \text{με } f(x)<0}} \left\{-\frac{1}{f(x)}\right\} = -\sup_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ : f(x)<0}} \frac{1}{f(x)} = -\frac{1}{\inf_{\substack{x\in\mathbb{R} \\ : f(x)<0}} f(x)}$

$= -\frac{1}{m}$

4) Η εξίσωση είναι $(\partial_x^2 - 4\partial_x\partial_t + 6\partial_t^2)u = 0$

Γράφουμε τον διαφορικό τελεστή ως εξής

$$\partial_x^2 - 4\partial_x\partial_t + 6\partial_t^2 = (\partial_x - 2\partial_t)^2 + 2\partial_t^2$$

~~[illegible]~~

Θέλουμε
$$\partial_\xi = \partial_x - 2\partial_t$$
$$\partial_\eta = \sqrt{2}\,\partial_t \quad (1)$$

Αν $x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)$ είναι συναρτήσεις των ξ,η και

$U(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta))$ τότε

$$\partial_\xi U = u_x \, \partial_\xi x + u_t \, \partial_\xi t$$

$$\partial_\eta U = u_x \, \partial_\eta x + u_t \, \partial_\xi t$$

Αυτές ταυτίζονται με τις (1) αν έχουμε

$$\partial_\xi x = 1 \, , \quad \partial_\xi t = -2$$

$$\partial_\eta x = 0 \, , \quad \partial_\eta t = \sqrt{2}$$

Αρκεί $x = \xi$

$t = \sqrt{2}\eta - 2\xi$

Για αυτές τις $x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)$ έχουμε

$$U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = u_{xx}(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta))$$

$$-4 u_{xt}(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)) + 6 u_{tt}(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)) = 0$$

5| (α) $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{ a_k \cos(k\pi x) + b_k \sin(k\pi x) \}$

[Δες § 3.1.5, p=2]

x·cos(kπx) περιττή

Για $k \in \mathbb{N}$, $a_k = \int_{-1}^{1} (x+1)\cos(k\pi x)\,dx = \int_{-1}^{1} \cos(k\pi x)\,dx$

Άρα $a_0 = 2$ ενώ για $k \in \mathbb{N}^+$

$$a_k = \frac{\sin(k\pi x)}{k\pi}\Big|_{-1}^{1} = 0$$

Όμοια, για $k \in \mathbb{N}^+$, $b_k = \int_{-1}^{1} (x+1)\sin(k\pi x)\,dx = \int_{-1}^{1} x\sin(k\pi x)\,dx$

$$= 2\int_0^1 x\sin(k\pi x)\,dx = 2\int_0^1 x\left(-\frac{\cos(k\pi x)}{k\pi}\right)'dx =$$

x sin(kπx) άρτια

$$= -\frac{2\cos(k\pi x)}{k\pi} + \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \cos(k\pi x)\,dx = -\frac{2(-1)^k}{k\pi}$$

$$+ \frac{2}{k\pi}\,\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1 = 2\,\frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}$$

Άρα $x+1 \sim 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k\pi}\sin(k\pi x)$

(β) Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.4 (σελ. 213), το ανάλογο του δηλαδή για το διάστημα [−1, 1].

$$\lim_{n\to\infty} S_n f(x) = \frac{f(x-)+f(x+)}{2}$$

Για $x=\frac{1}{2}$ αυτό είναι $= f(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$

Για $x=-1$ " " $= \frac{f(-1)+f(1)}{2} = 1$

Στον τύπο πιο πάνω, $f((-1)-)$ είναι το $f(1)$

6 | Λύνουμε το πρόβλημα με χωρισμό μεταβλητών

Βήμα 1 | Ψάχνουμε λύσεις της $u_{tt}=4u_{xx}$ της μορφής

$u(x,t)=X(x)T(t)$.

$$X(x)T''(t)=4X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{4T(t)}=-\lambda \text{ σταθερά}$$

το $=-\lambda$ γιατί το πηλίκο δεν εξαρτάται από το x ή το t.

Άρα
$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \quad (1)$$
$$T''(t)+4\lambda T(t)=0 \quad (2)$$

Βήμα 2 | Ψάχνουμε λύσεις (όχι ταυτοτικά $=0$) των (1), (2) που επιπλέον ικανοποιούν $X'(0)=X'(\pi)=0$.

Πρέπει $\lambda\geq 0$ γιατί

$$(1) \Rightarrow \lambda\int_0^\pi X(x)X(x)\,dx=-\int_0^\pi X''(x)X(x)\,dx=$$
$$=-X'(x)X(x)\Big|_0^\pi+\int_0^\pi (X'(x))^2\,dx=\int_0^\pi (X'(x))^2\,dx \geq 0$$

Αν $\lambda<0$, τότε επειδή $\int_0^\pi X^2(x)\,dx>0$ (αλλιώς $X\equiv 0$ άτοπο) ~~[illegible]~~ θα παίρναμε $\int_0^\pi (X'(x))^2\,dx<0$, άτοπο.

Λύσεις με $\lambda=0$

$X''(x)=0 \Rightarrow X(x)=Ax+B$.

Η $X'(0)=X'(\pi)=0$ κάνει αποδεκτές μόνο τις $X(x)=A$ με $A\in\mathbb{R}$ σταθερά.

$T''(t)=0 \Rightarrow T(t)=\Gamma t+\Delta$ με $\Gamma,\Delta\in\mathbb{R}$

Λύσεις με $\lambda>0$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0 \Rightarrow X(x)=A\cos(\sqrt{\lambda}x)+B\sin(\sqrt{\lambda}x)$$

$$X'(x)=\sqrt{\lambda}\left(-A\sin(\sqrt{\lambda}x)+B\cos(\sqrt{\lambda}x)\right)$$

$$X'(0)=0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}B=0 \overset{\lambda>0}{\Rightarrow} B=0$$

$$X'(\pi)=0 \Rightarrow -\sqrt{\lambda}A\sin(\sqrt{\lambda}\pi)=0 \overset{A,\lambda\neq 0}{\Rightarrow} \sqrt{\lambda}\pi=k\pi$$

με $k\in\mathbb{Z}$

Άρα (αφού $\lambda>0$) $\lambda=k^2$ με $k\in\mathbb{N}^*$

$$T''(t)+4\lambda T(t)=0 \Rightarrow T(t)=\Gamma\cos(2\sqrt{\lambda}t)+\Delta\sin(2\sqrt{\lambda}t)$$

Τελικά αποδεκτές λύσεις οι

$$\begin{cases} X_0(x)=A \\ T_0(t)=\Gamma t+\Delta \end{cases} \quad A,\Gamma,\Delta\in\mathbb{R}$$

$$\begin{cases} X_k(x)=A\cos(kx) \\ T_k(t)=\Gamma\cos(2kt)+\Delta\sin(2kt) \end{cases} \quad A,\Gamma,\Delta\in\mathbb{R},\ k\in\mathbb{N}^*$$

Βήμα 3

Θέτουμε $u(x,t)=\Gamma_0 t+\Delta_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\Gamma_k\cos(2kt)+\Delta_k\sin(2kt)\right)\cos(kx)$

(τα A απορροφάται από τα Γ,Δ)

$$u(x,0)=\Delta_0+\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma_k\cos(kx)$$

Θέλουμε αυτό να ισούται με $\sin^2x-\cos(3x)+1=$

$$=\frac{1-\cos(2x)}{2}-\cos(3x)+1=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cos(2x)-\cos(3x)$$

Άρα $\Delta_0 = \frac{3}{2}$, $\Gamma_2 = -\frac{1}{2}$, $\Gamma_3 = -1$

και $\Gamma_i = 0$ για $i = 1$ και $i \geq 4$

Υποθέτοντας ότι η παράγωγος u_t επιτυγχάνεται με παραγώγιση της σειράς όρο προς όρο, έχουμε

$$u_t(x,0) = \Gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} 2k \Delta_k \cos(kx)$$

Θέλουμε αυτό να ισούται με $-2\cos(7x) + 5$

ορίζουμε $\Gamma_0 = 5$, $\Delta_7 = -\frac{1}{7}$, $\Delta_i = 0$ για $i \in \mathbb{N}^* \setminus \{7\}$

Άρα $u(x,t) = 5t + \frac{3}{2} + \left(-\frac{1}{2}\cos(4t)\right)\cos(2x)$

$- \cos(6t)\cos(3x) - \frac{1}{7}\sin(14t)\cos(7x)$ (*)

Βήμα 4 Η u που ορίσαμε στην (*) ανήκει στο

$C^2((0,\pi)\times(0,\infty)) \cap C([0,\pi]\times[0,\infty))$

και η παράγωγος της ως προς x και t επιτυγχάνεται με παραγώγιση όρο προς όρο.

Άρα

- ως πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός λύσεων της $u_{tt} = 4u_{xx}$ είναι και η ίδια λύση της εξίσωσης,
- $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$ γιατί κάθε όρος του αθροίσματος που ορίζει την u ικανοποιεί αυτή τη σχέση
- $u(x,0) = \sin^2 x - \cos(3x) + 1$

• $u_t(x,0) = -2\cos(7x)+5$

γιατί για την εξασφάλιση αυτής της σχέσης απαιτείται μόνο ότι η παράγωγος της u ως προς t υπολογίζεται με παραγώγιση όρο προς όρο, το οποίο ισχύει. (έχοντας ορίσει την u μέσω της (*)).

Άρα η u λύνει το πρόβλημα.

7)

$$\kappa \int_\Omega u^2(x)\,dx = \int_\Omega u(x)\,\Delta u(x)\,dx =$$

$$= \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial u(x)}{\partial n}\,dS - \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla u(x)\,dx = -\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx$$

(α) Αν $\kappa=0$, παίρνουμε $\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx=0$.

οπότε $\nabla u(x)=0 \quad \forall x\in\Omega$

επειδή το Ω είναι συνεκτικό, έπεται ότι η u είναι σταθερή.

(β) Αν $\kappa<0$, επειδή $\kappa\int_\Omega u^2(x)\,dx = -\int_\Omega |\nabla u(x)|^2\,dx \le 0$

έπεται $\int_\Omega u^2(x)\,dx = 0$, άρα $u\equiv 0$ στο Ω

(αφού είναι συνεχής ...)

8)

(α) $u(x,t) = e^{-rt}v(x,t) \Rightarrow$ $u_t = -re^{-rt}v + e^{-rt}v_t$

$u_{xx} = e^{-rt}v_{xx}$

Άρα η $u_t = 2u_{xx} - 3u \Rightarrow -ru + e^{-rt}v_t = 2e^{-rt}v_{xx} - 3u.$

Επιλέγουμε $r=3$. Τότε η τελευταία σχέση γράφεται

$$v_t = 2v_{xx}$$

Επίσης $v(x,0) = e^{3\cdot 0}u(x,0) = \sin x$

(β) $$v(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\cdot 2t}}\int_{\mathbb{R}} \sin y \cdot e^{-\frac{(x-y)^2}{4\cdot 2t}}\,dy$$

$$|v(x,t)| \le \frac{1}{\sqrt{8\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(y-x)^2}{8t}}\,dy = 1$$

γιατί $|\sin y| \le 1$

πυκνότητα μιας $N(x,4t)$

δ) | Έστω u_1, u_2 δυο λύσεις.

Τότε ~~θα ικανοποιεί~~ η $u = u_1 - u_2$ ικανοποιεί τις

$$u_t = 2u_{xx} + u_x$$

$$u_x(0,t) = 0 \qquad t \geq 0$$

$$u(1,t) = 0 \qquad t \geq 0$$

$$u(x,0) = 0 \qquad x \in [0,1]$$

ορίζουμε $E(t) = \int_0^1 u^2(x,t)\,dx \qquad \forall t \geq 0$

$$E(0) = 0$$

$$E'(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\,u_t(x,t)\,dx =$$

$$= 4\int_0^1 u(x,t)u_{xx}(x,t)\,dx + 2\int_0^1 u(x,t)u_x(x,t)\,dx$$

$$= 4\,u(x,t)u_x(x,t)\Big|_{x=0}^{x=1} - 4\int_0^1 (u_x(x,t))^2\,dx$$

$$+ u^2(x,t)\Big|_{x=0}^{x=1} = 0 - 0 - 4\int_0^1 u_x^2\,dx$$

$$+ \underbrace{u^2(1,t)}_{=0} - u^2(0,t) \leq 0$$

Άρα $E \downarrow$ και αφού $E(0) = 0$ και $E(t) \geq 0$,

έχουμε $E(t) = 0 \ \forall t \geq 0$. Επομένως $u(x,t) = 0 \ \forall x, t$.