**Μερικές διαφορικές εξισώσεις**

**Τεστ εξάσκησης**

**1.** Θεωρούμε την εξίσωση $tu_x - xu_t = 0$ για τη συνάρτηση $u(x,t)$ στο $\Omega = \mathbb{R} \times (0,\infty)$. Για καθεμία από τις εξής συνοριακές συνθήκες, να εξεταστεί αν έχει λύση και αν έχει να υπολογιστεί.
(α) $u(x,0) = \cos x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(β) $u(x,0) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(γ) $u(x,0) = x$ για κάθε $x > 0$.

**2.** Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t + uu_x = 0 && \text{στο } \Omega := \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ &u(x,0) = \phi(x) && \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

όπου $\phi(x) = \mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x) + (1-x)\mathbf{1}_{[0,1)}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
(α) Να βρεθούν οι χαρακτηριστικές καμπύλες του προβλήματος (καμπύλες στο $\bar{\Omega}$). Ειδικότερα, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ να βρεθεί η καμπύλη που διέρχεται από το $(x_0, 0)$.
(β) Ποιος είναι ο χρόνος θραύσης $t^*$; Να προσδιοριστεί η λύση της εξίσωσης στο $\mathbb{R} \times [0, t^*)$.

**3.** Να λυθεί η

$$\begin{aligned} u_x + u_t + u^2 &= 0, \\ u(x,0) &= f(x), \ \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

στο μέγιστο υποσύνολο του $H = \mathbb{R} \times [0,\infty)$ που αυτό είναι δυνατόν. Η $f$ είναι μια δεδομένη συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.
(α) Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δειχθεί ότι η λύση ορίζεται σε όλο το $H$.
(β) Αν υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ με $f(x_0) < 0$ τότε υπάρχει $t_0 \in (0,\infty)$ ώστε $\lim_{t \to t_0^-} u(x_0, t) = -\infty$.
(γ) Αν η $f$ είναι κάτω φραγμένη, να δειχθεί ότι υπάρχει ένα μέγιστο $\tau \in (0,\infty]$ ώστε η λύση να υπάρχει στο $\mathbb{R} \times [0,\tau)$. Να προσδιοριστεί το $\tau$.

**4.** Να αναχθεί η εξίσωση $u_{xx} - 4u_{xt} + 6u_{tt} = 0$ σε εξίσωση της μορφής $U_{\xi\xi} + U_{\eta\eta} = 0$ όπου $U(\xi,\eta) = u(x(\xi,\eta), t(\xi,\eta))$ για κατάλληλες γραμμικές συναρτήσεις $x(\xi,\eta), t(\xi,\eta)$.

**5.** Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in [-1,1]$.
(α) Να προσδιοριστεί το ανάπτυγμα Fourier της $f$ στο $[-1,1]$.
(β) Άν $S_n f(x)$ το $n$-οστό μερικό άθροισμα στο $x$ της σειράς Fourier από το (α), ποια είναι η τιμή του ορίου $\lim_{n\to\infty} S_n f(x)$ για $x = 1/2$ και $x = -1$.

**6.** Να λυθεί το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} &u_{tt} = 4u_{xx} && \text{στο } \Omega := (0,\pi) \times (0,\infty), \\ &u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0 && \text{για } t > 0, \\ &u(x,0) = \sin^2 x - \cos(3x) + 1 && \text{για } x \in \mathbb{R}, \\ &u_t(x,0) = -2\cos(7x) + 5 && \text{για } x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

**7.** Έστω $\Omega \neq \emptyset$ κλειστό, φραγμένο, και συνεκτικό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ του οποίου το σύνορο. $\partial\Omega$, είναι μια $C^1$ κανονική καμπύλη. Έστω $u \in C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ ώστε για κάποια σταθερά $k \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$\begin{aligned} \Delta u + ku &= 0 \quad \text{στο } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{στο } \partial\Omega, \end{aligned}$$

όπου $n$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο $\partial\Omega$ με κατεύθυνση προς το εξωτερικό του $\Omega$.
(α) Αν $k = 0$, να δειχθεί ότι η $u$ είναι σταθερή συνάρτηση.
(β) Αν $k < 0$, να δειχθεί ότι η $u \equiv 0$.

**8.** Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t = 2u_{xx} - 3u && \text{στο } \Omega := \mathbb{R} \times (0, \infty), \\ &u(x, 0) = \sin x && \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(α) Προσδιορίστε κατάλληλο $r \in \mathbb{R}$ ώστε η $v(x, t) = e^{rt} u(x, t)$ να ικανοποιεί το πρόβλημα αρχικών τιμών

$$\begin{aligned} &v_t = 2v_{xx} && \text{στο } \Omega, \\ &v(x, 0) = \sin x && \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(β) Εκφράστε σε ολοκληρωτική μορφή μια φραγμένη λύση του τελευταίου προβλήματος και δείξτε ότι ικανοποιεί $|v(x, t)| \leq 1$ για κάθε $(x, t) \in \Omega$.

**9.** Θεωρούμε το πρόβλημα αρχικών/συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} &u_t = 2u_{xx} + u_x + f(x, t) && \text{στο } \Omega := (0, 1) \times (0, \infty), \\ &u_x(0, t) = g(t) && \text{για κάθε } t > 0, \\ &u(1, t) = h(t) && \text{για κάθε } t > 0, \\ &u(x, 0) = k(x) && \text{για κάθε } x \in [0, 1], \end{aligned}$$

όπου $f, g, h, k$ είναι δεδομένες συναρτήσεις. Να δειχθεί ότι το πρόβλημα έχει το πολύ μία λύση.

## Σχόλια

**2.** Μελετήστε το παράδειγμα 1.12 στο βιβλίο των Ακρίβη-Αλικάκου και τη συζήτηση που προηγείται.

**7.** Τύπος Green. Παράγραφος 7.1.

**9.** Με τη μέθοδο ενέργειας.